ELEMENTOS CAYLEY UNITARIOS EN ÁLGEBRAS DE GRUPO CON INVOLUCIÓN ORIENTADA

YZEL WLLY ALAY GÓMEZ ESPÍNDOLA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2017

ELEMENTOS CAYLEY UNITARIOS EN ÁLGEBRAS DE GRUPO CON INVOLUCIÓN ORIENTADA

Autor

YZEL WLLY ALAY GÓMEZ ESPÍNDOLA

Trabajo de grado para optar al título de

Magister en matemáticas

Director

ALEXANDER HOLGUÍN VILLA

Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2017

ESCUELA DE MATEMÁTICAS
CALIFICACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: Yzel Wlly Alay Gómez Espíndola		CÒDIGO: 2158708	
TÌTILO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN: "Elementos Cayley unitarios en álgebras de grupo con involución orientada"			
REGISTRO NO.	FACULTAD Ciencias	CARRERA Maestría en matemáticas	
CALIFICACIÓN: Aprobado ⊗ No Aprobado ◯ Aplazado ◯			

DIRECTOR DEL TRABAJO DE GRADO

NOMBRE:	FIRMA
Alexander Holguín Villa	A Holguín Villa

EVALUADOR EXTERNO:	EVALUADOR INTERNO:	FECHA		
	Hector Pinedo T	AÑO	MES	DÍA
Omar Darío Saldarriaga Ortiz Firma	Hector Edonis Pinedo Tapia Firma	2017	11	29

Universidad Industrial de Santander

ENTREGA DE TRABAJOS DE GRADO, TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN O TESIS Y AUTORIZACIÓN DE SU USO A FAVOR DE LA UIS

Yo, **YZEL WLLY ALAY GÓMEZ ESPÍNDOLA**, mayor de edad, vecino de Bucaramanga, identificado con la Cédula de Ciudadanía **No 1.098.677.009** de Bucaramanga, actuando en nombre propio, en mi calidad de autor del trabajo de grado, del trabajo de investigación denominada(o): **ELEMENTOS CAYLEY UNITARIOS EN ÁLGEBRAS DE GRUPO CON INVOLUCIÓN ORIENTADA**, hago entrega del ejemplar respectivo y de sus anexos, en formato digital o electrónico (CD o DVD) y autorizo a **LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER,** para que en los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia, utilice y use en todas sus formas, los derechos patrimoniales de reproducción, comunicación pública, transformación y distribución (alquiler, préstamo público e importación) que me corresponden como creador de la obra objeto del presente documento.

PARÁGRAFO: La presente autorización se hace extensiva no sólo a las facultades y derechos de uso sobre la obra en formato o soporte material, sino también para formato virtual, electrónico, digital, óptico, uso en red, Internet, extranet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

EL AUTOR / ESTUDIANTE, manifiesta que la obra objeto de la presente autorización es original y la realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, por lo tanto la obra es de su exclusiva autoría y detenta la titularidad sobre la misma. PARÁGRAFO: En caso de presentarse cualquier reclamación o acción por parte de un tercero en cuanto a los derechos de autor sobre la obra en cuestión, EL AUTOR / ESTUDIANTE, asumirá toda la responsabilidad, y saldrá en defensa de los derechos aquí autorizados; para todos los efectos la Universidad actúa como un tercero de buena fe. Para constancia se firma el presente documento en dos (02) ejemplares del mismo valor y tenor, en Bucaramanga, a los 29 días del mes de noviembre de dos mil diecisiete (2017).

EL AUTOR / ESTUDIANTE:

Yzel Wlly Gómez

Yzel Wlly Alay Gómez Espíndola.
C.C. 1.098.677.009

Agradecimientos

- Agradezco a ese ser todopoderoso, inmaterial y omnipresente en el que creo, por ofrecerme la oportunidad de vivir, darme salud y sabiduría.
- Agradezco a mis familiares y seres amados por brindarme su apoyo incondicional durante todo mi proceso de formación académica y crecimiento personal.
- Agradezco especialmente a mi director de proyecto, el profesor Alexander Holguín Villa por su colaboración e interés en este trabajo y por todos sus consejos.
- Agradezco a los profesores que contribuyeron en mi formación académica y personal.
- A todas las personas que de una u otra manera hicieron posible este logro.

Índice general

RESUMEN

TÍTULO: ELEMENTOS CAYLEY UNITARIOS EN ÁLGEBRAS DE GRUPO CON INVOLUCIÓN ORIENTADA [1]

AUTOR: Yzel Wlly Alay Gómez Espíndola[2]

PALABRAS CLAVE: álgebras de grupo, involución, orientación, elementos Cayley unitarios.

DESCRIPCIÓN

Sea KG el álgebra de grupo del grupo G sobre el cuerpo K con característica cero. Dadas en G una orientación σ y una involución $*$, consideramos una involución orientada $\circledast$ en KG de manera natural. Un elemento Cayley unitario en KG es un elemento unitario con la forma $u = (1-k)(1+k)^{-1}$ donde k es un elemento antisimétrico tal que $1+k$ es invertible en KG.El objetivo de esta tesis es estudiar los resultados presentes en la literatura con respecto a la caracterización y construcción de elementos Cayley unitarios en KG con involución clásica orientada.

Inicialmente consideramos a KG con involución canónica (orientación trivial) y haremos una revisión bibliográfica centrandonos en los resultados mostrados por Chuang-Lee en [3] y Ribeiro-Vieira en [10]. Considerando algunos casos particulares exhibimos elementos Cayley unitarios construidos a partir de elementos antisimétricos $k = x - x^{-1}$, con $x \in G$, tal que $1+k$ es invertible y fue posible concluir que estos elementos solo dependen del orden de x en el grupo G, de esta forma concluimos que es suficiente trabajar con grupo cíclicos.

Posteriormente establecimos algunos resultados totales, considerando KG con involución clásica orientada, con respecto a la obtención de elementos Cayley unitarios construídos a partir de antisimétricos $k = 1 + (x + x^{-1})$, donde $x \in G$ y $\sigma(x) = -1$.

[1] Trabajo de grado.

[2] Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Maestría en Matemáticas, Alexander Holguín Villa, Doctor en Ciencias.

ABSTRACT

TITLE: CAYLEY UNITARY ELEMENTS IN GROUP ALGEBRA WITH ORIENTED INVOLUTION [3]

AUTHOR: Yzel Wlly Alay Gómez Espíndola[4]

KEYWORDS: group rings, oriented involution, Cayley unitary elements.

DESCRIPTION

Let KG be the group algebra of the group G over field K with characteristic zero. Given in G a σ orientation and an involution $*$, we consider a $\circledast$ oriented involution in KG naturally. A Cayley unitary element in KG is a unitary element with the form $u = (1-k)(1+k)^{-1}$ where k is an skew element such that $1+k$ is invertible in KG. The main goal of this thesis is to study the results presented in the literature with respect to the characterization and construction of Cayley unitary elements in KG with classical involution oriented.

First we consider KG with canonical involution (trivial orientation) and we will do a literature review focusing on the results shown by Chuang-Lee in [3] and Ribeiro-Vieira in [10]. Considering some particular cases we show Cayley unitary elements constructed from skew elements $k = x - x^{-1}$, with $x \in G$, such that $1+k$ is invertible and it was possible to conclude that these elements only depend of the order of x in the group G, in this way we conclude that it is enough to work with cyclical groups.

Subsequently, we established some total results, considering KG with classical involution oriented, with respect to obtaining Cayley unitary elements constructed from antisymmetric $k = 1 + (x + x^{-1})$, where $x \in G$ and $\sigma(x) = -1$

[3] Degree work.

[4]Faculty of Science, School of Mathematics, Master of Mathematics, Alexander Holguín Villa, PHD of Science.

Introducción

Dado un anillo R, todo anti-automorfismo sobre R de orden 2 es llamado una involución. Un ejemplo elemental es la aplicación traspuesta ${}^t : M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$, definida en el anillo de matrices de orden n sobre un cuerpo K. En particular cuando $K = \mathbb{R}$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ es llamada simétrica si $A^t = A$ y antisimétrica cuando $A^t = -A$. Además, el conjunto de unidades simétricas en $M_n(\mathbb{R})$ lo constituyen la matrices invertibles que son simétricas. Una matriz invertible $A \in M_n(\mathbb{R})$ es llamada unitaria si $AA^t = 1$.

En general si R es un anillo con involución $*$, es usual denotar a los conjuntos de elementos simétricos y antisimétricos por $R^+ = \{r \in R : r^* = r\}$ y $R^- = \{r \in R : r^* = -r\}$, respectivamente. Además, si R tiene 1_R, entonces $\mathcal{U}^+(R) = \mathcal{U}(R) \cap R^+$, donde $\mathcal{U}(R)$ denota el conjunto de elementos invertibles del anillo R, es llamado el conjunto de unidades simétricas. Un elemento $u \in \mathcal{U}(R)$ es llamado unitario si $uu^* = 1_R$. Se denotará por $\mathcal{U}n(R)$ al subgrupo multiplicativo de las unidades unitarias de R. Cuando $k \in R^-$ es tal que $1 + k$ es invertible, es posible mostrar que $u_{[k]} = (1 - k)(1 + k)^{-1}$ es un elemento de $\mathcal{U}n(R)$ y es llamado un elemento Cayley unitario construído a partir de k; denotaremos por $\mathcal{U}n^C(R)$ al conjunto de todos los elementos Cayley unitarios de R. Más aún en [3] fueron determinadas las condiciones bajo las cuales un elemento unitario es el producto de dos elementos Cayley unitarios en $M_n(D)$, donde D es un anillo de división.

