Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 7 No. 2, diciembre de 1989

LA CRISIS DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA*

Georges Glaeser**

Crisis Social

La tercera revolución industrial que actualmente convulsiona a la raza humana,se caracteriza por un acelerado cambio tecnológico. Hacia 1960 cualquier nuevo producto de la industria manufacturera en los Estados Unidos se volvía anticuado después de cinco años; aquellos que habían adoptado nuevos métodos tenían al menos un par de años de respiro antes de tener que prepararse para la siguiente inovación.Hoy en día el cambio es continuo. La edad de la educación continuada ha llegado.

Los programas escolares generalmente tienen una duración promedio de cinco años. Tan pronto como el más reciente libro aparece, escrito a la carrera, es indispensable que los profesores se adapten a él. Después de tres años de esfuerzo, ellos piensan que ha llegado el momento de no preocuparse más. ¡Nada de eso! ¡Nuevas reformas están ya en camino y adelante aún los esperan nuevos cursos de capacitación y entrenamientos de actualización! Pero estos entrenamientos imparten conocimientos que son útiles solo provisionalmente.

---

* Traducción del artículo "The Crisis of geometry teaching" aparecido en "Studies in mathematics education", volumen 5, publicado en 1986 por la UNESCO.

** Profesor Emérito de la Universidad Louis Pasteur, Strasbourg, Francia.

Estamos presenciando el colapso de la educación tradicional que se basaba en la adquisición de una cierta cantidad de conocimiento establecido en los programas escolares. Hoy en dia cada uno debe aprender a informarse y a documentarse por sí mismo, así como a adquirir ciertas habilidades por su cuenta, sabiendo que no le serán útiles por mucho tiempo. La **educación** (como adquisición de hábitos) está reemplazando la **enseñanza** (como transmisión de conocimientos).

Otro aspecto de la actual crisis fué descrito en 1970 por el célebre físico P.L.Kapitza (1894-1984),quien claramente describió los problemas educativos de nuestra época. Los siguientes son algunos apartes de su exposición **"Los principios Generales de la Educación de la Juventud de Hoy y Métodos Generales para la Enseñanza de la Física en la Escuela Secundaria"**:

> "Durante el siglo pasado entre el 80 y el 90% de la población trabajaba en los campos, produciendo comida; solo el 10% vivía en las ciudades. Hoy sólo el 10% de la población de América trabaja produciendo comida; el resto está vinculado a la industria o a otro tipo de actividad, y así el poder productivo por persona es alto. Por ejemplo, si Usted considera una moderna fábrica de automóviles y divide el número de automóviles que produce por el de trabajadores de la fábrica, encontrará que el trabajo de una persona produce más de un automóvil por mes.
>
> "Nuestros modernos economistas reconocen que la producción industrial solo requiere de una cuarta parte de la población de un país para suministrar comida, vestido, alojamiento y los servicios necesarios a toda la población. Una buena parte del resto se ocupa en la industria de material de guerra, en ayudar a los paises menos desarrollados y en actividades como los deportes, cine, televisión y viajes." (Kapitza, 1971, pp.1-2)

De esto Kapitza deduce que "el aumento de la productividad por persona fue tan grande que hubo un tremendo incremento en la riqueza, en los ingresos por persona en todo el mundo"(Kapitza, 1971, pp.2-3)

Los Nuevos Objetivos de la Escuela

Se sigue entonces que cualquier solución que se intente dar a la crisis que enfrentamos debe involucrar un aspecto **cultural.** La modernización de la maquinaria sería inútil si no va acompañada del desarrollo intelectual de los productores.

Tal progreso solo se alcanzará alentando sistemáticamente a un trabajo individual fuera de las aulas, con menos aprendizaje de memoria y más libre acumulación de documentación. En cada salón de clase-particularmente en aquellos diseñados para alumnos con problemas de aprendizaje y cuyos hogares no les suministran el ambiente cultural requerido- los libros de referencia, sobre todo diccionarios y enciclopedias, deben estar al alcance de los estudiantes. Eventualmente cada escuela debería tener acceso a bancos de datos a través del computador.

La educación continuada familiarizará a cada uno con el uso de tales herramientas. Pero se requiere un plan de emergencia para rescatar intelectualmente aquellos adolescentes de 12 años que no entienden lo que leen (porque no leen lo suficiente). Ellos deberían ser conducidos hasta el mínimo vital de desarrollo intelectual antes de completar sus estudios obligatorios.

En estas circunstancias la Matemática- una ciencia en la cual hay poco para aprender y mucho para entender- es un campo cultural de primordial importancia.Progresivamente debería convertirse más en un instrumento de educación y menos en un catálogo de temas para enseñar.

La lista de hechos matemáticos que, por el interés de la sociedad, todos deberían conocer, cambia año por año y suma muy poco. La Matemática es **localmente inútil y globalmente esencial.** Por otra parte, hay métodos -herramientas intelectuales- que cada dia son más útiles.

Nuestros niños no deberían sentirse preocupados, como se sintieron nuestros padres, ante la simple visión de una fórmula matemática. Todo el mundo debería ser conciente de la precisión de la proposición representada por medio de expresiones algebraicas debidamente utilizadas. Por otra parte, la excesiva memorización de gran número de fórmulas es dañosa, especialmente si no se entiende su uso o si pueden ser fácilmente consultadas en libros de referencia.

