

EL TRIÁNGULO DE PASCAL Y SUS APLICACIONES

Joaquín Luna Torres

DIPLOMADO EN ALGEBRA LINEAL
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

junio de 2018

► EL TRIÁNGULO DE PASCAL

- ▶ EL TRIÁNGULO DE PASCAL
- ▶ FORMA COMBINATORIA DEL TRIÁNGULO DE PASCAL

- ▶ EL TRIÁNGULO DE PASCAL
- ▶ FORMA COMBINATORIA DEL TRIÁNGULO DE PASCAL
- ▶ OTRAS PRESENTACIONES DEL TRIÁNGULO DE PASCAL

- ▶ EL TRIÁNGULO DE PASCAL
- ▶ FORMA COMBINATORIA DEL TRIÁNGULO DE PASCAL
- ▶ OTRAS PRESENTACIONES DEL TRIÁNGULO DE PASCAL
- ▶ MATRICES DE PASCAL

- ▶ EL TRIÁNGULO DE PASCAL
- ▶ FORMA COMBINATORIA DEL TRIÁNGULO DE PASCAL
- ▶ OTRAS PRESENTACIONES DEL TRIÁNGULO DE PASCAL
- ▶ MATRICES DE PASCAL
- ▶ PIRÁMIDES DE PASCAL

- ▶ EL TRIÁNGULO DE PASCAL
- ▶ FORMA COMBINATORIA DEL TRIÁNGULO DE PASCAL
- ▶ OTRAS PRESENTACIONES DEL TRIÁNGULO DE PASCAL
- ▶ MATRICES DE PASCAL
- ▶ PIRÁMIDES DE PASCAL
- ▶ EL TRIÁNGULO DE PASCAL Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

- ▶ EL TRIÁNGULO DE PASCAL
- ▶ FORMA COMBINATORIA DEL TRIÁNGULO DE PASCAL
- ▶ OTRAS PRESENTACIONES DEL TRIÁNGULO DE PASCAL
- ▶ MATRICES DE PASCAL
- ▶ PIRÁMIDES DE PASCAL
- ▶ EL TRIÁNGULO DE PASCAL Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
- ▶ INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA CERCANAS AL TRIÁNGULO DE PASCAL

Parte I

EL TRIÁNGULO DE PASCAL

1

Presentación usual

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

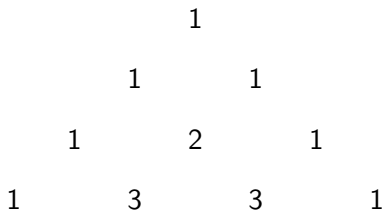
Joaquín Luna
Torres

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \end{array}$$

Presentación usual

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array}$$

Presentación usual



Presentación usual

			1			
		1		1		
	1		2		1	
	1		3		3	
	1		3		3	
1		4		6		4
	1		6		4	
	1		4		1	
	1		2		1	
	1		1		1	
	1		1		1	

Presentación usual

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
	1	4		6		4	1	
1	5	10		10		5	1	

Presentación usual

				1					
			1		1				
		1		2		1			
	1		3		3		1		
	1	4		6		4		1	
1	5		10		10		5		1
			⋮						

Es natural que nos preguntemos:

¿De dónde salen los números que forman el triángulo de Pascal?,

Es natural que nos preguntemos:

¿De dónde salen los números que forman el triángulo de Pascal?,

¿Cómo podemos utilizar el triángulo de Pascal para estudiar otras áreas de las matemáticas?

Es natural que nos preguntemos:

¿De dónde salen los números que forman el triángulo de Pascal?,

¿Cómo podemos utilizar el triángulo de Pascal para estudiar otras áreas de las matemáticas?

En esta charla nos proponemos analizar algunas respuestas a estos interrogantes.

Para empezar, vamos a llenar 5 casillas con dos símbolos distintos digamos **a** y **b**:

Para empezar, vamos a llenar 5 casillas con dos símbolos distintos digamos **a** y **b**:

--	--	--	--	--

Para empezar, vamos a llenar 5 casillas con dos símbolos distintos digamos **a** y **b**:

--	--	--	--	--

Las posibilidades (sin tener en cuenta el orden en que aparecen) son:

Para empezar, vamos a llenar 5 casillas con dos símbolos distintos digamos **a** y **b**:

--	--	--	--	--

Las posibilidades (sin tener en cuenta el orden en que aparecen) son:

1.

a	a	a	a	a
---	---	---	---	---
2.

a	a	a	a	b
---	---	---	---	---

Para empezar, vamos a llenar 5 casillas con dos símbolos distintos digamos **a** y **b**:

--	--	--	--	--

Las posibilidades (sin tener en cuenta el orden en que aparecen) son:

1.

a	a	a	a	a
---	---	---	---	---
2.

a	a	a	a	b
---	---	---	---	---
3.

a	a	a	b	b
---	---	---	---	---

¿De cuantas maneras se puede hacer cada elección?

¿De cuantas maneras se puede hacer cada elección?
En el primer caso hay que elegir cinco **a**-es y esto se puede hacer de una sola manera.

¿De cuantas maneras se puede hacer cada elección?

En el primer caso hay que elegir cinco **a**-es y esto se puede hacer de una sola manera.

En el segundo caso hay que elegir cuatro **a**-es y una **b**: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es, para la segunda de cuatro, para la tercera de tres y para la cuarta de dos; entonces hay $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ maneras de hacerlo; pero como no interesa el orden y cuatro elementos se ordenan de $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4! = 24$ maneras, el resultado final es

¿De cuantas maneras se puede hacer cada elección?