Dados un cuerpo F y un grupo G, se define el álgebra de grupo FG, como el F espacio vectorial, usando las operaciones del grupo y el cuerpo, generado sobre el grupo G con coeficientes en el cuerpo F. Dada cualquier involución $*$ en el grupo G, se puede extender F-linealmente a FG, también denotada $* : FG \to FG$ y de manera análoga se definen los conjuntos FG^+, FG^-, $\mathcal{U}^+(FG)$, $\mathcal{U}n(FG)$ y $\mathcal{U}n^C(FG)$ de elementos simétricos, anti-simétricos, unidades simétricas, unidades unitarias y elementos Cayley unitarios respectivamente.

Luego del trabajo de Amitsur, [6, Cap. 5], y el interés en anillos con involución desarrollado a partir de la década del 1970 por Herstein y colaboradores, [6], es natural estudiar álgebras de grupo desde este punto de vista. Más aún, algunas preguntas de la teoría general de anillos con involución, son planteadas en el contexto de álgebras de grupo obteniendo, claro está, respuestas que involucran tanto al grupo G como al cuerpo F que definen el álgebra de grupo FG. Por ejemplo en [10], al considerar sobre FG la involución clásica, es decir, la inducida de la aplicación $g \mapsto g^{-1}$ para $g \in G$, donde es G un grupo finito y F es un cuerpo de característica diferente de dos, se demuestra que $x \in G$ es Cayley unitario si y solo si el orden de x en G es impar. Además, considerando un tipo especial de elementos anti-simétricos en FG, se construyen elementos Cayley unitarios que involucran la bien conocida sucesión de Fibonacci.

Inicialmente estudiaremos algunos resultados conocidos en álgebras de grupo con la involución clásica, especialmente aquellos que involucran unidades y elementos Cayley unitarios construídos a partir de elementos anti-simétricos en FG, destacando construcciones especiales como las mostradas por Vieira y Ribeiro, [10], donde como ya se mencionó en el último párrafo, involucran sucesiones recurrentes, particularmente la sucesión de Fibonacci. Posteriormente estudiaremos el álgebra de grupo con la involución clásica orientada y mostraremos algunos resultados obtenidos acerca de la construcción de elementos Cayley unitarios.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En adelante se mostrarán algunos conceptos que han sido identificados como necesarios para el estudio, comprensión y desarrollo del tema central de esta tesis. La mayoría de las definiciones y resultados que se mostrarán pueden ser encontrados en textos de álgebra, una buena referencia para consultar estos tópicos es [8].

1.1. Teoría de Anillos

Tras estudiar la estructura que posee un conjunto junto con una operación binaria, resulta natural definir una segunda operación binaria sobre el conjunto e ir considerando nuevas propiedades de ésta operación, lo que permite estudiar nuevas estructuras algebraicas.

Definición 1.1.1. Un anillo es un conjunto R junto con dos operaciones binarias, que serán denotadas por "+" y "·", de tal forma que R con la operación $+$ es un grupo abeliano y que para todo $a, b, c \in R$ se cumple:

I) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,

II) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,

III) $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

Si además R verifica que $a\cdot b = b\cdot a$, para todo $a,b\in R$, diremos que el anillo es conmutativo. Un anillo es llamado un dominio si $a\cdot b=0$ implica que $a=0$ o $b=0$. Dos elementos diferentes de cero $a,b\in R$ tales que $a\cdot b=0$ son llamados divisores de cero. Un anillo R que contiene un elemento $1_R\neq 0$ tal que para todo $a\in R$ se cumple que $1_R\cdot a = a\cdot 1_R = a$, es llamado un anillo con unidad. A menos que se indique lo contrario, todos los anillos que usaremos en esta tesis son anillos con unidad. Un dominio conmutativo con unidad es llamado un dominio entero.

Definición 1.1.2. Un elemento a de un anillo R es llamado invertible si existe un elemento en R, que será denotado por a^{-1} y será llamado su inverso, tal que $a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1_R$. El conjunto

$$\mathcal{U}(R) = \{a\in R : a \ \ es \ \ invertible\},$$

es llamado el grupo de unidades de R.

Un anillo es llamado un anillo de división si todos sus elementos no nulos son invertibles. Un anillo de división que también es conmutativo es llamado un cuerpo.

Definición 1.1.3. Un subconjunto no vacío S de un anillo R, es llamado un subanillo de R si este es cerrado bajo las operaciones de R y es un anillo con respecto a esas operaciones.

Definición 1.1.4. Un subconjunto no vacío I de un anillo R es llamado ideal izquierdo de R si se cumple que:

I) Si $x,y\in I$, entonces $x-y\in I$,

II) Si $x\in I$ y $a\in R$, entonces $ax\in I$.

Análogamente, se define ideales a derecha. Un subconjunto no vacío L de un anillo R es un *ideal* (algunas veces llamado ideal bilateral) si él es tanto ideal a izquierda como ideal a derecha de R. Un anillo R arbitrario siempre tiene ideales, de hecho R y (0) son ideales y son llamados ideales triviales. Todo ideal $I \neq R$, $I \neq (0)$ es llamado propio. Sin embargo pueden no existir ideales propios en un anillo R, en este caso R será llamado simple.

Un ideal propio I de un anillo conmutativo R es llamado *ideal primo de* R si dados $a, b \in R$ y $ab \in I$ implica que $a \in I$ ó $b \in I$. Además, I es llamado ideal maximal de R si siempre que J ideal de R e $I \subseteq J \subseteq R$, entonces $J = I$ ó $J = R$.

Definición 1.1.5. Sea R un anillo con unidad. El radical de Jacobson de R, denotado por $J(R)$, es la intersección de todos los ideales maximales a izquierda de R.

Considere el conjunto $C = \{m \in \mathbb{Z}^+ : ma = 0, \forall a \in R\}$, donde $ma = a + a + \cdots + a$ (m-veces). Si el conjunto C es vacío se dice que R es de característica 0 y escribimos $char(R) = 0$. Si $C \neq \phi$ se dice que R es de característica n, donde $n = \min\{C\}$ y escribimos $char(R) = n$.

Sean R y S anillos, una función $f : R \to S$ es llamada un homomorfismo de anillos, si para todo $a, b \in R$ tenemos:

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$.
- $f(ab) = f(a) f(b)$.

Al conjunto de todos los homomorfismos de R en S se lo denota por $hom(R, S)$. Si una aplicación φ entre los anillos R y S cumple con la primera condición de la Definición anterior y cumple que $f(ab) = f(b) f(a)$, decimos que φ es un anti-homomorfismo.

A continuación definiremos un familia especial de anillos.

Sea R un anillo con unidad y G un grupo(no necesariamente finito). Denotamos por RG al conjunto de sumas formales

$$RG = \left\{ \sum_{g \in G} r_g g \mid r_g \in R, g \in G \right\},$$

donde $r_g = 0$ casi siempre, esto es, solo un número finito de coeficientes son diferentes de cero en cada una de esta sumas. Se definen la suma y producto en RG como,

$$\sum_{g \in G} r_g g + \sum_{g \in G} s_g g = \sum_{g \in G} (r_g + s_g) g,$$

$$\left(\sum_{g \in G} r_g g \right) \left(\sum_{h \in G} s_h h \right) = \sum_{i \in G} t_i i, \text{ donde } t_i = \sum_{gh = i} (r_g s_h).$$

Se puede verificar que RG dotado con estas operaciones es un anillo con unidad $1 = \sum_{g \in G} u_g g$, donde el coeficiente correspondiente a la unidad del grupo es 1_R y $u_g = 0$, para otro elemento $g \in G$.

Definición 1.1.6. El conjunto RG con las operaciones definidas anteriormente es llamado el anillo de grupo de G sobre R.

Definición 1.1.7. Por analogía, se define el grupo multiplicativo de las unidades del anillo RG por

$$\mathcal{U}(RG) = \{ \alpha \in RG : \alpha\beta = \beta\alpha = 1, \text{ para algún } \beta \in RG \}.$$

1.1.1. Módulos y Álgebras

Sea R un anillo con unidad y M un grupo abeliano. Decimos que M es un *R-módulo* o simplemente un módulo (cuando R es claro), si existe una acción de R en M, esto es una función

$$\begin{array}{rcl} R \times M & \to & M \\ (r, m) & \mapsto & rm \end{array}$$

tal que para todo $r, s \in R$ y todo $m, n \in M$ se cumple que:

- $(r+s)\, m = rm + sm$,
- $r\,(m+n) = rm + rn$,
- $(rs)\, m = r\,(sm)$,
- $1_R m = m$.

En algunos textos consideran que un R-módulo debe cumplir solo las primeras tres condiciones de la anterior Definición y si se verifica la última condición el R-módulo es llamado unitario.

Ejemplo 1.1.8. Si I es ideal de R, entonces R/I es un R-módulo, donde la acción es dada por

$$\begin{array}{rcl} R \times R/I & \to & R/I \\ (r, x+I) & \mapsto & rx + I. \end{array}$$

En particular para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\mathbb{Z}_n$ es un $\mathbb{Z}$-módulo.

Definición 1.1.9. Sea M un R-modulo. Un subconjunto no vacío $N \subseteq M$ es llamado un R-*submódulo* de M, si N se cumplen las siguientes condiciones:

i) Para todo $x, y \in N$, $x + y \in N$.

ii) Para todo $r \in R$ y todo $n \in N$, $rn \in N$.

Si N es un R-submódulo de M, escribimos $N \leq_R M$ o simplemente $N \leq M$ si es claro quien es R.