Es importante desarrollar cierta maestría en los dibujos y diagramas como una vía para la solución de muchas dificultades cotidianas: saberlos trazar, saberlos leer y saberlos interpretar. Más aún, cada uno debería ser capaz de transferir conocimientos de un campo a otro. Más que compartimentalizar la educación, existe la necesidad de estimular la reinversión del conocimiento (por ejemplo, de la Geografía a la Matemática y viceversa).

Debemos insistir en la importancia esencial de la expresión oral y escrita. Muchas de las fallas en Matemática se deben a la incapacidad de leer y entender el enunciado de un problema. Para evitar un malentendido, puede decirse que el aprendizaje, basado en la educación, no excluye la adquisición imprevista de una gran cantidad de conocimientos. Cuando un estudiante es sorprendido desprevenido por un "evento matemático" y él entiende de qué se trata, lo recordará sin hacer esfuerzo alguno para aprenderlo. Por ejemplo, la importancia de la propiedad asociativa se percibe más claramente resaltando la diferencia entre

$$a^{(b^c)} \text{ y } (a^b)^c$$

que memorizando su definición. Similarmente, aprender a temprana edad a definir el límite según Cauchy (con ε y δ) es inútil (y aun dañino) si no se ve precedido por un largo proceso de familiarización con la convergencia, repartido a lo largo de un período de 10 años. (Glaeser, 1976).

La Geometría es un medio particularmente efectivo para llevar a cabo la nueva forma de educación que el futuro requiere. Desde el prinicipio la Geometría ha asumido diferentes papeles, cinco de los cuales se van a describir en lo que resta de este artículo. Muchos de los errores cometidos en los últimos 30 años por los responsables de diseñar los programas escolares y de planear el entrenamiento de los profesores, han surgido como resultado de su ignorancia para distinguir tales papeles.

Somos testigos presenciales del declinar de la enseñanza de la Geometría. Pero aún más lamentable, sin embargo, es el declinar de la educación geométrica.

La Geometría como Ciencia del Espacio

Comenzando con las observaciones empíricas de los egipcios o de otros agrimensores, sobre las figuras del espacio se ha acumulado todo un tesoro de información. La enseñanza ha consistido principalmente en inculcar una parte de esta dispareja información, afirmando que es útil.

¿Podemos nosotros, por ejemplo, estar seguros de que la fórmula para calcular el área de un triángulo es importante? Muchas personas pueden considerar que es más importante adquirir la habilidad para evaluar el área de una superificie dividiéndola en fragmentos más simples y reconstruyendo el rompecabezas en una forma diferente. Naturalmente, los más simples ejercicios para adquirir tal habilidad tendrían que ver con el paralelogramo y el triángulo. Aquellos que han sido golpeados por la facilidad con que puede llegarse a la respuesta, los recordarán sin esfuerzo.

Recientemente pensé en esto mientras calificaba algunos exámenes de estudiantes-profesores. Para resolver el problema asignado era necesario calcular el área de un trapecio dado. Me indignó el encontrar que en ninguno de los exámenes se hacía referencia a la fórmula clásica, aunque la mayoría de ellos había obtenido la respuesta correcta con solo dividir el trapecio en dos triángulos. Al reflexionar mi indignación desapareció. ¿Qué podía argumentar con mi insistencia en un conocimiento erudito, si el futuro profesor pudo trabajar el problema en forma rápida y correcta? Lo que los futuros profesores habían aprendido no fueron las fórmulas prefabricadas sino la forma fácil de llegar al resultado (y también a muchos otros resultados similares, aún en casos menos comunes).

Este es un claro ejemplo de la **educación** tomando prioridad sobre la **instrucción**. Ahora imaginemos que un estudiante, efrentado a un triángulo, se hace la siguiente pregunta:

¿Es posible calcular su área conociendo las longitudes de sus tres lados? El profesor lo animará a buscar tal información en alguno de los libros de referencia con que cada salón de clase debe estar dotado. El buen profesor luego señalará muy entusiasta que la fórmula

$$A = 1/4 \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}$$

generalmente atribuída a Herón, fué en efecto establecida por Arquímedes en una época en que la notación algebraica aún no se había inventado. Eventualmente el profesor, siguiendo el ejemplo de A. Wittemberg (1963) procederá a mostrar al curso que esta fórmula aparentamente providencial es en efecto (dejando a un lado el coeficiente) la única razonable.

Esto puede demostrarse utilizando argumentos basados en el principio de invarianza u homogeneidad. Los estudiantes observados por Wittemberg entendieron, por sí mismos, las razones para la presencia de factores tales como (a+b-c) bajo el radical, y el factor 1/4 puede demostrarse con solo recurrir a un caso particular adecuado.(El triángulo pitagórico 3-4-5 muy rápidamente conduce al resultado).

"¿Pero", preguntará un lego," existe alguna necesidad para esta fórmula?" La respuesta es "NO". "Luego, ¿para qué sirve?" Nuestra respuesta debe ser: ¿"Para qué sirve el concierto No. 20 en Do menor de Mozart?" La educación también debe servir para desarrollar el sentido estético.