En el primer caso hay que elegir cinco **a**-es y esto se puede hacer de una sola manera.

En el segundo caso hay que elegir cuatro **a**-es y una **b**: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es, para la segunda de cuatro, para la tercera de tres y para la cuarta de dos; entonces hay $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ maneras de hacerlo; pero como no interesa el orden y cuatro elementos se ordenan de $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4! = 24$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

¿De cuantas maneras se puede hacer cada elección?

En el primer caso hay que elegir cinco **a**-es y esto se puede hacer de una sola manera.

En el segundo caso hay que elegir cuatro **a**-es y una **b**: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es, para la segunda de cuatro, para la tercera de tres y para la cuarta de dos; entonces hay $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ maneras de hacerlo; pero como no interesa el orden y cuatro elementos se ordenan de $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4! = 24$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times \textcolor{red}{1}}{(1 \times 2 \times 3 \times 4) \times (\textcolor{red}{1})}$$

¿De cuantas maneras se puede hacer cada elección?

En el primer caso hay que elegir cinco **a**-es y esto se puede hacer de una sola manera.

En el segundo caso hay que elegir cuatro **a**-es y una **b**: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es, para la segunda de cuatro, para la tercera de tres y para la cuarta de dos; entonces hay $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ maneras de hacerlo; pero como no interesa el orden y cuatro elementos se ordenan de $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4! = 24$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times \textcolor{red}{1}}{(1 \times 2 \times 3 \times 4) \times (\textcolor{red}{1})} = \frac{5!}{4!1!} = 5$$

¿De cuantas maneras se puede hacer cada elección?

En el primer caso hay que elegir cinco **a**-es y esto se puede hacer de una sola manera.

En el segundo caso hay que elegir cuatro **a**-es y una **b**: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es, para la segunda de cuatro, para la tercera de tres y para la cuarta de dos; entonces hay $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ maneras de hacerlo; pero como no interesa el orden y cuatro elementos se ordenan de $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4! = 24$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times \textcolor{red}{1}}{(1 \times 2 \times 3 \times 4) \times (\textcolor{red}{1})} = \frac{5!}{4!1!} = 5 = \binom{5}{4}_{(1)}$$

En el tercer caso se eligen tres **a**-es: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es, para la segunda de cuatro y para la tercera de tres; entonces hay $5 \times 4 \times 3 = 60$ maneras de hacerlo; como no interesa el orden y tres elementos se ordenan de $1 \times 2 \times 3 = 3! = 6$ maneras, el resultado final es

En el tercer caso se eligen tres **a**-es: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es, para la segunda de cuatro y para la tercera de tres; entonces hay $5 \times 4 \times 3 = 60$ maneras de hacerlo; como no interesa el orden y tres elementos se ordenan de $1 \times 2 \times 3 = 3! = 6$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3}$$

En el tercer caso se eligen tres **a**-es: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es, para la segunda de cuatro y para la tercera de tres; entonces hay $5 \times 4 \times 3 = 60$ maneras de hacerlo; como no interesa el orden y tres elementos se ordenan de $1 \times 2 \times 3 = 3! = 6$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1}}{(1 \times 2 \times 3) \times (\textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1})}$$

En el tercer caso se eligen tres **a**-es: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es, para la segunda de cuatro y para la tercera de tres; entonces hay $5 \times 4 \times 3 = 60$ maneras de hacerlo; como no interesa el orden y tres elementos se ordenan de $1 \times 2 \times 3 = 3! = 6$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1}}{(1 \times 2 \times 3) \times (\textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1})} = \frac{5!}{3! 2!} = 10$$

En el tercer caso se eligen tres **a**-es: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es, para la segunda de cuatro y para la tercera de tres; entonces hay $5 \times 4 \times 3 = 60$ maneras de hacerlo; como no interesa el orden y tres elementos se ordenan de $1 \times 2 \times 3 = 3! = 6$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1}}{(1 \times 2 \times 3) \times (\textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1})} = \frac{5!}{3! 2!} = 10 = \binom{5}{3}_{(2)}$$

En el cuarto, se eligen dos **a**-es: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es y para la segunda de cuatro; entonces hay $5 \times 4 = 20$ maneras de hacerlo; de nuevo, no interesa el orden y dos elementos se ordenan de $1 \times 2 = 2! = 2$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4}{1 \times 2}$$

En el cuarto, se eligen dos **a**-es: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es y para la segunda de cuatro; entonces hay $5 \times 4 = 20$ maneras de hacerlo; de nuevo, no interesa el orden y dos elementos se ordenan de $1 \times 2 = 2! = 2$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4}{1 \times 2} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(1 \times 2) \times (3 \times 2 \times 1)}$$

En el cuarto, se eligen dos **a**-es: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es y para la segunda de cuatro; entonces hay $5 \times 4 = 20$ maneras de hacerlo; de nuevo, no interesa el orden y dos elementos se ordenan de $1 \times 2 = 2! = 2$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4}{1 \times 2} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(1 \times 2) \times (3 \times 2 \times 1)} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{120}{12} = 10$$