Definición 1.1.10. Sea R un anillo conmutativo. Un R-módulo A es llamado un R-álgebra si existe una multiplicación, definida sobre A, tal que, con la misma suma dada en A y esta multiplicación, A es un anillo en el cual se cumple la siguiente condición:

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) \tag{1.1}$$

para todo $r \in R$ y todo $a, b \in A$.

Si A es un anillo con unidad 1_A, entonces la condición 1.1 implica que el conjunto $R \cdot 1_A$ está contenido en el centro de A.
Si R es conmutativo y M es un R-álgebra, decimos que $N \subseteq M$ es un *R-subálgebra* de M si es un submódulo y un subanillo de M.
Se define el producto entre elementos de R y elementos de RG. Sea $\lambda \in R$

$$\lambda \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) = \sum_{g \in G} (\lambda r_g) g.$$

Note que con este producto se puede ver a RG como un R-módulo. Cuando R es conmutativo, RG es llamado el álgebra de grupo de G sobre R.

Ejemplo 1.1.11.

i) Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, entonces los K-submódulos de V son precisamente sus subespacios.

ii) Los $\mathbb{Z}$-submódulos de un grupo abeliano A son exactamente sus subgrupos.

iii) Si consideramos al anillo R como un submódulo sobre el mismo, entonces sus submódulos son precisamente sus ideales a izquierda.

Como caso particular del segundo ítem del ejemplo anterior, tenemos que los $\mathbb{Z}$-submódulos de $\mathbb{Z}$ son sus ideales, que son de la forma $n\mathbb{Z}$ y para $n, m \in \mathbb{Z}$ se tiene $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$, si y solo si, $m|n$. Como el número de divisores de $n \in \mathbb{Z}$ es finito, se sigue que la cadena de contenencias $n\mathbb{Z} \subset m_1\mathbb{Z} \subset m_2\mathbb{Z} \subset \cdots \subset m_i\mathbb{Z} \subset \cdots$ no puede poseer infinitos R-submódulos. Esta propiedad y una análoga se formalizan a continuación.

Definición 1.1.12. Sea M un R-módulo. Decimos que M satisface la condición de cadena ascendente (CCA), si toda cadena de submódulos de M

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_i \subset \cdots$$

termina; esto es, si existe un índice t tal que $M_t = M_{t+i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Si M satisface la CCA es llamado módulo Noetheriano.

Definición 1.1.13. Sea M un R-módulo. Decimos que M satisface la condición de cadena descendente (CCD), si toda cadena de submódulos de M

$$M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_i \supset \cdots$$

termina; esto es, si existe un índice t tal que $M_t = M_{t+i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Si M satisface la CCD es llamado módulo Artiniano.

1.2. Involuciones

En esta Sección daremos la definición de involución en el contexto de grupos y en el contexto de anillos, presentaremos algunos ejemplos y probaremos algunas propiedades generales que nos serán de utilidad en los Capítulos 2 y 3.

Definición 1.2.1. Sea G un grupo. Una aplicación $\varphi : G \longrightarrow G$ es llamada una **involución** sobre G si para todos $g, h \in G$ se satisface que:

I) $\varphi(gh) = \varphi(h)\varphi(g)$;

II) $\varphi(\varphi(g)) = g$,

es decir, $\varphi : G \longrightarrow G$ es un antihomomorfismo de orden 2.

Ejemplo 1.2.2. Sea G un grupo. La aplicación $* : G \longrightarrow G$ dada por $g \mapsto g^* = g^{-1}$ es una involución en G, llamada la **involución clásica**.

Definición 1.2.3. Sea G un grupo. Un homomorfismo $\sigma : G \longrightarrow \{-1, 1\} = \mathcal{U}(\mathbb{Z})$ es llamado una **orientación** de G.

Definición 1.2.4. Sea R un anillo. La aplicación $\phi : R \longrightarrow R$ es llamada una **involución** si esta es un antihomomorfismo de orden 2, es decir, si para todos $a, b \in R$ se satisfacen:

1. $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$;

2. $\phi(ab) = \phi(b)\phi(a)$;

3. $\phi(\phi(a)) = a$.

Observación 1.2.5. Usualmente se usa el símbolo $*$ para denotar involuciones y dicha involución actuando sobre un objeto x se denota por x^* en lugar de $*(x)$.

Ejemplo 1.2.6. Sea R un anillo. La aplicación $^t : M_n(R) \longrightarrow M_n(R)$ definida por $(a_{ij})^t = (a_{ji})$, es una involución sobre $M_n(R)$, conocida como la aplicación traspuesta.

Ejemplo 1.2.7. Sea $R = \mathbb{C}$ y consideremos la aplicación

$$\begin{array}{cccc} * & : & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & \alpha + \beta i & \mapsto & \alpha - \beta i. \end{array}$$

Se verifica fácilmente que $*$ es una involución en $\mathbb{C}$, denominada conjugación compleja.

Ejemplo 1.2.8. Sea R un anillo con involución φ y G un grupo con involución ϕ. Definimos para el anillo de grupo RG, la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rcccc} * & : & RG & \to & RG \\ & & \alpha = \sum_{x\in G}\alpha_x x & \mapsto & \alpha^* = \sum_{x\in G}\varphi(\alpha_x)\phi(x). \end{array}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^* &= \left(\sum_{x\in G}\alpha_x x + \sum_{x\in G}\beta_x x\right)^* = \left(\sum_{x\in G}(\alpha_x+\beta_x)x\right)^* = \sum_{x\in G}\varphi(\alpha_x+\beta_x)\phi(x)\\ &= \sum_{x\in G}\varphi(\alpha_x)\phi(x)+\varphi(\beta_x)\phi(x) = \left(\sum_{x\in G}\alpha_x x\right)^* + \left(\sum_{x\in G}\beta_x x\right)^*\\ &= \alpha^*+\beta^*.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)^* &= \left(\sum_{x\in G}\alpha_x x\cdot\sum_{y\in G}\beta_y y\right)^* = \left(\sum_{x,y\in G}(\alpha_x\cdot\beta_y)(xy)\right)^* = \sum_{x,y\in G}\varphi(\alpha_x\cdot\beta_y)\phi(xy)\\ &= \sum_{x,y\in G}(\varphi(\beta_y)\cdot\varphi(\alpha_x))(\phi(y)\phi(x)) = \sum_{y\in G}\varphi(\beta_y)\phi(y)\cdot\sum_{y\in G}\varphi(\alpha_x)\phi(x)\\ &= \left(\sum_{y\in G}\beta_y y\right)^*\cdot\left(\sum_{x\in G}\alpha_x x\right)^*\\ &= \beta^*\alpha^*.\end{aligned}$$

Finalmente, dado que φ y ϕ son de orden 2 tenemos

$$(\alpha^*)^* = \left(\sum_{x\in G}\varphi(\alpha_x)\phi(x)\right)^* = \sum_{x\in G}\varphi(\varphi(\alpha_x))\phi(\phi(x)) = \sum_{x\in G}\alpha_x x = \alpha,$$

y así $*$ define una involución sobre RG.

En un anillo conmutativo R, el homomorfismo identidad cumple con las condiciones de la Definición 1.2.4, así la siguiente aplicación define una involución en el anillo de grupo RG.

Definición 1.2.9. Sea RG un algebra de grupo sobre un anillo conmutativo R. La aplicación

$$\begin{array}{rcccl} * & : & RG & \to & RG \\ & & \alpha = \sum_{x \in G} \alpha_x x & \mapsto & \alpha^* = \sum_{x \in G} \alpha_x x^{-1}, \end{array} \tag{1.2}$$

es una involución en RG, conocida en la literatura como la **involución canónica** en RG,

Proposición 1.2.10. *Sea $*$ una involución en un anillo R. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

I) $1_R^* = 1$.

II) *Si $x \in \mathcal{U}(R)$, entonces $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$.*

III) *$x \in \zeta(R)$ si y solamente si $x^* \in \zeta(R)$.*

Demostración.

I) Tenemos que

$$1 = (1^*)^* = (1 \cdot 1^*)^* = (1^*)^* \cdot 1^* = 1 \cdot 1^* = 1^*.$$

II) Si $x \in \mathcal{U}(R)$, entonces aplicando $*$ en $xx^{-1} = 1$ y utilizando que $1^* = 1$, obtenemos que $(x^{-1})^* x^* = 1^* = 1$. De manera análoga $x^*(x^{-1})^* = 1$ y por lo tanto $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$.

III) Si $x \in \zeta(R)$, entonces para todo $y \in R$ tenemos que

$$x^*y = x^*(y^*)^* = (y^*x)^* = (xy^*)^* = (y^*)^*x^* = yx^*$$

y por tanto $x^* \in \zeta(R)$. Recíprocamente, si $x^* \in \zeta(R)$ entonces

$$xy = (x^*)^*(y^*)^* = (y^*x^*)^* = (x^*y^*)^* = (y^*)^*(x^*)^* = yx$$

de aquí que $x \in \zeta(R)$.

$\square$

Veamos como dada una involución $*$ y una orientación σ sobre G , se puede definir en RG una nueva involución.

Definición 1.2.11 ([5], Página 13)**.** Sea R un anillo conmutativo. Dadas una orientación σ y una involución $*$ en G, la aplicación $\circledast$ en RG dada por

$$\begin{array}{rcccl} \circledast \quad : \quad RG & \rightarrow & & RG & \\ \alpha = \sum_{g\in G}\alpha_g g & \mapsto & \alpha^{\circledast} = & \left(\sum_{g\in G} r_g g\right)^{\circledast} & = \sum_{g\in G} r_g \sigma(g) g^*, \end{array} \tag{1.3}$$

define una involución llamada **involución de grupo orientada**.