Son muy raras las ocupaciones que no necesitan cierta familiaridad con las ampliaciones y las reducciones. La educación empieza desde muy temprana edad con muñecas y carros en miniatura, pero debe continuar con meditación sobre el proceso en cuestión. A manera de ejemplo, yo recomendaría las actividades sugeridas por Guy Brousseau (1981) que se relacionan con la ampliación de un rompecabezas. En cuanto a la definición de similitu' ́sta es fácilmente recordada si ya se posee gran familiaridad con lo que le concierne.

La Geometría como Modelo de Precisión

La Geometría fué, durante largos años, **la ciencia deductiva** por excelencia. Cuando un hombre como Spinoza[1] se propuso en su Etica exponer su doctrina a un alto nivel de racionalidad, lo hizo por medio de un enfoque geométrico. Hoy esa ambición puede parecer muy intuitiva. No fué sino hasta 1899 con los **Fundamentos de Geometría,**de David Hilbert, que el antiguo proyecto de Euclides fué final y adecuadamente culminado. Sin embargo, al trabajo en cuestión no le faltó pedantería y ordinariez en su estilo.

---

1 Benito Spinoza (1632-1677) filósofo holandés de ascendencia judía. N. del E.

Aunque la idea fué explicar los fundamentos (es decir, los principios) de la ciencia, el texto resultante está fuera del alcance de los principiantes. El enfoque es axiomático. Para entenderlo es esencial una educación previa durante un largo período de tiempo. Mientras Bourbaki[2] no requiere de sus lectores ningún conocimiento matemático especial, él piensa que ellos adquirirán ciertos hábitos de razonamiento matemático y un cierto poder de abstracción. Para desarrollar estos hábitos y este poder, uno tiene que tener la oportunidad de practicar ciertas actividades ad hoc. Más aún, una introducción a la axiomática de la Geometría solo funciona con alumnos ya versados en el tema y que sean capaces de reconocer las desventajas de la Geometría empírica. Hoy en día el Análisis y, sobre todo, el Algebra, ofrecen un mejor modelo de precisión matemática.

La Geometría elemental y la axiomática de Hilbert no constituyen el más efectivo punto de partida para una exposición de Geometría basada en un enfoque hipotético-deductivo. Tal como lo propuso Jean Dieudonné (1964)[3] parece más económico tomar como punto de partida un espacio afín sobre $\mathbb{R}^n$ junto con un producto escalar. Sin embargo tal presentación aunque satisfactoria para un matemático,en manera alguna desarrolla la intuición y la cultura del principiante. En cuanto a novatos se refiere, este enfoque ha resultado un completo fracaso.

Fuerza Estimulante del Raciocinio

Ya que es esencial preparar a los jóvenes estudiantes durante un largo período para la práctica y la apreciación de la demostración matemática, el profesor debería tener a su disposición un surtido de situaciones y actividades educacionales adecuadas. Es aquí donde la Geometría juega un papel decisivo, no como un estupendo modelo de precisión sino como un trampolín para el desarrollo del poder deductivo.

El génesis del razonamiento se inicia muy temprano. Sería útil recopilar una antología de "pretextos para razonar" para ser usados desde los días de la guardería en adelante. Las actividades adecuadas para escolares menores de 8 años incluyen clasificar, seleccionar, ordenar y distribuir objetos en diferentes clases de equivalencia. La práctica en la enumeración utilizando diagramas de árbol, tablas de doble entrada, biyecciones o particiones, prepara el camino para la compilación de listados muy completos. Tales actividades intelectuales retienen su valor educacional a pesar de la falla de las llamadas matemáticas modernas. La construcción de cuadrados mágicos pone en juego el pensamiento lógico y el heurístico. Los preadolescentes disfrutan

---

[2] Nicolás, Nombre adoptado por un grupo de matemáticos franceses que en 1930 iniciaron la publicación de libros de Matemática altamente axiomatizada. Mientras los miembros del grupo deben retirarse al cumplir los 50 años, otros personajes son invitados a unírseles. N. del E.

[3] Matemático francés nacido en 1906, uno de los fundadores del grupo Bourbaki. N. del E.

tratando de diseñar o de traducir "códigos secretos". Les gusta entender cómo se hacen trucos con las cartas de la baraja. Sus investigaciones sobre tales temas les enseñan a argumentar y a demostrar. Y ahora, he aquí un problema (IREM, Stasbourg, 1974). Se resolverá mediante el descubrimiento de un contraejemplo que bien puede ser entendido por niños escolares entre los 9 y los 10 años. A un joven estudiante se le pregunta qué piensa de las siguientes dos proposiciones:

1a.Proposición: "Estoy dentro de un campo cuadrado y camino en línea recta. A la mitad de mi camino encuentro la frontera del campo, luego termino fuera del campo."

2a. Proposición: "Estoy fuera de un campo cuadrado y camino en línea recta. A la mitad del camino encuentro la frontera del campo, luego termino dentro del campo.

En cuanto a la primera proposición, el joven estudiante no puede hacer más que expresar su convicción; la demostración está fuera de su alcance. Sin embargo, en el caso de la segunda proposición sería interesante observar cómo su convicción inicial puede dar paso a la duda, culminando en el descubrimiento de un contra-ejemplo. En esta forma, un estudiante llega a entender que lo que parece obvio no siempre es necesariamente verdadero, y que una regla no es general si admite al menos una excepción.

Entre las muchas demostraciones posibles al nivel de la escuela primaria puede mencionarse la deducción de ciertas fórmulas para el área de un polígono, así como muchos juegos. En los numerosos estudios adelantados por Guy Brousseau en el IREM (Institute de Recherche sur l'enseignement des Mathematiques) en Burdeos puede encontrarse otra gran cantidad de ejemplos.