En el cuarto, se eligen dos **a**-es: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es y para la segunda de cuatro; entonces hay $5 \times 4 = 20$ maneras de hacerlo; de nuevo, no interesa el orden y dos elementos se ordenan de $1 \times 2 = 2! = 2$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4}{1 \times 2} = \frac{5 \times 4 \times \textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1}}{(1 \times 2) \times (\textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1})} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{120}{12} = 10 = \binom{5}{2}_{(3)}$$

En el cuarto, se eligen dos **a**-es: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es y para la segunda de cuatro; entonces hay $5 \times 4 = 20$ maneras de hacerlo; de nuevo, no interesa el orden y dos elementos se ordenan de $1 \times 2 = 2! = 2$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4}{1 \times 2} = \frac{5 \times 4 \times \textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1}}{(1 \times 2) \times (\textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1})} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{120}{12} = 10 = \binom{5}{2}_{(3)}$$

En el quinto, se elige una **a**: entonces hay 5 maneras de hacerlo; el resultado final es

En el cuarto, se eligen dos **a**-es: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es y para la segunda de cuatro; entonces hay $5 \times 4 = 20$ maneras de hacerlo; de nuevo, no interesa el orden y dos elementos se ordenan de $1 \times 2 = 2! = 2$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4}{1 \times 2} = \frac{5 \times 4 \times \textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1}}{(1 \times 2) \times (\textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1})} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{120}{12} = 10 = \binom{5}{2}_{(3)}$$

En el quinto, se elige una **a**: entonces hay 5 maneras de hacerlo; el resultado final es

$$\frac{5}{1}$$

En el cuarto, se eligen dos **a**-es: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es y para la segunda de cuatro; entonces hay $5 \times 4 = 20$ maneras de hacerlo; de nuevo, no interesa el orden y dos elementos se ordenan de $1 \times 2 = 2! = 2$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4}{1 \times 2} = \frac{5 \times 4 \times \textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1}}{(1 \times 2) \times (\textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1})} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{120}{12} = 10 = \binom{5}{2}_{(3)}$$

En el quinto, se elige una **a**: entonces hay 5 maneras de hacerlo; el resultado final es

$$\frac{5}{1} = \frac{5 \times \textcolor{red}{4} \times \textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1}}{(1) \times (\textcolor{red}{4} \times \textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1})}$$

En el cuarto, se eligen dos **a**-es: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es y para la segunda de cuatro; entonces hay $5 \times 4 = 20$ maneras de hacerlo; de nuevo, no interesa el orden y dos elementos se ordenan de $1 \times 2 = 2! = 2$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4}{1 \times 2} = \frac{5 \times 4 \times \textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1}}{(1 \times 2) \times (\textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1})} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{120}{12} = 10 = \binom{5}{2}_{(3)}$$

En el quinto, se elige una **a**: entonces hay 5 maneras de hacerlo; el resultado final es

$$\frac{5}{1} = \frac{5 \times \textcolor{red}{4} \times \textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1}}{(1) \times (\textcolor{red}{4} \times \textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1})} = \frac{5!}{1! 4!} = \frac{120}{24} = 5$$

En el cuarto, se eligen dos **a**-es: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es y para la segunda de cuatro; entonces hay $5 \times 4 = 20$ maneras de hacerlo; de nuevo, no interesa el orden y dos elementos se ordenan de $1 \times 2 = 2! = 2$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4}{1 \times 2} = \frac{5 \times 4 \times \textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1}}{(1 \times 2) \times (\textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1})} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{120}{12} = 10 = \binom{5}{2} \quad (3)$$

En el quinto, se elige una **a**: entonces hay 5 maneras de hacerlo; el resultado final es

$$\frac{5}{1} = \frac{5 \times \textcolor{red}{4} \times \textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1}}{(1) \times (\textcolor{red}{4} \times \textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1})} = \frac{5!}{1! 4!} = \frac{120}{24} = 5 = \binom{5}{1} \quad (4)$$

En el cuarto, se eligen dos **a**-es: para la primera casilla disponemos de cinco **a**-es y para la segunda de cuatro; entonces hay $5 \times 4 = 20$ maneras de hacerlo; de nuevo, no interesa el orden y dos elementos se ordenan de $1 \times 2 = 2! = 2$ maneras, el resultado final es

$$\frac{5 \times 4}{1 \times 2} = \frac{5 \times 4 \times \textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1}}{(1 \times 2) \times (\textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1})} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{120}{12} = 10 = \binom{5}{2}_{(3)}$$

En el quinto, se elige una **a**: entonces hay 5 maneras de hacerlo; el resultado final es

$$\frac{5}{1} = \frac{5 \times \textcolor{red}{4} \times \textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1}}{(1) \times (\textcolor{red}{4} \times \textcolor{red}{3} \times \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{1})} = \frac{5!}{1! 4!} = \frac{120}{24} = 5 = \binom{5}{1} \quad (4)$$

Finalmente, hay una sola manera de no elegir **a**-es, lo que equivale a escoger cinco **b**-es.