Como $\alpha \mapsto \alpha^{\circledast}$ es una involución, entonces para todo $g \in G$,

$$g = g^{\circledast\circledast} = (\sigma(g)g^*)^{\circledast} = \sigma(g)\sigma(g^*)g.$$

De ahí obtenemos que $gg^* \in ker(\sigma)$ para todo $g \in G$ y recíprocamente, i.e., si para todo $g \in G$, $gg^* \in ker(\sigma)$, entonces $\circledast$ dada por la expresión (1.3) es una involución. En particular, tenemos que $N = ker(\sigma)$ es invariante bajo $*$ y además si σ es no trivial tenemos $(G : N) = 2$.

Si en la expresión (1.3) la involución $*$ es dada por $g \mapsto g^{-1}$, para cada $g \in G$ y σ es trivial, la involución coincide con la canónica definida por la expresión (1.2). Si en este caso, σ no es trivial, tenemos una involución conocida en la literatura como **involución clásica orientada** dada por

$$\sum_{g \in G} r_g g \mapsto \sum_{g \in G} r_g \sigma(g) g^{-1}. \tag{1.4}$$

Esta involución jugará un papel muy importante en el desarrollo del Capítulo 3. Finalmente, cuando $*$ es una involución arbitraria sobre G y σ es trivial, la involución definida sobre RG se denomina una involución de grupo.

Tenemos las siguientes propiedades.

Lema 1.2.12. *Sean $*$ una involución definida sobre G, σ una orientación del grupo G y $N = ker(\sigma) = \{g \in G : \sigma(g) = 1\}$, entonces*

I) *Si $g \in N$, entonces $g^* \in N$.*

II) *Si $o(g)$ es impar, entonces $g \in N$.*

Demostración.

I) Como vimos luego de la Definición 1.2.11, para todo $g \in G$, $gg^* \in ker(\sigma) = N$. En particular, si $g \in N$ entonces $g^* \in N$.

II) Si $o(g) = n$-impar, entonces usando la Proposición (1.2.12-I) y el hecho que σ es un homomorfismo, tenemos

$$1 = \sigma(1) = \sigma(\underbrace{ggg\ldots g}_{n\text{-veces}}) = \underbrace{\sigma(g)\sigma(g)\sigma(g)\ldots\sigma(g)}_{n\text{-veces}},$$

esto es, 1 es igual al producto de una cantidad impar ya sea de $1's$ o de $-1's$, por lo tanto $\sigma(g) = 1$ y así $g \in N$.

$\square$

Definición 1.2.13. Sea R un anillo con una involución $*$.

1. Un elemento $k \in R$ es llamado **elemento simétrico** si $k^* = k$. Como es usual denotaremos por R^+ al conjunto de los elementos simétricos de R con respecto a $*$, i.e.,

$$R^+ = \{k \in R \ : \ k^* = k\}.$$

2. Un elemento $k \in R$ es llamado **elemento antisimétrico** si $k^* = -k$. Al conjunto de los elementos antisimétricos de R se denota por R^-, así

$$R^- = \{k \in R \ : \ k^* = -k\}.$$

En particular, si RG esta dotado de la involución $\circledast$ dada por la expresión 1.3, denotaremos los conjuntos de elementos simétricos y antisimétricos con respecto a $\circledast$, respectivamente por RG^+ y RG^-.
El siguiente resultado muestra como RG^+ y RG^- (con respecto a la involución canónica) son generados como $R-$módulos, cuando R es un anillo conmutativo en el cual 2 es invertible.

Proposición 1.2.14. *Sea R un anillo conmutativo en el cual 2 es invertible y $*$ la involución canónica de RG dada por* (1.2). *Entonces*

1. *RG^-, como R-módulo, es generado por $x - x^{-1}$ con $x \in G$.*

2. *RG^+, como R-módulo, es generado por $x + x^{-1}$ con $x \in G$.*

Demostración.

1. Sea $\alpha = t(x - x^{-1})$ con $t \in R$ y $x \in G$. Veamos que $\alpha^* = -\alpha$.

$$\alpha^* = (t(x - x^{-1}))^* = t(x - x^{-1})^* = t(x^{-1} - x) = -\alpha.$$

Sea ahora $\alpha = \sum_{x \in G} \alpha_x x \in RG^-$, entonces $\alpha = -(\alpha)^*$, esto es $\sum_{x \in G} \alpha_x x = -\sum_{x \in G} \alpha_x x^{-1}$. Comparando $supp(\alpha)$ y $supp(-(\alpha)^*)$, notamos que $\alpha_x = -\alpha_{x^{-1}}$, para todo $x \in G$. Se sigue que

$$2\alpha = \sum_{x \in G} \alpha_x x + \left(-\sum_{x \in G} \alpha_x x^{-1} \right) = \sum_{x \in G} \alpha_x \left(x - x^{-1} \right),$$

luego

$$\alpha = \sum_{x \in G} \frac{1}{2} \alpha_x \left(x - x^{-1} \right).$$

Esto prueba que

$$RG^- = \langle x - x^{-1} : x \in G \rangle_R.$$

2. De forma análoga se muestra que

$$RG^+ = \langle x + x^{-1} : x \in G \rangle_R.$$

$\square$

Capítulo 2

ELEMENTOS CAYLEY UNITARIOS EN KG

En adelante vamos a considerar el álgebra de grupo KG con K-cuerpo, $char(K) \neq 2$ y G un grupo finito. Además que sobre KG está definida la involución canónica obtenida por la extensión K-lineal de $g \mapsto g^{-1}$, para $g \in G$, dada por la expresión (1.2).

Definición 2.0.1. Sea R un anillo con una involución $*$. Un elemento $u \in \mathcal{U}(RG)$ es llamado **elemento unitario** si $uu^* = 1$. Denotaremos por $\mathcal{U}n(RG)$ al subgrupo de todas los elementos unitarios de RG.

Ejemplo 2.0.2. Consideremos $R = \mathbb{C}$ con la involución dada en el Ejemplo 1.2.7 y G un grupo. Observe que todo elemento de $S' \subset \mathbb{C}$ es unitario. De hecho si $a + bi$ es unitario, se sigue que $1 = (a + bi)(a + bi)^* = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ y de aquí que $\mathcal{U}n(\mathbb{C}G) = S'$.

Proposición 2.0.3. *Sea $k \in R^-$. Entonces $1 + k \in \mathcal{U}(R)$, si y solamente si $1 - k \in \mathcal{U}(R)$.*

Demostración. Si $1+k \in \mathcal{U}(R)$, entonces existe $x \in R$ tal que $x(1+k) = 1 = (1+k)x$. Luego

$$\begin{aligned} x(1+k) &= 1 = 1^* = (1+k)^* x^* = (1+k^*)x^* = (1-k)x^* \\ (1+k)x &= 1 = 1^* = x^*(1+k)^* = x^*(1+k^*) = x^*(1-k) \end{aligned}$$

esto es $1-k \in \mathcal{U}(R)$. De manera similar se obtiene la afirmación recíproca. □

Proposición 2.0.4. *Sea $k \in R^-$ y $1+k \in \mathcal{U}(R)$, entonces $u = (1-k)(1+k)^{-1} \in \mathcal{U}n(R)$.*

Demostración. Dado que $k^* = -k$, se sigue que

$$\begin{aligned} u^* &= ((1-k)(1+k)^{-1})^* \\ &= ((1+k)^*)^{-1}(1-k)^* \\ &= (1-k)^{-1}(1+k). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} uu^* &= (1-k)(1+k)^{-1}(1-k)^{-1}(1+k) \\ &= (1-k)[(1-k)(1+k)]^{-1}(1+k) \\ &= (1-k)[(1+k)(1-k)]^{-1}(1+k) \\ &= (1-k)(1-k)^{-1}(1+k)^{-1}(1+k) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto u es un elemento unitario de R. □

Definición 2.0.5. Un elemento $u \in \mathcal{U}n(R)$ es llamado **Cayley unitario** en R, si existe $k \in R^-$ con $1+k \in \mathcal{U}(R)$ tal que $u = (1-k)(1+k)^{-1}$. En este caso se dice que u es el elemento Cayley unitario obtenido a partir de k y se denota por $u_{[k]}$. El conjunto de los elementos Calyley unitarios de R es denotado por $\mathcal{U}n^C(R)$, es decir,

$$\mathcal{U}n^C(R) = \{u \in \mathcal{U}n(R) : \exists k \in R^-, u = (1-k)(1+k)^{-1}\}.$$

Proposición 2.0.6. *Sean R un anillo con involución y $u_{[k]} \in \mathcal{U}n^C(R)$. Entonces $u_{[k]}^{-1} = u_{[-k]}$.*

Demostración. Si $u_{[k]} \in \mathcal{U}n^C(R)$ entonces $1+k$ es invertible en R y de la Proposición 2.0.3 se tiene que $1-k$ es invertible en R, así

$$u_{[k]}u_{[-k]} = (1-k)(1+k)^{-1}(1+k)(1-k)^{-1} = 1.$$

Análogamente se establece que $u_{[-k]}u_{[k]} = 1$ y por tanto $u_{[k]}^{-1} = u_{[-k]}$. $\square$

La siguiente Proposición proporciona condiciones necesarias y suficientes para que un elemento unitario u sea Cayley unitario.

Proposición 2.0.7 ([3], Lema 1)**.** *Sea R un anillo dotado de una involución $*$ en el cual 2 es invertible. Entonces, un elemento unitario $u \in R$ es un elemento Cayley unitario si y solo si $1+u$ es invertible en R.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si $u \in \mathcal{U}n^C(R)$, entonces $u = (1-k)(1+k)^{-1}$ para algún elemento antisimétrico k tal que $1+k$ es invertible en R. Luego

$$\begin{aligned} 1+u =& 1+(1-k)(1+k)^{-1} \\ =& (1+k)(1+k)^{-1} + (1-k)(1+k)^{-1} \\ =& 2(1+k)^{-1}. \end{aligned}$$

Como 2 es invertible en R, se sigue que $1+u$ es invertible en R.