Es, sin embargo, alrededor de los 12 ó 13 años (bajo los actuales programas escolares) que se empieza a exigir a los alumnos demostraciones sistemáticas en Geometría. En este sentido me gustaría mencionar un incidente personal que me he propuesto no olvidar porque fué el origen de mi decisión de llegar a ser un matemático. Yo tenía 12 años y cursaba el sexto grado cuando, por primera vez, el profesor nos exigió realizar en casa una tarea demostrando lo siguiente:

Dado un ángulo recto $x\hat{O}y$, junto con otros ángulos $A\hat{O}B$ y $C\hat{O}D$ cuyas respectivas bisectrices son Ox y Oy, demostrar que los ángulos $A\hat{O}C$ y $B\hat{O}D$ son suplementarios. (Ver figura 1)

Durante un largo rato me sentí confuso. Luego caí en la cuenta de que trazar una figura me ayudaría y entonces adopté, lo recuerdo bien, la incómoda notación $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ que en la figura 1 reemplacé por las letras griegas $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ (En aquel entonces no las conocía). Así llegué a la siguiente solución:

$$A\hat{O}C = 2\hat{\alpha} + \hat{\beta} \quad \text{y} \qquad B\hat{O}D = 2\hat{\gamma} + \hat{\beta}$$

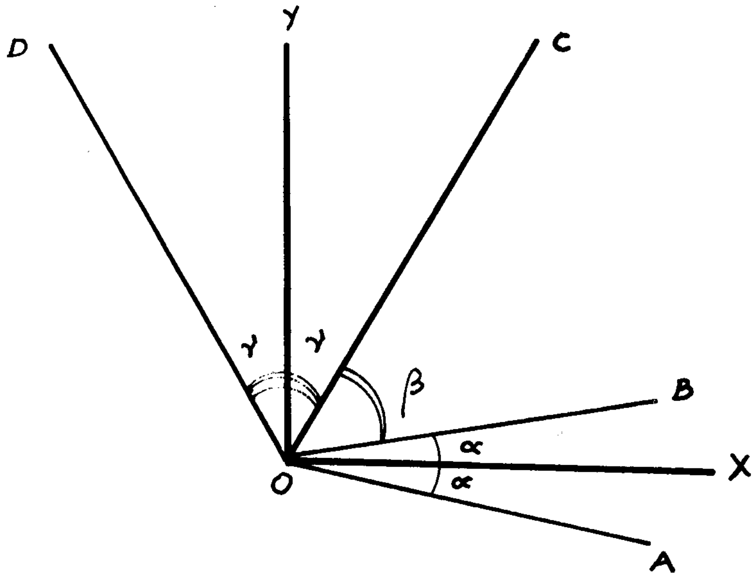

Figura 1

luego,

$$\begin{aligned} A\hat{O}C + B\hat{O}D &= (2\hat{\alpha}+\hat{\beta}) + (2\hat{\gamma}+\hat{\beta}) = \\ &= 2(\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}) = 2 \text{ ángulos rectos} \end{aligned}$$

Q.E.D.

Recientemente discutí este recuerdo con unos amigos. Claramente mi "demostración" está lejos de ser perfecta según los cánones de Hilbert. En primer lugar, aunque la solución tiene cierto grado de generalidad (ya que la figura puede ser ligeramente modificada sin que se invalide el razonamiento), sin duda depende de unas figuras. Por ejemplo, basta con intercambiar las letras C y D para que el razonamiento deje de ser verdadero.

Más aún, mi solución de principiante se basaba (sin que yo fuera conciente de ello) en las propiedades asociativa y conmutativa de la adición de ángulos, sobre las cuales, en aquel entonces, yo nada tenía que decir. Fueron necesarios 10 años más de práctica matemática para que yo encontrara situaciones en las cuales la ausencia de la asociatividad condujera a burdos errores.

Si mi maestro de tercer grado hubiera tratado de explicarme el grave error lógico contenido en mi solución, yo no hubiera entendido. Pero ninguno de los amigos matemáticos que consulté sugirió que yo no había entendido -a partir de aquella experiencia-lo que era una demostración. Yo había dado un importante paso hacia el entendimiento de las reglas del juego de las matemáticas.

Muchos profesores se quejan de la dificultad con que sus estudiantes emprenden cualquier demostración que se les pide hacer. Y la mayoría de los novatos miran las demostraciones como requerimientos gratuitos y pedantes del profesor. El proceso de entendimiento puede ayudarse invitando a los estudiantes a observar situaciones en las cuales lo que parece obvio sea en verdad falso.

Es en esta forma que los ejercicios con problemas de Geometría ayudan gradualmente a perfeccionar la lógica de los estudiantes. La Geometría es una sobresaliente herramienta educacional para desarrollar un entendimiento conciente de la naturaleza útil y productiva de las demostraciones.

Con frecuencia he utilizado el siguiente ejemplo con alumnos de 11 y más años, pero probablemente pueden obtenerse buenos resultados con niños menores. El profesor pregunta si en el diagrama adjunto (Figura 2) el octágono resaltado es regular.