Los resultados anteriores se resumen diciendo que

Los resultados anteriores se resumen diciendo que

$$(a+b)^5 = 1 a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + 1 b^5 \quad (5)$$

Los resultados anteriores se resumen diciendo que

$$(a+b)^5 = 1 a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + 1 b^5 \quad (5)$$

o, equivalentemente

$$(a+b)^5 = \binom{5}{5} a^5 + \binom{5}{4} a^4 b + \binom{5}{3} a^3 b^2 + \binom{5}{2} a^2 b^3 + \binom{5}{1} a b^4 + \binom{5}{0} b^5 \quad (6)$$

Los resultados anteriores se resumen diciendo que

$$(a+b)^5 = 1 a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + 1 b^5 \quad (5)$$

o, equivalentemente

$$(a+b)^5 = \binom{5}{5} a^5 + \binom{5}{4} a^4 b + \binom{5}{3} a^3 b^2 + \binom{5}{2} a^2 b^3 + \binom{5}{1} a b^4 + \binom{5}{0} b^5 \quad (6)$$

Estos coeficientes constituyen la sexta fila del triángulo de Pascal

Los resultados anteriores se resumen diciendo que

$$(a+b)^5 = 1 a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + 1 b^5 \quad (5)$$

o, equivalentemente

$$(a+b)^5 = \binom{5}{5} a^5 + \binom{5}{4} a^4 b + \binom{5}{3} a^3 b^2 + \binom{5}{2} a^2 b^3 + \binom{5}{1} a b^4 + \binom{5}{0} b^5 \quad (6)$$

Estos coeficientes constituyen la sexta fila del triángulo de Pascal

Entonces el triángulo de Pascal se puede reescribir así:

Presentación combinatoria

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

$$\binom{0}{0}$$

Presentación combinatoria

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \end{array}$$

Presentación combinatoria

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

$$\begin{array}{ccccc} & & \binom{0}{0} & & \\ & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \end{array}$$

Presentación combinatoria

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

Presentación combinatoria

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \end{array}$$

Presentación combinatoria

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \end{array}$$

Presentación combinatoria

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\ & & & \vdots & & & & & & & \end{array}$$

Propiedades de las combinatorias

Observando las presentaciones del triángulo de Pascal se puede deducir que:

Observando las presentaciones del triángulo de Pascal se puede deducir que:

$$\blacktriangleright \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

Observando las presentaciones del triángulo de Pascal se puede deducir que:

- ▶ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}.$
- ▶ La simetría del último triángulo implica que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$

Observando las presentaciones del triángulo de Pascal se puede deducir que:

- ▶ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}.$
- ▶ La simetría del último triángulo implica que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$
- ▶ La relación entre la suma de dos elementos consecutivos en la misma fila con el elemento debajo de ellos en la fila siguiente permite afirmar que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$

Usando esta forma, y conmutatividad de la suma, se tiene que

$$(a + b)^3 = \binom{3}{0} b^3 + \binom{3}{1} b^2 a + \binom{3}{2} b a^2 + \binom{3}{3} a^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} a^k b^{3-k}. \quad (7)$$

Usando esta forma, y conmutatividad de la suma, se tiene que

$$(a + b)^3 = \binom{3}{0} b^3 + \binom{3}{1} b^2 a + \binom{3}{2} b a^2 + \binom{3}{3} a^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} a^k b^{3-k}. \quad (7)$$

En forma general

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Parte II

Matrices de Pascal

Presentación rectangular

Otras formas alternativas de presentar el triángulo de Pascal son las siguientes:

Presentación rectangular

Otras formas alternativas de presentar el triángulo de Pascal son las siguientes:

1

Presentación rectangular

Otras formas alternativas de presentar el triángulo de Pascal son las siguientes:

1 1

1

Presentación rectangular

Otras formas alternativas de presentar el triángulo de Pascal son las siguientes:

1 1 1

1 2

1

Presentación rectangular

Otras formas alternativas de presentar el triángulo de Pascal son las siguientes:

1 1 1 1

1 2 3

1 3

1

Presentación rectangular

Otras formas alternativas de presentar el triángulo de Pascal son las siguientes:

1 1 1 1 1

1 2 3 4

1 3 6

1 4

1

Presentación rectangular

Otras formas alternativas de presentar el triángulo de Pascal son las siguientes:

1 1 1 1 1 1

1 2 3 4 5

1 3 6 10

1 4 10

1 5

1

Presentación rectangular

Otras formas alternativas de presentar el triángulo de Pascal son las siguientes:

1 1 1 1 1 1

1 2 3 4 5

1 3 6 10

1 4 10 ...

1 5

1

Presentación rectangular

Otras formas alternativas de presentar el triángulo de Pascal son las siguientes:

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	
1	3	6	10		
1	4	10		...	
1	5				
1					

Presentación triangular inferior

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

1

Presentación triangular inferior

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

1

1 1

Presentación triangular inferior

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

1

1 1

1 2 1

Presentación triangular inferior

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

1			
1	1		
1	2	1	
1	3	3	1

Presentación triangular inferior

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	

Presentación triangular inferior

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	

Presentación triangular inferior

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
⋮						

Presentación triangular inferior

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
⋮						

Presentación triangular superior

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

1

Presentación triangular superior

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ & 1 \end{array}$$

Presentación triangular superior

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

1	1	1
	1	2
		1

Presentación triangular superior

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

1	1	1	1
	1	2	3
		1	3
			1

Presentación triangular superior

1	1	1	1	1
	1	2	3	4
		1	3	6
			1	4
				1

Presentación triangular superior

1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5
		1	3	6	10
			1	4	10
				1	5
					1

Presentación triangular superior

1	1	1	1	1	1	
	1	2	3	4	5	
		1	3	6	10	
			1	4	10	...
				1	5	
					1	

Presentación triangular superior

1	1	1	1	1	1	
	1	2	3	4	5	
		1	3	6	10	
			1	4	10	...
				1	5	
					1	

Presentación triangular superior

1	1	1	1	1	1	
	1	2	3	4	5	
		1	3	6	10	
			1	4	10	...
				1	5	
					1	

¿Para qué los cortes en estos triángulos?