$\Leftarrow$) Sea $u \in \mathcal{U}n(R)$. Si $1+u$ es invertible en R, entonces $k = (1-u)(1+u)^{-1}$ es antisimétrico. En efecto, como $*$ es una involución y $u \in \mathcal{U}n(R)$, entonces

$$
\begin{aligned}
k^* &= ((1-u)(1+u)^{-1})^* \\
&= ((1+u)^{-1})^*(1-u)^* \\
&= ((1+u)^*)^{-1}(1-u)^* \\
&= (1+u^*)^{-1}(1-u^*) \\
&= (1+u^{-1})^{-1}(1-u^{-1}) \\
&= (1+u^{-1})^{-1}u^{-1}u(1-u^{-1}) \\
&= (u(1+u^{-1}))^{-1}(u(1-u^{-1})) \\
&= (u+1)^{-1}(u-1) \\
&= -(1+u)^{-1}(1-u).
\end{aligned}
$$

Como $(1-u)(1+u) = (1+u)(1-u)$, entonces $(1+u)^{-1}(1-u) = (1-u)(1+u)^{-1}$. Luego

$$k^* = -(1+u)^{-1}(1-u) = -(1-u)(1+u)^{-1} = -k.$$

Ahora, como 2 es una unidad en R, entonces $1+k = 2(1+u)^{-1}$ también lo es y

$$
\begin{aligned}
1+k &= 2(1+u)^{-1} \\
(1+k)(1+u) &= 2 \\
(1+k)u &= 1-k \\
u &= (1+k)^{-1}(1-k) \\
u &= (1-k)(1+k)^{-1}
\end{aligned}
$$

Las dos últimas líneas se siguen del hecho que $(1+k)(1-k) = (1-k)(1+k)$. Así $u \in \mathcal{U}n^C(R)$. $\square$

Dado que para todo $x \in G$, $xx^* = 1 = x^*x$, entonces $G \subset \mathcal{U}n(KG)$. Considerando esto, resulta natural preguntarse que condiciones debe cumplir un elemento x de G para ser Cayley unitario.
Si el orden de x en G es n tenemos que

$$(1+x)\left[\frac{1}{2}\left(1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{n-1}\right). \tag{2.1}$$

Por la Proposición 2.0.7, es claro que $x \in \mathcal{U}n^C(KG)$ si y solo si $(1+x) \in \mathcal{U}(KG)$, es decir, si y solo si n es impar. Se sigue que si G es un grupo finito con orden impar entonces, $G \subset \mathcal{U}n^C(KG)$.

Ahora si el orden de G es impar $(n > 1)$, entonces $x = u_{[k]}$ para algún $k \in KG^-$ y $1 + x = 2(1+k)^{-1}$. Por 2.1 tenemos que

$$(1+x) = 2\left[(1 - \left(x - x^{n-1}\right) - \left(x^3 - x^{n-3}\right) - \cdots - \left(x^{n-2} - x^2\right)\right]^{-1}.$$

Corolario 2.0.8. *Sea $x \in G$ un elemento no trivial de orden impar n. Entonces $x = u_{[k]}$ donde $k = -(x - x^{n-1}) - (x^3 - x^{n-3}) - \cdots - (x^{n-2} - x^2)$.*

Si el orden de un elemento x de G es par entonces $x \notin \mathcal{U}n^C(KG)$, esto muestra que en general $\mathcal{U}n^C(KG) \subsetneq \mathcal{U}n(KG)$. Sin embargo, ¿será posible que un elemento α de $\mathcal{U}(KG)$ se pueda obtener usando elementos Cayley unitarios ? El siguiente resultado establece condiciones necesarias y suficientes de cuando un elemento unitario es el producto de dos elementos Cayley unitarios en KG.

Proposición 2.0.9 ([3], Lema 2)**.** *Sea R un anillo con involución $*$ en el cual 2 es invertible. Entonces, un elemento unitario u en R es el producto de dos elementos Cayley unitarios si y solo si $(1+u)-(1-u)k$ es invertible en R para algún elemento antisimétrico k con $1+k$ invertible en R.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $u \in \mathcal{U}n(KG)$ es el producto de dos elementos Cayley unitarios, esto es, $u = v_{[h]}w_{[k]}$. Entonces $uw_{[-k]} = v_{[h]}$, es decir, $uw_{[-k]} \in \mathcal{U}n^C(KG)$. Por la Proposición 2.0.7 se sigue que $1 + uw_{[-k]}$ es invertible en KG. Luego

$$\begin{aligned}(1 + uw_{[-k]})(1 - k) &= (1 + u(1 + k)(1 - k)^{-1})(1 - k)\\ &= (1 - k) + u(1 + k)\\ &= (1 + u) - (1 - u)k,\end{aligned}$$

también es invertible en KG.

$\Leftarrow$) Si $(1+u)-(1-u)k = (1+uw_{[-k]})(1-k)$ es invertible en KG para algún elemento $k \in KG^-$ con $1+k$ invertible en KG, entonces $[(1+u)-(1-u)k](1-k)^{-1} = 1+uv_{[-k]}$ es también invertible. En virtud de la Proposición 2.0.7 $uv_{[-k]} \in \mathcal{U}n^C(KG)$, esto es, $uv_{[-k]} = w_{[h]}$, con $h \in KG^-$. Por tanto, $u = w_{[h]}v_{[k]}$. $\square$

Como ya observamos, un elemento de un grupo con orden par no puede ser un elemento Cayley unitario, ver (2.1). En este caso, podemos preguntarnos si $x \in G$ es el producto de dos elementos Cayley unitarios. La respuesta en general es no, veamos un ejemplo de ello.

Ejemplo 2.0.10. $\mathbb{Q}S_3$

Consideremos el grupo simétrico de orden 3 dado por la presentación

$$S_3 = \langle x, y \,|\, x^2 = 1, y^3 = 1, xy = y^{-1}x\rangle \cong D_3,$$

y su álgebra de grupo sobre el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}S_3$.

Afirmación: x no es el producto de dos elementos Cayley unitarios. De hecho, como el orden de x es 2, cada elemento antisimétrico de $\mathbb{Q}S_3$ es de la forma $\alpha(y - y^{-1})$, con $\alpha \in \mathbb{Q}$. Pero

$$\begin{aligned}(1+x)-(1-x)\alpha(y-y^{-1}) &= (1+x)-(\alpha y-\alpha xy-\alpha y^{-1}+\alpha xy^{-1})\\ &= (1+x)-(\alpha y-\alpha xy-\alpha xyx+\alpha xxyx)\\ &= (1+x)-(\alpha y(1+x)-\alpha xy(1+x))\\ &= (1-\alpha y+\alpha xy)(1+x),\end{aligned}$$

note que $1+x$ es divisor de cero, pues $(1+x)(1-x)=(1-x^2)=0$ y así no es unidad. Se sigue de la Proposición 2.0.9 que x no es el producto de dos elementos Cayley unitarios en $\mathbb{Q}S_3$.

2.1. Cayley Unitarios obtenidos a partir de $x - x^{-1}$

En esta Sección se estudiará como obtener elementos Cayley unitarios, construídos a partir de generadores $x-x^{-1}$ de KG^{-}, con $x \in G$, tales que $1+(x-x^{-1})$ sea invertible en KG.

Si $x \in G$ es de orden 2 entonces $x = x^{-1}$, así $x - x^{-1} = 0$. Teniendo en cuenta la Proposición 1.2.14 consideraremos antisimétricos de la forma $x - x^{-1}$ donde el orden de x sea mayor que 2. Los siguientes dos ejemplos permitirán orientar el estudio de los elementos Cayley unitarios en cualquier álgebra de grupo KG, con K cuerpo de característica cero.

Ejemplo 2.1.1. KD_4

Consideremos el grupo $D_4 = \langle x, y : x^2 = 1, y^4 = 1, xy = y^{-1}x\rangle$, entonces

$$KD_4^{-} = \langle y - y^{-1}\rangle_K .$$

Dado que $(1+y-y^{-1})\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{5}y+\frac{2}{5}y^2+\frac{1}{5}y^3\right)=1$, se sigue que $1+y-y^{-1}$ es invertible. Así de la Definición 2.0.5 tenemos que

$$\begin{aligned} u &= \left(1-(y-y^{-1}\right)\left(1+\left(y-y^{-1}\right)\right)^{-1} \\ &= \left(1-y+y^3\right)\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{5}y+\frac{2}{5}y^2+\frac{1}{5}y^3\right) \\ &= \frac{1}{5}-\frac{2}{5}y+\frac{4}{5}y^2+\frac{2}{5}y^3, \end{aligned}$$

es un elemento Cayley unitario de KD_4.