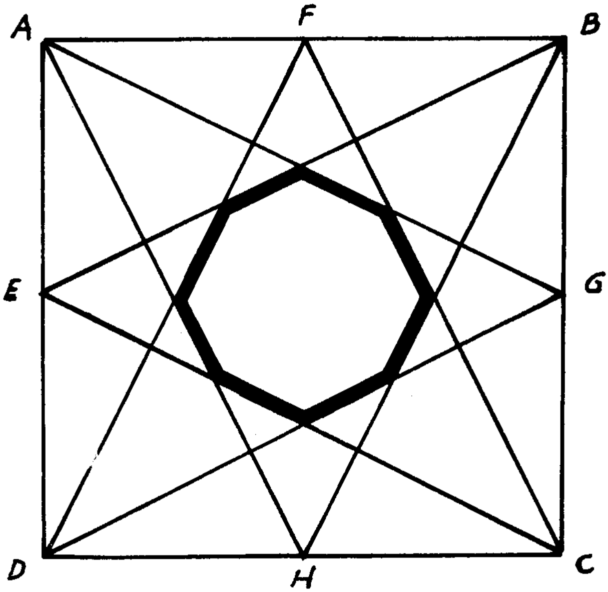

Figura 2

¡Obvio! grita la clase. ¡Puede verse en el dibujo!
Guy Brousseau sugiere que se siembren algunas dudas en este momento y así provocar una discusión. Comencemos por buscar el significado de la palabra "regular" en el diccionario. En su sentido geométrico se define como "con todos sus lados y ángulos iguales". Muy pronto algunos estudiantes, aún escépticos, tratarán de medir los lados. Primer punto de discusión: '¿son los lados realmente iguales?' El profesor puede entonces esgrimir argumentos basados en los principios de simetría que, quizás muy convincentes para él, no convencerán a sus estudiantes. La apariencia les parece una demostración más fuerte.

Es hora entonces de mirar los ángulos pero (como suele suceder) nadie tiene un transportador a la mano. De todas manera, puesto que no todo el mundo sabe cómo utilizarlo correctamente, la controversia se reinicia. Al final se reconoce que los ángulos AHB y FDG son diferentes: los lados de FDG están menos distantes que los de AHB puesto que FG es menor que AB ('¡Eso es claro en el dibujo!') Subsecuentemente podrá encontrarse otra demostración menos empírica.

Lo que más me gusta de este ejemplo es que los conocimientos que se requieren para entenderlo prácticamente no requieren aprendizaje. Y constituye una forma para convencer a los estudiantes de que las apariencias pueden engañar y así los entusiasma a buscar una demostración. En cursos superiores este mismo ejercicio es un buen modelo para una primera demostración por **reducción al absurdo**: ¡Si el octágono fuera regular los vértices del polígono asociado AGDFCEBHA debería estar inscrito en una circunferencia y no en un cuadrado!

En los dos ejemplos dados la utilización de argumentos no formales es intencional. Será necesaria una gran práctica antes de que el estudiante sea conciente de los inconvenientes del sentido común geométrico y para que esté dispuesto a someterse a los rituales del matemático y del lógico.

Finalmente, encuentro natural que un profesor que esté interesado en desarrollar el poder de razonamiento de sus estudiantes dedique algunas horas (repartidas en el tiempo disponible) al estudio de este ejemplo, aunque esté plenamente conciente de que la importancia del resultado es nula ¡Tanto peor para los programas! Un profesor que triunfe logrando que su clase entienda por qué los matemáticos disfrutan con las actividades lógicas, no habrá malgastado su tiempo.

GEOMETRIA COMO LENGUAJE HEURISTICO

'¿Pero por qué', puede replicar un matemático profesional, 'escoger la geometría y las lenguas muertas como signos culturales y como herramientas para desarrollar el razonamiento? ¿No es posible utilizar conocimientos más actuales, menos anticuados?' Y, a propósito, el trabajo con computadores es un poderoso incitante para formalizar el razonamiento. El computador está desprovisto de intuición y 'no ve nada obvio en un diagrama'.

Se admite que la geometría elemental incluye conocimientos completamente obsoletos, con la excepción de aquellos incorporados por el álgebra (Dieudonné, 1964).Pero no es como un cuerpo de conocimientos que es importante. La Geometría ha llegado a ser hoy en día el lenguaje heurístico más ampliamente utilizado, y es por ésto que es esencial que los estudiantes tengan la oportunidad de aprenderlo. Siempre que deseamos analizar una situación complicada, hacemos bocetos o diagramas para ayudar al razonamiento intuitivo. En efecto, no conozco ninguna profesión en la cual el arte de utilizar dibujos (figurativos o simbólicos) no sea fundamental. Más aún, no hay nada que nos impida referirnos (al avanzar en el razonamiento mencionado de los ángulos) a un teorema debidamente demostrado en algún buen libro, tal como el siguiente:

Teorema

Si dos lados del triángulo AOB son iguales a dos lados del triángulo A'O'B' pero los ángulos comprendidos por tales lados son diferentes, entonces al mayor ángulo se opondrá mayor lado, y viceversa.

Pero la proposición en forma lógica viene al final. El lenguaje de la geometría es importante porque sugiere metáforas que impulsarán la asociación de ideas. No es por simple coincidencia que el Análisis Funcional habla de distancia, esferas, conos, traslaciones y similitudes. Con toda seguridad el matemático es conciente de las limitaciones de esas dudosas analogías, pero organiza su conocimiento alrededor de unas cuantas imágenes sugestivas.