Pongamos los cortes de los triángulos anteriores dentro de matrices apropiadas de orden $n \times n$.

Pongamos los cortes de los triángulos anteriores dentro de matrices apropiadas de orden $n \times n$. Para $n = 4$ tenemos

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

Pongamos los cortes de los triángulos anteriores dentro de matrices apropiadas de orden $n \times n$. Para $n = 4$ tenemos

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pongamos los cortes de los triángulos anteriores dentro de matrices apropiadas de orden $n \times n$. Para $n = 4$ tenemos

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_n = L_n \cdot U_n$$

Luego

$$\det(S_n) = \det(L_n) \cdot \det(U_n) = 1$$

Luego

$$\det(S_n) = \det(L_n) \cdot \det(U_n) = 1$$

En consecuencia, tanto las matrices como el triángulo de Pascal tienen inversos:

$$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad L_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\det(S_n) = \det(L_n) \cdot \det(U_n) = 1$$

En consecuencia, tanto las matrices como el triángulo de Pascal tienen inversos:

$$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad L_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Triángulo inverso de Pascal

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & -1 & & 1 & & \\ & 1 & & -2 & & 1 & \\ -1 & & 3 & & -3 & & 1 \\ 1 & -4 & & 6 & -4 & & 1 \\ -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & & 1 \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

Parte III

Exponenciales y ecuaciones diferenciales

Matriz de creación

Iniciamos con lo que en mecánica cuántica llaman matriz de creación o generación

Matriz de creación

Iniciamos con lo que en mecánica cuántica llaman matriz de creación o generación

$$H_n = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & n-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de creación

Iniciamos con lo que en mecánica cuántica llaman matriz de creación o generación

$$H_n = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & n-1 & 0 \end{pmatrix}$$

en la que las casillas en blanco corresponden a ceros.

Matriz de creación

Iniciamos con lo que en mecánica cuántica llaman matriz de creación o generación

$$H_n = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & 2 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & n-1 & 0 \end{pmatrix}$$

en la que las casillas en blanco corresponden a ceros.

¡Los números enteros positivos están ubicados en la subdiagonal principal!.

Potencias de H_n

Iniciemos con H_4 :

Potencias de H_n

Iniciemos con H_4 :

$$H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Potencias de H_n

Iniciemos con H_4 :

$$H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Las potencias de H_4 son:

Potencias de H_n

Iniciemos con H_4 :

$$H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Las potencias de H_4 son:

$$H_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Potencias de H_n

Iniciemos con H_4 :

$$H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Las potencias de H_4 son:

$$H_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{3!} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{3!} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_4^k = 0 \text{ para } k > 3$$

$$H_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{3!} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_4^k = 0 \text{ para } k > 3$$

Luego

$$\sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} H_4^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{(4 \times 4)} = L_4$$

$$H_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{3!} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_4^k = 0 \text{ para } k > 3$$

Luego

$$\sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} H_4^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{(4 \times 4)} = L_4$$

Potencias de H_n

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

En general

Potencias de H_n

En general

$$H_n^{(n-1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}$$

En general

$$H_n^{(n-1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}$$

$$H_n^n = 0$$

Luego

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} H_n^k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & & \ddots & & \end{pmatrix}_{(n \times n)} = L_n$$

Logaritmo natural del triángulo de Pascal

Recuerde que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Logaritmo natural del triángulo de Pascal

Recuerde que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Esta expresión para una matriz cuadrada A de orden $n \times n$ es

Recuerde que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Esta expresión para una matriz cuadrada A de orden $n \times n$ es

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$$

Logaritmo natural del triángulo de Pascal

Recuerde que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Esta expresión para una matriz cuadrada A de orden $n \times n$ es

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}H^k = L_{\infty} = e^H.$$

Logaritmo natural del triángulo de Pascal

Recuerde que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Esta expresión para una matriz cuadrada A de orden $n \times n$ es

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}H^k = L_{\infty} = e^H. \text{ Por lo tanto } H = \ln L_{\infty}.$$

Ecuación diferencial de Pascal

Consideremos ahora la ecuación diferencial con condiciones iniciales en $\mathbb{R}^n$.

Consideremos ahora la ecuación diferencial con condiciones iniciales en $\mathbb{R}^n$.

$$\frac{d}{dt}y(t) = Hy(t), \quad y(0) = y_0, \quad -\infty < t < \infty$$

Consideremos ahora la ecuación diferencial con condiciones iniciales en $\mathbb{R}^n$.

$$\frac{d}{dt}y(t) = Hy(t), \quad y(0) = y_0, \quad -\infty < t < \infty$$

Su única solución es $y(t) = e^{Ht}y_0$,

Consideremos ahora la ecuación diferencial con condiciones iniciales en $\mathbb{R}^n$.

$$\frac{d}{dt}y(t) = Hy(t), \quad y(0) = y_0, \quad -\infty < t < \infty$$

Su única solución es $y(t) = e^{Ht}y_0$, donde la matriz exponencial $L(t) = e^{Ht}$ está determinada por

$$L(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H^k.$$

Como

$$H_n^{(m)} = 0 \quad \text{para todo } m > n$$

la solución del problema de valores iniciales es

Como

$$H_n^{(m)} = 0 \quad \text{para todo } m > n$$

la solución del problema de valores iniciales es

$$L(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} H^k.$$

Como

$$H_n^{(m)} = 0 \quad \text{para todo } m > n$$

la solución del problema de valores iniciales es

$$L(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} H^k.$$

Es fácil deducir que

► $L(0) = I_n.$

Como

$$H_n^{(m)} = 0 \quad \text{para todo } m > n$$

la solución del problema de valores iniciales es

$$L(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} H^k.$$

Es fácil deducir que

- ▶ $L(0) = I_n$.
- ▶ $L(1) = L_n$, ¡el n -ésimo triángulo inferior de Pascal!.