Ejemplo 2.1.2. KQ_8

Sea $Q_8 = \langle x, y : x^4 = 1, x^2 = y^2, xy = y^{-1}x\rangle$ el grupo de los cuaternios de orden 8. A continuación presentamos a Q_8 por extenso junto con el orden e inverso de cada elemento:

Elemento	1	x	x^2	x^3	y	xy	x^2y	x^3y
Orden	1	4	2	4	4	4	4	4
Inverso	1	x^3	x^2	x	x^2y	x^3y	y	xy

De la tabla se observa que los elementos $x, y, xy \in Q_8$ son suficientes para generar KQ_8^-, en particular $x - x^{-1}, y - y^{-1}, (xy) - (xy)^{-1} \in KQ_8^-$. Además

$$\begin{gathered} (1+(x-x^{-1}))\left(\tfrac{3}{5}-\tfrac{1}{5}x+\tfrac{2}{5}x^2+\tfrac{1}{5}x^3\right)=1 \\ (1+(y-y^{-1}))\left(\tfrac{3}{5}-\tfrac{1}{5}y+\tfrac{2}{5}y^2+\tfrac{1}{5}y^3\right)=1 \\ (1+(xy-(xy)^{-1}))\left(\tfrac{3}{5}-\tfrac{1}{5}(xy)+\tfrac{2}{5}(xy)^2+\tfrac{1}{5}(xy)^3\right)=1. \end{gathered}$$

Se obtienen respectivamente los siguientes elementos Cayley unitarios en KQ_8

$$\begin{aligned} u_1 &= \tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{5}x+\tfrac{4}{5}x^2+\tfrac{2}{5}x^3, \\ u_2 &= \tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{5}y+\tfrac{4}{5}y^2+\tfrac{2}{5}y^3, \\ u_3 &= \tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{5}xy+\tfrac{4}{5}x^2+\tfrac{2}{5}x^3y. \end{aligned}$$

Observación 2.1.3. En el Ejemplo 2.1.1 construímos un elemento Cayley unitario para KD_4 a partir de un elemento de orden 4 en D_4. En el Ejemplo 2.1.2, consideramos tres elementos de orden 4 del grupo de los cuaternios y a partir de cada uno de ellos obtenemos un elemento Cayley unitario para KQ_8. Si bien $D_4 \ncong Q_8$ se puede observar que los elementos Cayley unitarios tienen la misma estructura, es decir, si z es un elemento de orden 4 en alguno de estos dos grupos entonces $u = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}z + \frac{4}{5}z^2 + \frac{2}{5}z^3$ es un elemento Cayley unitario obtenido a partir del antisimétrico $z - z^{-1}$. Hemos probado lo siguiente

Lema 2.1.4. *Sea $x \in G$ con $o(x) = n > 2$. Si $(1 + (x - x^{-1}))^{-1}$ existe, entonces el elemento Cayley unitario $u_{[x-x^{-1}]}$ está definido y no depende del grupo G.*

Por el Lema anterior, es suficiente trabajar con grupos cíclicos $C_n = \langle x \rangle$, $o(x) > 2$. En las siguientes tablas se muestran los inversos de elementos de la forma $1 + (x - x^{-1})$ y sus respectivos elementos Cayley unitarios, en función del orden de x ($3 \le o(x) \le 8$).

n	$(1 + (x - x^{-1}))^{-1}$
3	$\frac{1}{2} + 0x + \frac{1}{2}x^2$
4	$\frac{3}{5} - \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{5}x^3$
5	$\frac{5}{11} - \frac{2}{11}x + \frac{3}{11}x^2 + \frac{1}{11}x^3 + \frac{4}{11}x^4$
6	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + 0x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5$
7	$\frac{13}{29} - \frac{7}{29}x + \frac{6}{29}x^2 - \frac{1}{29}x^3 + \frac{5}{29}x^4 + \frac{4}{29}x^5 + \frac{9}{29}x^6$
8	$\frac{7}{15} - \frac{4}{15}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{15}x^3 + \frac{2}{15}x^4 + \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{5}x^6 + \frac{4}{15}x^7$

Cuadro 2.2: Inversos de $(1 + (x - x^{-1}))$.

n	$u = (1 - x + x^{-1})(1 + x - x^{-1})^{-1}$
3	$0 + 0x + x^2$
4	$\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}x^2 + \frac{2}{5}x^3$
5	$-\frac{1}{11} - \frac{4}{11}x + \frac{6}{11}x^2 + \frac{2}{11}x^3 + \frac{8}{11}x^4$
6	$0 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + 0x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^5$
7	$-\frac{3}{29} - \frac{14}{29}x + \frac{12}{29}x^2 - \frac{2}{29}x^3 + \frac{10}{29}x^4 + \frac{8}{29}x^5 + \frac{18}{29}x^6$
8	$\frac{7}{15} - \frac{8}{15}x + \frac{6}{15}x^2 - \frac{2}{15}x^3 + \frac{4}{15}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{6}{15}x^6 + \frac{8}{15}x^7$

Cuadro 2.4: Cayley unitarios obtenidos a partir de $(x + x^{-1})$.

Los resultados que se muestran en Tabla 2.2 sugieren que $1+(x-x^{-1})$ es invertible en KC_n cuando K es un cuerpo de característica cero, además los coeficientes muestran una regularidad muy especial, pues a partir del coeficiente de x^2 cada uno de ellos es la suma de los dos anteriores. Para probar que estos dos hechos son ciertos, mostraremos una forma general de $(1 + (x - x^{-1}))^{-1}$.

Sea x un elemento de orden n. El inverso de $(1 + (x - x^{-1}))^{-1}$, en caso de existir, debe ser de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$. Al efectuar el producto

$$(1 + (x - x^{-1}))(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) = 1,$$

resulta el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 + a_{n-1} - a_1 & = & 1 \\ a_1 + a_0 - a_2 & = & 0 \\ a_2 + a_1 - a_3 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} + a_{n-2} - a_0 & = & 0, \end{array}\right.$$

es decir, la existencia del inverso de $1+(x+x^{-1})$ depende de la existencia de soluciones para este sistema. El siguiente ejemplo es un caso particular, cuando $o(x) = 8$, en él se evidencia una regularidad que permitirá generalizar la forma que tiene $(1 + (x - x^{-1}))^{-1}$.

Ejemplo 2.1.5. Sean $C_8 = \langle x \rangle$ y K un cuerpo con característica cero. A continuación mostraremos un procedimiento, el cual es descrito en [9], para encontrar a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, $a_7 \in K$ tales que

$$\left(1 + \left(x - x^{-1}\right)\right)\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_7 x^7\right) = 1.$$

Al realizar el producto anterior, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_0 + a_7 - a_1 & = & 1 \\ a_1 + a_0 - a_2 & = & 0 \\ a_2 + a_1 - a_3 & = & 0 \\ a_3 + a_2 - a_4 & = & 0 \\ a_4 + a_3 - a_5 & = & 0 \\ a_5 + a_4 - a_6 & = & 0 \\ a_6 + a_5 - a_7 & = & 0 \\ a_7 + a_6 - a_0 & = & 0. \end{cases}$$

Resolveremos este sistema siguiendo los siguientes pasos:

Primer paso: Despejamos a_7 de la 8^a ecuación y la sustituimos en la 7^a ecuación; luego despejamos a_6 de la 7^a ecuación y la sustituimos en la 6^a ecuación y así sucesivamente. De esta manera obtenemos

$$\begin{cases} a_0 &= \dfrac{21 - 21a_7}{33} \\ a_1 &= \dfrac{a_0 - 13a_0}{21} \\ a_2 &= \dfrac{a_0 - 8a_1}{13} \\ a_3 &= \dfrac{a_0 - 5a_2}{8} \\ a_4 &= \dfrac{a_0 - 3a_3}{5} \\ a_5 &= \dfrac{a_0 - 2a_4}{3} \\ a_6 &= \dfrac{a_0 - a_5}{2} \\ a_7 &= a_0 - a_6. \end{cases}$$

<u>Segundo paso:</u> Escribamos ahora todos los a_i's en términos de a_7 , reemplazando a_0 en a_1, a_0 y a_1 en a_2 y así sucesivamente.

$$\begin{cases} a_0 &= \dfrac{21}{33}(1 - a_7) \\ a_1 &= -\dfrac{12}{33}(1 - a_7) \\ a_2 &= \dfrac{9}{33}(1 - a_7) \\ a_3 &= -\dfrac{3}{33}(1 - a_7) \\ a_4 &= \dfrac{6}{33}(1 - a_7) \\ a_5 &= \dfrac{3}{33}(1 - a_7) \\ a_6 &= \dfrac{9}{33}(1 - a_7) \\ a_7 &= \dfrac{12}{33}(1 - a_7). \end{cases}$$

<u>Tercer paso:</u> Encontramos los valores de los a_i's calculando a_7 y reemplazandolo en

las demás ecuaciones. De esta forma se obtiene

$$a_7 = \frac{4}{15} \qquad a_5 = \frac{1}{15} \qquad a_3 = -\frac{1}{15} \qquad a_1 = -\frac{4}{15}$$
$$a_6 = \frac{3}{15} \qquad a_4 = \frac{2}{15} \qquad a_2 = \frac{3}{15} \qquad a_0 = \frac{7}{15}.$$

Como ya mencionamos los coeficientes siguen la ecuación de recurrencia $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ para todo $i \geq 2$. Esta es precisamente la ecuación de recurrencia que sigue la sucesión de Fibonacci con términos iniciales $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. Teniendo esto en cuenta, buscamos la forma de relacionar los coeficientes con los números en la sucesión de Fibonacci y encontramos que el último sistema puede ser reescrito así

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 &=& \dfrac{0+21}{34-1}(1-a_7) = \dfrac{F_0+F_8}{F_9-1}(1-a_7) \\ a_1 &=& \dfrac{1-13}{34-1}(1-a_7) = \dfrac{F_1-F_7}{F_9-1}(1-a_7) \\ a_2 &=& \dfrac{1+8}{34-1}(1-a_7) = \dfrac{F_2+F_6}{F_9-1}(1-a_7) \\ a_3 &=& \dfrac{2-5}{34-1}(1-a_7) = \dfrac{F_3-F_5}{F_9-1}(1-a_7) \\ a_4 &=& \dfrac{3+3}{34-1}(1-a_7) = \dfrac{F_4+F_4}{F_9-1}(1-a_7) \\ a_5 &=& \dfrac{5-2}{34-1}(1-a_7) = \dfrac{F_5-F_3}{F_9-1}(1-a_7) \\ a_6 &=& \dfrac{8+1}{34-1}(1-a_7) = \dfrac{F_6+F_2}{F_9-1}(1-a_7) \\ a_7 &=& \dfrac{13-1}{34-1}(1-a_7) = \dfrac{F_7-F_1}{F_9-1}(1-a_7). \end{array} \right.$$