Ningún matemático se deja embaucar por la ficción heurística que describe rectas paralelas como aquellas 'líneas rectas que se intersectan en el infinito'. En cualquier caso, ésta muy conveniente forma de hablar puede justificarse mediante una construcción axiomática del plano proyectivo. Similarmente, el uso del lenguaje de la geometría euclidiana real en el dominio complejo hace posible alcanzar algunos sorprendentes atajos heurísticos. Cuando uno habla del punto imaginario de intersección de dos circunferencias reales disyuntas, simplemente está hablando de una ecuación algebraica con raíces complejas. Estas raíces pueden ser calculadas e invocadas en el curso de un razonamiento, aunque no sea posible mostrarlas en un diagrama.

En la geometría euclidiana real dos líneas rectas perpendiculares nunca son paralelas. Pero nos permitimos explicar las propiedades de las líneas rectas isotrópicas en el dominio complejo diciendo que son líneas rectas que permanecen fijas al ser rotadas alrededor de uno de sus puntos. Quienes se aparten de tal descripción surrealista están en libertad de regresar a los cálculos explícitos, en los cuales no se hace referencia a la intuición. Pero el lenguaje geométrico favorece la transferencia de un contexto al otro.

Ejemplo

Enfrentado al siguiente problema de álgebra:

'Describir las matrices reales simétricas tales que las entradas de M y de M^{-1} sean todas positivas o cero',
uno puede razonar así:

M representa un isomorfismo del espacio IR^n .Sea el 'primer cuadrante'aquella parte de IR^n que contiene los puntos cuyas coordenadas son positivas o cero. La hipótesis implica que M transforma el primer cuadrante en sí mismo, y como esto es también cierto para M^{-1} deducimos que el primer cuadrante es transformado sobre sí mismo y que, consecuentemente, los ejes coordenados se preservan. Concluímos entonces que por fila y por columna hay solo una entrada diferente de cero (matrices estocásticas).

Es posible demostrar el resultado por medio de simples cómputos, pero una transferencia al dominio de la geometría suministra la comprensión que capacita para llegar a tal demostración. Más aún, un resultado obtenido por medio de largos cómputos a veces parece milagroso. La búsqueda de causas simples e intuitivas es más convincente.

He aquí un ejemplo donde la intuición en el campo de la óptica geométrica produce más que la aplicación mecánica de una fórmula.

Problema
Encontrar el centro de curvatura del vértice de una curva parabólica.

El resultado es obvio cuando se utiliza la aproximación de Gauss a un espejo parabólico por un espejo esférico osculador de pequeña abertura. En el caso de éste último se sabe que hay un foco aproximado situado en el punto medio del segmento que une el vértice al centro. Teniendo en cuenta esta aproximación la respuesta a la pregunta propuesta se hace evidente sin necesidad de cálculos: 'El centro de curvatura es el punto simétrico del vértice de la parábola con respecto al foco.' Otro aspecto útil de este ejemplo es que fomenta la utilización, en una cierta disciplina, del conocimiento adquirido en alguna otra parte.

La actividad heurística de la geometría se deriva también de las oportunidades que ofrece para representar en símbolos concisos y altamente significativos nociones que, escritas en otra forma, podrían arrastrar tras de sí considerable 'ruido de fondo'. De ahí la efectividad de los cálculos vectoriales, con los cuales uno evita la continua referencia a las coordenadas cartesianas de los valores considerados. Y es por esta razón que la interpretación de los resultados intermedios es mucho más fácil en geometría.

He aquí, por ejemplo, una muy evocativa demostración de que en cualquier triángulo ABC las tres alturas son concurrentes. Lo primero por hacer es establecer la ecuación de la altura tomada desde el vértice A, lo cual puede hacerse sin dificultad utilizando coordenadas cartesianas (una vez que se hayan señalado coordenadas para los tres vértices). Pero los cálculos son más evocadores si uno observa que el conjunto X de puntos del plano euclidiano que satisfacen la ecuación.

$$XB^2 - XC^2 = AB^2 - AC^2$$

es (como consecuencia inmediata del teorema de Pitágoras) la perpendicular a BC trazada desde A. Ahora, si D es el punto de intersección de las alturas trazadas desde A y B, tal punto debe satisfacer las ecuaciones .

$$DB^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2$$

$$DC^2 - DA^2 = BC^2 - BA^2.$$

de las cuales se deduce, sumándolas, que

$$DB^2 - DA^2 = BC^2 - AC^2,$$

lo cual expresa el hecho de que D se encuentra sobre la tercera altura. Las anteriores ecuaciones también demuestran que

$$AB^2 + DC^2 = BC^2 + DA^2 = CA^2 + DB^2 .$$

Para ilustrar el triste declinar del pensamiento geométrico voy a mencionar el ejemplo de los exámenes que tuve que calificar como miembro del panel de jueces de la olimpíada de Matemáticas de 1973 en Moscú (Greitzer, 1978).La solución del problema 4 exigía la determinación del punto I sobre el arco cuyo centro es B, tal que AI + IC sea mínimo, dado que ABC es un triángulo equilátero (ver Figura 3). Uno esperaba que aquellos brillantes concursantes se manisfetaran a través de argumentos elementales y simples, basados en las leyes ópticas de la reflexión simétrica, ó en la desigualdad triangular, ó en la intersección de las elipses con focos A y C, con el arco de centro en B.