Como

$$H_n^{(m)} = 0 \quad \text{para todo } m > n$$

la solución del problema de valores iniciales es

$$L(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} H^k.$$

Es fácil deducir que

- ▶ $L(0) = I_n$.
- ▶ $L(1) = L_n$, ¡el n -ésimo triángulo inferior de Pascal!
- ▶ $L(s+t) = L(s)L(t)$.

Como

$$H_n^{(m)} = 0 \quad \text{para todo } m > n$$

la solución del problema de valores iniciales es

$$L(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} H^k.$$

Es fácil deducir que

- ▶ $L(0) = I_n$.
- ▶ $L(1) = L_n$, ¡el n -ésimo triángulo inferior de Pascal!
- ▶ $L(s+t) = L(s)L(t)$.
- ▶ $L_1^k = L(k)$.

Como

$$H_n^{(m)} = 0 \quad \text{para todo } m > n$$

la solución del problema de valores iniciales es

$$L(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} H^k.$$

Es fácil deducir que

- ▶ $L(0) = I_n$.
- ▶ $L(1) = L_n$, ¡el n -ésimo triángulo inferior de Pascal!.
- ▶ $L(s+t) = L(s)L(t)$.
- ▶ $L_1^k = L(k)$.
- ▶ $L(j/k)^k = L_1^j$.

Triangulos generalizados de Pascal

Observe que, para $n = 4$,

$$L_4(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \end{pmatrix}$$

Triangulos generalizados de Pascal

Observe que, para $n = 4$,

$$L_4(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente

$$L_4\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Triangulos generalizados de Pascal

Observe que, para $n = 4$,

$$L_4(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente

$$L_4\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

También

$$L_4\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{27} & \frac{3}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Qué significado tiene $L(x)$ cuando x es un número irracional?

Parte IV

Pirámides de Pascal

El plano de Pascal, formado por coeficientes binomiales, se puede generalizar al espacio de Pascal formado por coeficientes trinomiales

El plano de Pascal, formado por coeficientes binomiales, se puede generalizar al espacio de Pascal formado por coeficientes trinomiales

$$\binom{n}{r \ s \ t} = \frac{n!}{r! \ s! \ t!}, \quad \text{donde } r + s + t = n, \quad r, s, t, n \in \mathbb{N},$$

El plano de Pascal, formado por coeficientes binomiales, se puede generalizar al espacio de Pascal formado por coeficientes trinomiales

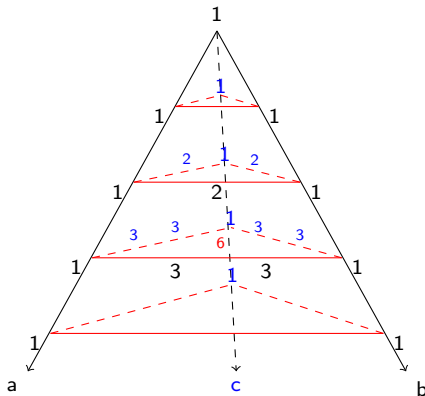
$$\binom{n}{r \ s \ t} = \frac{n!}{r! \ s! \ t!}, \quad \text{donde } r + s + t = n, \quad r, s, t, n \in \mathbb{N},$$

los cuales aparecen en la expansión de $(a + b + c)^n$.

Pirámide de Pascal

EL TRIÁNGULO DE PASCAL Y SUS APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres



El cubo de un trinomio

El tercer nivel de la pirámide corresponde a

El cubo de un trinomio

El tercer nivel de la pirámide corresponde a

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

El cubo de un trinomio

El tercer nivel de la pirámide corresponde a

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

Note que el coeficiente de abc , es decir el 6, es el número que aparece en el interior de la pirámide

Parte V

Relación con la enseñanza de las matemáticas

Relación con la enseñanza de las matemáticas

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

(De M. Falk) Todo niño, niña y joven muestra su originalidad y creatividad por fuera del aula de matemáticas;

Relación con la enseñanza de las matemáticas

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

(De M. Falk) Todo niño, niña y joven muestra su originalidad y creatividad por fuera del aula de matemáticas;

¿cómo debemos establecer nuestras metas y construir la posibilidad de su realización en nuestras escuelas de modo que ellos tengan la oportunidad de mostrar su creatividad también dentro de los confines del salón de clase de matemáticas?

Relación con la enseñanza de las matemáticas

EL TRIÁNGULO
DE PASCAL Y
SUS
APLICACIONES

Joaquín Luna
Torres

(De M. Falk) Todo niño, niña y joven muestra su originalidad y creatividad por fuera del aula de matemáticas;

¿cómo debemos establecer nuestras metas y construir la posibilidad de su realización en nuestras escuelas de modo que ellos tengan la oportunidad de mostrar su creatividad también dentro de los confines del salón de clase de matemáticas?