Podemos notar que para $n = 8$:

$$a_i = \frac{F_i + (-1)^i F_{n-i}}{F_{n+1}-1}(1-a_{n-1})\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Despejando a_{n-1} de aquí tenemos que

$$a_{n-1} = \frac{F_{n-1} + (-1)^{n-1}}{F_{n+1} + F_{n-1} - (1 + (-1)^n)}$$

luego,

$$1 - a_{n-1} = \frac{F_{n+1} - 1}{F_{n+1} + F_{n-1} - (1 + (-1)^n)}$$

de esta forma

$$a_i = \frac{F_i + (-1)^i F_{n-i}}{F_{n+1} + F_{n-1} - (1 + (-1)^n)}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Esto nos motiva a enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.1.6. *Sean $x \in G$ un elemento de orden $n > 2$ y K un cuerpo con característica cero. Entonces el elemento $1+x-x^{-1}$ es invertible en KG y su inverso está dado por $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, donde*

$$a_i = \frac{F_i + (-1)^i F_{n-i}}{F_{n+1} + F_{n-1} - (1 + (-1)^n)}, \qquad \textit{para } i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

No vamos a demostrar este resultado por ahora, más adelante veremos que es consecuencia inmediata de un teorema más general.

2.2. Cayley Unitarios a partir de $\alpha\left(x - x^{-1}\right)$

En esta Sección veremos como construir elementos Cayley unitarios a partir de antisimétricos de la forma $\alpha(x - x^{-1})$. Con el fin de cumplir este propósito, vamos primero a definir una ecuación de recurrencia más general que la que rige a la sucesión de Fibonacci, posteriormente vamos a establecer un resultado que muestra como determinar $(1 + \alpha(x - x^{-1}))^{-1}$.

2.2.1. Una sucesión recurrente

Para $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ se define la sucesión $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de forma recursiva de la siguiente forma

$$G_0 = 0,\ G_1 = 1 \text{ y } G_i = \alpha^2 G_{i-2} + G_{i-1} \text{ para } i \geq 2. \tag{2.2}$$

A continuación vamos a usar técnicas de funciones generadoras como las mostradas en [2] y [11], para obtener una expresión que permita calcular los elementos en la sucesión $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un número fijo de pasos. Por ejemplo una expresión de este estilo para la sucesión de Fibonacci es la conocida fórmula de Binet.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Sea $G(t) = \sum_{i=0}^{\infty} G_i t^i$ la función generadora de la sucesión $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Por la Proposición 4.8 en [2] la función generadora está dada por

$$G(t) = \frac{C(t)}{1 - t - \alpha^2 t^2}$$

donde $C(t) = C_0 + C_1 t$, así

$$(1 - t - \alpha^2 t^2)(G_0 + G_1 t + G_2 t^2 + \cdots) = C_0 + C_1 t,$$

$$G_0 + (G_1 - G_0)t + (G_2 - G_1 - G_0\alpha^2) + \cdots = C_0 + C_1 t.$$

Considerando la última igualdad y que $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ se encuentra que $C_0 = 0$ y $C_1 = 1$. De esta forma

$$G(t) = \frac{t}{1 - t - \alpha^2 t^2}.$$

Usando descomposición en fracciones simples encontramos que

$$\frac{t}{1-t-\alpha^2t^2} = \frac{A}{\alpha(t-t_1)} + \frac{B}{\alpha(t_2-t)},$$

donde $A = \dfrac{t_1}{\alpha(t_2-t_1)}$, $B = \dfrac{t_2}{\alpha(t_2-t_1)}$, $t_1 = \dfrac{1+\sqrt{1+4\alpha^2}}{-2\alpha^2}$ y $t_2 = \dfrac{1+\sqrt{1-4\alpha^2}}{-2\alpha^2}$. Sustituyendo obtenemos

$$\frac{t}{1-t-\alpha^2t^2} = \frac{1}{\alpha^2(t_2-t_1)}\left(\frac{t_1}{t-t_1} - \frac{t_2}{t-t_2}\right).$$

Dado que $t_1t_2 = -\dfrac{1}{\alpha^2}$, tenemos que

$$\frac{t_1}{t-t_1} - \frac{t_2}{t-t_2} = \frac{t_1t-t_2t}{(t-t_1)(t-t_2)} = \frac{\alpha^2(t_2t-t_1t)}{1+\alpha^2t_2t\alpha^2t_1t-\alpha^2t^2)}$$

$$= \frac{1+\alpha^2t_1t-1-1\alpha^2t_2t}{(1+\alpha^2t_1t)(1+\alpha^2t_2t)} = \frac{1}{1+\alpha^2t_2t} - \frac{1}{1+\alpha^2t_1t}.$$

Sea $\lambda \in K$, tenemos que en el anillo de las series formales $K[[t]]$ es cierto que $\dfrac{1}{1-\lambda t} = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^it^i$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
G(t) &= \frac{t}{1-t-\alpha^2t^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^2}}\left(\sum_{i=0}^{\infty}(\alpha^2(-t_2))^it^i - \sum_{i=0}^{\infty}(\alpha^2(-t_1))^it^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^2}}\left[\left(\frac{\left(\alpha^2\left(1+\sqrt{1+4\alpha^2}\right)\right)}{2\alpha^2}\right)^i - \left(\frac{\left(\alpha^2\left(1-\sqrt{1+4\alpha^2}\right)\right)}{2\alpha^2}\right)^i\right]t^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^2}}\left(\frac{\left(1+\sqrt{1+4\alpha^2}\right)^i - \left(1-\sqrt{1+4\alpha^2}\right)^i}{2^i}\right)t^i.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$G_i = \frac{\left(1+\sqrt{1+4\alpha^2}\right)^i - \left(1-\sqrt{1+4\alpha^2}\right)^i}{2^i\sqrt{1+4\alpha^2}}. \tag{2.3}$$

Más aún, dado que

$$\begin{aligned}
&\left(1+\sqrt{1+4\alpha^2}\right)^i - \left(1-\sqrt{1+4\alpha^2}\right)^i \\
&= \sum_m \binom{i}{m} \left(\sqrt{1+4\alpha^2}\right)^m - \sum_m \binom{i}{m} (-1)^m \left(\sqrt{1+4\alpha^2}\right)^m \\
&= 2\sqrt{1+4\alpha^2} \sum_{m-impar} \binom{i}{m} \left(1+4\alpha^2\right)^{\frac{m-1}{2}},
\end{aligned}$$

obtenemos

$$G_i = \frac{1}{2^{i-1}} \sum_{m-impar} \binom{i}{m} \left(1+4\alpha^2\right)^{\frac{m-1}{2}}. \tag{2.4}$$

2.2.2. Encontrando $\left(1+\alpha\left(x-x^{-1}\right)\right)^{-1}$

Sean $C_n = \langle x \rangle$ tal que $n > 2$ y α un elemento no nulo de un cuerpo K con característica cero. Veamos como encontrar $(1+\alpha(x-x^{-1}))^{-1}$. Para establecer una forma general para tal inverso, estudiaremos inicialmente el caso particular en que $o(x) = 8$.

Sean $C_8 = \langle x \rangle$ y α un elemento no nulo de K. Queremos encontrar a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 y a_7 en K tales que

$$\left(1+\alpha\left(x-x^{-1}\right)\right)\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+a_7x^7\right) = 1.$$

Esto es equivalente a resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} a_0 + \alpha a_7 - \alpha a_1 & = & 1 \\ a_1 + \alpha a_0 - \alpha a_2 & = & 0 \\ a_2 + \alpha a_1 - \alpha a_3 & = & 0 \\ a_3 + \alpha a_2 - \alpha a_4 & = & 0 \\ a_4 + \alpha a_3 - \alpha a_5 & = & 0 \\ a_5 + \alpha a_4 - \alpha a_6 & = & 0 \\ a_6 + \alpha a_5 - \alpha a_7 & = & 0 \\ a_7 + \alpha a_6 - \alpha a_0 & = & 0. \end{cases}$$

Vamos a resolver este sistema siguiendo los pasos descritos en el Ejemplo 2.1.5.