Sin embargo, la mayoría de los concursantes se embarcó en la búsqueda de un mínimo para una función tal como

$$f(t) = \sqrt{(\text{sen } t - a)^2 + (\cos t - b)^2} + \sqrt{(\text{sen } t - a)^2 + (\cos t + b)^2},$$

dándole mucho énfasis a las derivadas.

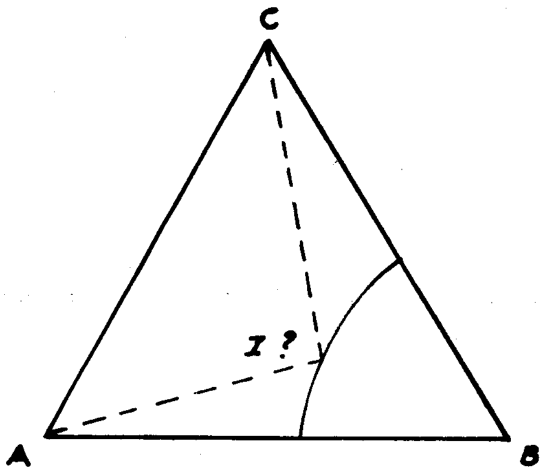

Figura 3

Y uno se pregunta entonces '¿será que nuestros más brillantes etudiantes han llegado a ser tan estúpidos como los computadores?'

Permítanme dar otro ejemplo: enfrentados a un problema de geometría elemental en la Olimpíada de 1983 (París), los concursantes vietnamitas dieron soluciones simples, de a lo más cinco renglones. En contraste, otras respuestas (particularmente las de los concursantes de la URSS y de Francia) consistieron de hasta 10 páginas de cálculos ¡y casi ninguna llegó a la solución correcta!

No hay razón para dejarse deslumbrar por tales perfomances. El trabajo de alumnos que saben para dónde van y por qué han alcanzado sus metas, es muy superior.

EL ARTE DE LAS TRANSFORMACIONES

La actividad creativa de los humanos no genera algo de la nada: sólo transforma lo que previamente existe. Algunas veces transfiere, corta, muele, aplasta, recompone o ensambla; en otros casos expone los objetos a agentes naturales (calor, luz, agentes químicos o biológicos, fenómenos sociales, etc.). El punto es que la educación en la habilidad para llevar a cabo transformaciones prepara el camino para tareas que luego serán desarrolladas a lo largo de la vida de cada uno. Pero la crisis a la cual se ha hecho mención en este escrito está alterando la escala de las necesidades en educación. Antes una persona realizaba la misma transformación día tras día, en su mismo puesto de trabajo, y no necesitaba tener una visión general del fenómeno. Hoy hemos entrado en la era de la variedad de transformaciones.

Muchas transformaciones tienen dimensiones multidisciplinarias. Así la traducción, que es una transformación de texto, algunas veces aparece como una actividad exclusivamente literaria. Sin embargo, le concierne al matemático cuando conlleva la formulación de algo en términos de una ecuación ó de la escritura de un programa de computador. Pero desde mediados del sigo XIX la geometría ha llegado a ser la ciencia por excelencia de las transformaciones. En ella se estudian las modificaciones de los objetos geométricos, ó las representaciones de ellas, con sus respectivos invariantes. En el pedestal de la geometría de las transformaciones permanece el famoso 'Programa de Erlangen' que Félix Klein propuso en 1872 en su discurso inaugural.

Desde principios del siglo XX, bajo la influencia de Emile Borel[4] y Jacques Hadamard,[5] la enseñanza de la geometría se empezó a organizar alrededor de varios grupos de transformaciones, permaneciendo largo tiempo como uno de los puntos fuertes de la enseñanza de la Matemática en Francia, hasta que el infortunado retroceso empezó en los años 1960 y siguientes. En contraste, la tendencia está llegando a los primeros puestos en el Reino Unido y la URSS. El aspecto más fundamental concierne a la misma actividad de transformación. Desde la escuela primaria en adelante puede trabajarse en simetrías (por ejemplo plegando papel)y los diagramas pueden agrandarse utilizando el pantógrafo (Brousseau, 1981). En tales formas prácticas al alumno puede enseñársele a trasladar, desplazar, agrandar y aun a realizar varias transformaciones afines.

Por ejemplo, en la Figura 4 se muestra una simetría oblicua dibujada sobre papel debidamente "triangulado"- El libro (IREM, Strasbourg, 1976) da la figura de Sancho Panza y el estudiante debe obtener la de Don Quijote.

En las clases de arte con alumnos de 11 ó más años es muy instructiva la práctica de perspectivas

Muchas figuras geométricas pueden definirse en términos transformacionales.Por ejemplo, un triángulo isósceles es aquel que posee un eje de simetría. Un paralelogramo es una figura con un centro de simetría. Y, en ambos casos, todas las propiedades usuales que suelen demostrarse de manera artificiosa se obtienen simultáneamente. Las propiedades afines de una elipse se obtienen por proyección sobre las bases de aquellas de una circunferencia, y pueden ser investigadas por estudiantes de 14 a 16 años, independientemente de cualquier conocimiento formalmente adquirido.

---

[4] (1871-1955) Matemático y político francés, famoso por sus trabajos sobre cálculo infinitesimal y de probabilidades. N. del T.