Nuestra respuesta es darle la oportunidad de desarrollar 'pensamiento a través de un currículo más retador, darle los elementos para pensar problemas que no son copias en carbón de lo ya practicado, abrir las puertas para que él genere sus propias ideas siempre con criterio de autocrítica, respetar sus iniciativas e idear formas productivas de orientar o enderezar su línea de pensamiento cuando sea necesario.

Citamos cuatro razones fundamentales con el fin de que todos los que estamos trabajando en educación matemática demos un impulso renovado a la evolución de esta ciencia.



Citamos cuatro razones fundamentales con el fin de que todos los que estamos trabajando en educación matemática demos un impulso renovado a la evolución de esta ciencia.

1. Las necesidades de una sociedad de conocimiento

Citamos cuatro razones fundamentales con el fin de que todos los que estamos trabajando en educación matemática demos un impulso renovado a la evolución de esta ciencia.

1. Las necesidades de una sociedad de conocimiento

Desde hace ya quizás 16 años estamos en medio de la transición hacia sociedades de conocimiento (knowledge societies). Ello ha dado lugar a dos grandes reuniones internacionales impulsadas por la ONU, en el 2003 y el 2006, que han producido una toma de posición.

Citamos cuatro razones fundamentales con el fin de que todos los que estamos trabajando en educación matemática demos un impulso renovado a la evolución de esta ciencia.

1. Las necesidades de una sociedad de conocimiento

Desde hace ya quizás 16 años estamos en medio de la transición hacia sociedades de conocimiento (knowledge societies). Ello ha dado lugar a dos grandes reuniones internacionales impulsadas por la ONU, en el 2003 y el 2006, que han producido una toma de posición.

“El logro de nuestros propósitos compartidos, en particular para los países en desarrollo y para países cuyas economías estén en transición, para incorporarse plenamente en la Sociedad de la Información, y su integración positiva en la economía del conocimiento, depende en gran medida en la construcción de una capacidad creciente en las áreas de educación, del saber hacer tecnológico y en el acceso a la información, que son los principales factores que determinan el desarrollo y la competitividad.”

Un ejemplo de un intento por construir el soporte educativo para una sociedad de conocimiento es el caso de Singapur.

Un ejemplo de un intento por construir el soporte educativo para una sociedad de conocimiento es el caso de Singapur. Allí el Ministerio de Educación ha pedido a los maestros que enseñen menos para que los estudiantes puedan aprender más.

2- La tecnología y la formación en matemáticas.

Un ejemplo de un intento por construir el soporte educativo para una sociedad de conocimiento es el caso de Singapur. Allí el Ministerio de Educación ha pedido a los maestros que enseñen menos para que los estudiantes puedan aprender más.

2- La tecnología y la formación en matemáticas.

Si miramos la tecnología que concierne directamente la forma en que se enseña y se aprende matemáticas, por ejemplo, el software dinámico en geometría, no estamos usándolo para que el estudiante aprenda más o desarrolle mejor su pensamiento matemático, sino apenas para dibujar mejor las mismas tareas.

Un ejemplo de un intento por construir el soporte educativo para una sociedad de conocimiento es el caso de Singapur. Allí el Ministerio de Educación ha pedido a los maestros que enseñen menos para que los estudiantes puedan aprender más.

2- La tecnología y la formación en matemáticas.

Si miramos la tecnología que concierne directamente la forma en que se enseña y se aprende matemáticas, por ejemplo, el software dinámico en geometría, no estamos usándolo para que el estudiante aprenda más o desarrolle mejor su pensamiento matemático, sino apenas para dibujar mejor las mismas tareas.

Nuestra apreciación tomando en cuenta exposiciones recientes en el CIAEM de Recife o el CCM de Bucaramanga, es que no se está haciendo mucho que se parece a matemáticas y el modelo pedagógico que se emplea es muy parecido al conductismo.

3. La naturaleza de las matemáticas mismas.

3. La naturaleza de las matemáticas mismas.

No sólo se investiga en las fronteras de las matemáticas, sino también es dable e importante la investigación en cada uno de los sistemas matemáticos abiertos.

3. La naturaleza de las matemáticas mismas.

No sólo se investiga en las fronteras de las matemáticas, sino también es dable e importante la investigación en cada uno de los sistemas matemáticos abiertos.

Dentro de este panorama, las matemáticas elementales (como el caso del triángulo de Pascal) son una ciencia viva abierta y fecunda para la investigación; año tras año somos testigos de la creación de problemas nuevos y originales en áreas que incluyen teoría de números, geometría euclidiana, matemática discreta, con diferentes niveles de dificultad y complejidad.

3. La naturaleza de las matemáticas mismas.

No sólo se investiga en las fronteras de las matemáticas, sino también es dable e importante la investigación en cada uno de los sistemas matemáticos abiertos.

Dentro de este panorama, las matemáticas elementales (como el caso del triángulo de Pascal) son una ciencia viva abierta y fecunda para la investigación; año tras año somos testigos de la creación de problemas nuevos y originales en áreas que incluyen teoría de números, geometría euclidiana, matemática discreta, con diferentes niveles de dificultad y complejidad.

En contraste, por lo general las matemáticas escolares intentan aproximarse a una parte paralizada - no muerta sino paralizada - de esas matemáticas elementales vivas, una parte trajinada y aparentemente útil, una parte programable, matemáticas que puede hacer algo tan predecible que lo puede hacer con un computador con software que puede venderse en mercados de escala.

4. Los derechos del estudiante.



4. Los derechos del estudiante.

Usualmente nuestros objetivos en las matemáticas escolares son bien distintos a los de proporcionar retos nuevos a nuestros estudiantes. Se puede observar que en la escuela, el colegio y la universidad buscamos llevar a nuestros estudiantes a conocer y dominar las matemáticas hechas por otros, los problemas que otros pudieron resolver, las técnicas, las herramientas, las estrategias, los métodos que otros desarrollaron.

4. Los derechos del estudiante.

Usualmente nuestros objetivos en las matemáticas escolares son bien distintos a los de proporcionar retos nuevos a nuestros estudiantes. Se puede observar que en la escuela, el colegio y la universidad buscamos llevar a nuestros estudiantes a conocer y dominar las matemáticas hechas por otros, los problemas que otros pudieron resolver, las técnicas, las herramientas, las estrategias, los métodos que otros desarrollaron.

No permite al estudiante realmente ejercer su propio pensamiento matemático, sino lo limita a observar el pensamiento de los demás e imitarlo.

4. Los derechos del estudiante.

Usualmente nuestros objetivos en las matemáticas escolares son bien distintos a los de proporcionar retos nuevos a nuestros estudiantes. Se puede observar que en la escuela, el colegio y la universidad buscamos llevar a nuestros estudiantes a conocer y dominar las matemáticas hechas por otros, los problemas que otros pudieron resolver, las técnicas, las herramientas, las estrategias, los métodos que otros desarrollaron.

No permite al estudiante realmente ejercer su propio pensamiento matemático, sino lo limita a observar el pensamiento de los demás e imitarlo.

Varios países comienzan a tomar conciencia del deseo de estructurar un currículo más retador, como el de Singapur, que hemos mencionado; en él se plantean al menos un 25 % de problemas retadores en todas las evaluaciones de matemáticas que se hacen, incluyendo los oficiales que son similares a las pruebas saber.



Estos retos deben calibrarse: si estan bien diseñados incitan tanto el desarrollo del pensamiento matemático como la creatividad del estudiante.

Estos retos deben calibrarse: si estan bien diseñados incitan tanto el desarrollo del pensamiento matemático como la creatividad del estudiante.

¡Este ha sido nuestro propósito en esta actividad con el triángulo de Pascal!

Parte VI

INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA CERCANAS AL TRIÁNGULO DE PASCAL

Algunas opciones interesantes para realizar trabajos son:

- ▶ Describir todo lo hecho en el caso binomial en las piramides para el trinomio.

Algunas opciones interesantes para realizar trabajos son:

- ▶ Describir todo lo hecho en el caso binomial en las piramides para el trinomio.
- ▶ Desarrollar los hiperespacios y los coeficientes polinomiales para $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n$ cuando $k > 3$.

Algunas opciones interesantes para realizar trabajos son:

- ▶ Describir todo lo hecho en el caso binomial en las piramides para el trinomio.
- ▶ Desarrollar los hiperespacios y los coeficientes polinomiales para $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n$ cuando $k > 3$.
- ▶ Encontrar los valores y vectores propios de las matrices de Pascal y estudiar sus propiedades.

Algunas opciones interesantes para realizar trabajos son:

- ▶ Describir todo lo hecho en el caso binomial en las piramides para el trinomio.
- ▶ Desarrollar los hiperespacios y los coeficientes polinomiales para $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n$ cuando $k > 3$.
- ▶ Encontrar los valores y vectores propios de las matrices de Pascal y estudiar sus propiedades.
- ▶ Desarrollar las teorías asociadas a triángulos y pirámides de Pascal en bases distintas de 10.

Algunas opciones interesantes para realizar trabajos son:

- ▶ Describir todo lo hecho en el caso binomial en las piramides para el trinomio.
- ▶ Desarrollar los hiperespacios y los coeficientes polinomiales para $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n$ cuando $k > 3$.
- ▶ Encontrar los valores y vectores propios de las matrices de Pascal y estudiar sus propiedades.
- ▶ Desarrollar las teorías asociadas a triángulos y pirámides de Pascal en bases distintas de 10.
- ▶ Establecer relaciones entre el triángulo de Pascal, la sucesión de Fibonacci y el triángulo de Sierpinski de la geometría fractal

Parte VII

Referencias bibliográficas



L. Aceto; D. Trigiante, *The Matrices of Pascal and Other Greats*, The American Mathematical Monthly, Vol. 108, No. 3. (Mar., 2001), pp. 232-245.



R. AGGARWALA; M. P. LAMOUREUX, *Inverting the Pascal Matrix Plus One*, The American Mathematical Monthly, Vol. 109, No. 4, pp. 371-377 (Apr., 2002).



R. BACHER, *Matrices related to the Pascal triangle*,
arXiv:math/0109013v2 [math.CO] 19 Oct 2001.



R. BACHER; R. CHAPMAN, *Symmetric Pascal matrices modulo p* , arXiv:math.NT/0212144 v2, 31 Jan 2003.



G. S. CALL; D. J. VELLEMAN, *Pascal's Matrices*, The American Mathematical Monthly, Vol. 100, No. 4, pp. 372-376 (Apr., 1993).



D. CALLAN, *The Eigenvectors of the Right-Justified Pascal Triangle*, arXiv:math.CO/0011081 v1 13 Nov 2000.