[5] (1865-1963) Matemático francés autor de notables obras sobre la teoría de los números y las distintas ramas del análisis. N. del T.

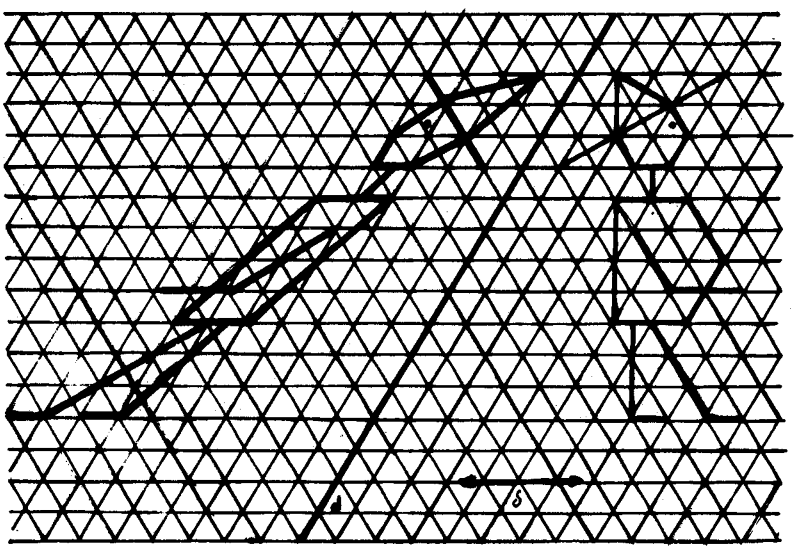

Figura 4

Muchas propiedades geométricas se obtienen fácilmente mediante la transformación de una figura general en una figura canónica: mediante una perspectiva puede transformarse un cuadrilátero completo [6] en un cuadrado, una sección cónica en una circunferencia, y son muchos más los ejemplos que pueden citarse. Finalmente, existe otro nivel muy efectivo de reflexión geométrica que conlleva razonamiento más sobre la forma de una transformación que sobre las figuras transformadas. La tradición que cultivó este enfoque -y que floreció en Francia entre 1930 y 1950- parece haber caído en un eclipse substancial.

Ejemplo

En la Olimpíada de 1975 en Bulgaria, se planteó el siguiente problema (Greitzer, 1978):

En el plano de un triángulo ABC y exterior a éste se construyen los triángulos BCP, CAQ y ABR en forma tal que

[6] Figura geométrica conformada por cuatro rectas en un plano, llamadas lados, que se intersectan por pares en seis puntos distintos llamados vértices. N. del T.

$$P\hat{B}C = C\hat{A}Q = 45^\circ$$

$$B\hat{C}P = Q\hat{C}A = 30^\circ$$

$$A\hat{B}R = R\hat{A}B = 15^\circ$$

Demostrar que $Q\hat{R}P = 90^\circ$ y que $RQ = RP$.

Estos resultados son consecuencia inmediata de una rotación de 90°, para lo cual basta observar que hay dos triángulos implícitos en los datos, uno de los cuales es la imagen del otro bajo tal rotación. En el evento, el concursante húngaro describió esta solución que ni siquiera había sido pensada por quienes redactaron las preguntas. Y los jueces se asombraron de que nadie más hubiera utilizado este enfoque, considerado muy elegante aunque poco usual.

CONCLUSION

Como hemos visto, la geometría elemental encierra una gran cantidad de virtudes educacionales. La ciencia de la geometría asume su plena importancia solo cuando se le considera como una herramienta educacional. Naturalmente, un alumno bien formado dentro de esta disciplina adquirirá, además, una gran cantidad de conocimiento culturalmente valioso. Pero el efecto deseado se perderá irremediablemente si lo único que importa es tal conocimiento y si no se le presta la debida atención a las actividades matemáticas que desarrollan la habilidad de pensar por sí mismo.

BIBLIOGRAFIA

BROUSSEAU, Guy. 1981. Problèmes de didactique des décimaux. Recherches en didactique des mathematiques, Vol. 2, No.1, pp. 37-127. Grenoble, Editions de la Pensée sauvage.

DIEUDIONNE, Jean. 1964. Algèbre linéaire et géometrie élémentaire. Paris, Hermann.

GLAESER, Georges. 1976. La didactique de l'analyse. Bulletin de l'APMEP (Paris Association des Professeurs de mathématiques de l'enseignement public), No. 302, February.

GREITZER, Samuel, 1978, International Mathematical Olympiads 1959-1977. Washington D.C. Mathematical Association of America (New Mathematical Library.)

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES (IREM), Strasburg, 1974. Le Livre du problème. Fascicule 4: La convexité. Paris, CEDIC. 1976.Mathematique- Classe de 3e. Paris, Istra.

KAPITZA, P.L. 1971. The General Principles of the Education of Present-day Youth and General Methods on Secondary Scholl Physics Teaching. In: S.C. Brown, F.J. Kedves and E.J. Wenham (eds.). Teaching Physics -An insoluble Task? ; Proceedings of the International Congress on the Education of Teacher of Physics in Secondary Schools, Eger (Hungary), 1970, pp. 1-10. Cambrigde (Mass)/London, The MIT Press.

WITTENBERG, A. et al. 1963. Redécouvrir les mathématiques. Neuchâtel, Delachaux & Niestlé.