<u>Primer paso:</u>

$$\begin{cases} a_0 & = & \dfrac{(1-\alpha a_7)(1+5\alpha^2+6\alpha^4+\alpha^6)}{1+7\alpha^2+15\alpha^4+10\alpha^6} \\ a_1 & = & \dfrac{\alpha(\alpha^6 a_0-(1+5\alpha^2+6\alpha^4+\alpha^6)a_0)}{1+6\alpha^2+10\alpha^4+4\alpha^6} \\ a_2 & = & \dfrac{\alpha(\alpha^5 a_0-(1+4\alpha^2+3\alpha^4)a_1)}{1+5\alpha^2+6\alpha^4+\alpha^6} \\ a_3 & = & \dfrac{\alpha(\alpha^4 a_0-(1+2\alpha^2+\alpha^4)a_2)}{1+4\alpha^2+3\alpha^4} \\ a_4 & = & \dfrac{\alpha(\alpha^3 a_0-(1+2\alpha^2)a_3)}{1+2\alpha^2+\alpha^4} \\ a_5 & = & \dfrac{\alpha(\alpha^2 a_0-(1+\alpha^2)a_4)}{1+2\alpha^2} \\ a_6 & = & \dfrac{\alpha(\alpha a_0-a_5)}{1+\alpha^2} \\ a_7 & = & \alpha(a_0-a_6). \end{cases}$$

Segundo paso:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
a_0 & = & \dfrac{1+6\alpha^2+10\alpha^4+4\alpha^6}{1+7\alpha^2+15\alpha^4+10\alpha^6}(1-\alpha a_7)\\[2ex]
a_1 & = & \dfrac{-\alpha-5\alpha^3-6\alpha^5}{1+7\alpha^2+15\alpha^4+10\alpha^6}(1-\alpha a_7)\\[2ex]
a_2 & = & \dfrac{\alpha^2+4\alpha^4+4\alpha^6}{1+7\alpha^2+15\alpha^4+10\alpha^6}(1-\alpha a_7)\\[2ex]
a_3 & = & \dfrac{-2\alpha^5-\alpha^3}{1+7\alpha^2+15\alpha^4+10\alpha^6}(1-\alpha a_7)\\[2ex]
a_4 & = & \dfrac{2\alpha^4+4\alpha^6}{1+7\alpha^2+15\alpha^4+10\alpha^6}(1-\alpha a_7)\\[2ex]
a_5 & = & \dfrac{2\alpha^5+\alpha^3}{1+7\alpha^2+15\alpha^4+10\alpha^6}(1-\alpha a_7)\\[2ex]
a_6 & = & \dfrac{4\alpha^6+4\alpha^4+\alpha^2}{1+7\alpha^2+15\alpha^4+10\alpha^6}(1-\alpha a_7)\\[2ex]
a_7 & = & \dfrac{6\alpha^5+5\alpha^3+\alpha}{1+7\alpha^2+15\alpha^4+10\alpha^6}(1-\alpha a_7).
\end{array}\right.$$

Los primeros diez términos de la sucesión $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ descrita anteriormente son:

$G_0 = 0$ $\qquad$ $G_3 = 1+\alpha^2$ $\qquad$ $G_6 = 1+4\alpha^2+3\alpha^4$

$G_1 = 1$ $\qquad$ $G_4 = 1+2\alpha^2$ $\qquad$ $G_7 = 1+5\alpha^2+6\alpha^4+\alpha^6$

$G_2 = 1$ $\qquad$ $G_5 = 1+3\alpha^2+\alpha^4$ $\qquad$ $G_8 = 1+6\alpha^2+10\alpha^4+4\alpha^6$

$$G_9 = 1+7\alpha^2+15\alpha^4+10\alpha^6+\alpha^8.$$

Reescribiendo los a_i's en términos de los G_i's tenemos que

$$\begin{cases} a_0 &= \dfrac{\alpha^8 G_0 + (-\alpha)^0 G_8}{G_9 - \alpha^8}(1 - \alpha a_7) \\ a_1 &= \dfrac{\alpha^7 G_1 + (-\alpha)^1 G_7}{G_9 - \alpha^8}(1 - \alpha a_7) \\ a_2 &= \dfrac{\alpha^6 G_2 + (-\alpha)^2 G_6}{G_9 - \alpha^8}(1 - \alpha a_7) \\ a_3 &= \dfrac{\alpha^5 G_3 + (-\alpha)^3 G_5}{G_9 - \alpha^8}(1 - \alpha a_7) \\ a_4 &= \dfrac{\alpha^4 G_4 + (-\alpha)^4 G_4}{G_9 - \alpha^8}(1 - \alpha a_7) \\ a_5 &= \dfrac{\alpha^3 G_5 + (-\alpha)^5 G_3}{G_9 - \alpha^8}(1 - \alpha a_7) \\ a_6 &= \dfrac{\alpha^2 G_6 + (-\alpha)^6 G_2}{G_9 - \alpha^8}(1 - \alpha a_7) \\ a_7 &= \dfrac{\alpha^1 G_7 + (-\alpha)^7 G_1}{G_9 - \alpha^8}(1 - \alpha a_7) \end{cases}$$

Luego para $n = 8$,

$$a_i = \frac{\alpha^{n-i} G_i + (-\alpha)^i G_{n-i}}{G_{n+1} - \alpha^n}(1 - \alpha a_{n-1}), \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

y de aquí que

$$a_i = \frac{\alpha^{n-i} G_i + (-\alpha)^i G_{n-i}}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n (1 + (-1)^n)}, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

El siguiente resultado generaliza el Teorema 2.1.6.

Teorema 2.2.1. *Sean $x \in G$ un elemento de orden $n > 2$ y $\alpha \in K$, con K una extensión real de $\mathbb{Q}$. Entonces el elemento $1 + \alpha(x - x^{-1})$ es invertible en KG y su inverso está dado por $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$, donde*

$$a_i = \frac{\alpha^{n-i} G_i + (-\alpha)^i G_{n-i}}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n (1 + (-1)^n)}, \tag{2.5}$$

para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Demostración. Probemos primero que $G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1+(-1)^n)$ es diferente de cero. Si n es impar tenemos que $G_{n+1}+\alpha^2 G_{n-1}-\alpha^n(1+(-1)^n) = G_{n+1}+\alpha^2 G_{n-1}$. Como $\alpha^2 \geq 0$ se sigue de (2.4) que $G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} > 0$. Si n es par tenemos que $G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1+(-1)^n) = G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - 2\alpha^n$. Dado que $n+1$ es impar, tenemos de (2.4) que

$$G_n + 1 = \frac{1}{2^n} \sum_{m-impar} \binom{n+1}{m} \left(1+4\alpha^2\right)^{\frac{m-1}{2}},$$

cuando $m = n+1$ tenemos el sumando

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n}\binom{n+1}{n+1}\left(1+4\alpha^2\right)^{\frac{n}{2}} &= \frac{1}{2^n} + \binom{n/2}{1}\frac{4\alpha^2}{2^n} + \binom{n/2}{2}\frac{16\alpha^4}{2^n} + \cdots + \frac{(4\alpha^2)^{\frac{n}{2}}}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n} + \binom{n/2}{1}\frac{4\alpha^2}{2^n} + \binom{n/2}{2}\frac{16\alpha^4}{2^n} + \cdots + \alpha^n > \alpha^n. \end{aligned}$$

Esto muestra que $G_{n+1} > \alpha^n$. De forma análoga se observa que $G_{n-1} > \alpha^{n-2}$. En consecuencia $G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} > 2\alpha^n$ y así $G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - 2\alpha^n > 0$.

De esta forma los a_i's están bien definidos. Ahora sea $x \in G$ un elemento de orden $n > 2$. Con el fin de probar que $a_0 + a_1 x + \cdots a_{n-1}x^{n-1}$ es el inverso de $1+\alpha(x-x^{-1})$ es suficiente mostrar que $a_0 + \alpha a_{n-1} - \alpha a_1 = 1$, $a_{n-1} + \alpha a_{n-2} - \alpha a_0 = 0$ y $a_i + \alpha a_{i-1} - \alpha a_{i+1} = 0$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$. Usando (2.2) y (2.5) tenemos que

$$\begin{aligned} a_0 + \alpha a_{n-1} - \alpha a_1 &= \frac{\alpha^n G_0 + G_n + \alpha(\alpha G_{n-1} + (-\alpha)^{n-1}G_1) - \alpha(\alpha^{n-1}G_1 - \alpha G_{n-1})}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1+(-1)^n)} \\ &= \frac{G_n + \alpha^2 G_{n-1} - (-1)^n\alpha^n - \alpha^n + \alpha^2 G_{n-1}}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1+(-1)^n)} \\ &= \frac{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1+(-1)^n)}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1+(-1)^n)} = 1. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&a_{n-1} + \alpha a_{n-2} - \alpha a_0\\
&= \frac{\alpha G_{n-1} + (-\alpha)^{n-1} G_1 + \alpha(\alpha^2 G_{n-2} + (-\alpha)^{n-2} G_2) - \alpha(\alpha^n G_0 + (-\alpha)^0 G_n)}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1 + (-1)^n)}\\
&= \frac{\alpha G_{n-1} + (\alpha)^{n-1} + \alpha^3 G_{n-2} - (-\alpha)^{n-1} - \alpha G_n)}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1 + (-1)^n)}\\
&= \frac{\alpha(G_{n-1} + \alpha^2 G_{n-2} - G_n)}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1 + (-1)^n)} = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_i + \alpha a_{i-1} - \alpha a_{i+1}\\
&= \frac{\alpha^{n-i} G_i + (-\alpha)^i G_{n-i} + \alpha(\alpha^{n-i+1} G_{i-1} + (-\alpha)^{i-1} G_{n-i+1}) - \alpha(\alpha^{n-i-1} G_{i+1} + (-\alpha)^{i+1} G_{n-i-1})}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1 + (-1)^n)}\\
&= \frac{\alpha^{n-i}(G_i - G_{i+1} + \alpha^2 G_{i-1}) + (-\alpha)^i (G_{n-i} - G_{n-i+1} + \alpha^2 G_{n-i-1})}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1 + (-1)^n)} = 0.
\end{aligned}
$$

Lo que demuestra el resultado. □

Al tomar $\alpha = 1$ en el Teorema 2.2.1 tenemos como consecuencia inmediata el Teorema 2.1.6.

2.2.3. Cayley unitarios obtenidos a partir de $\alpha\left(x - x^{-1}\right)$

El siguiente resultado muestra como construir elementos Cayley unitarios $u_{[k]}$ en KG para $k = \alpha(x - x^{-1})$ donde K es una extensión real de $\mathbb{Q}$. Sean $x \in G$ tal que $o(x) = n > 2$ y $\alpha \in K$ diferente de cero, donde K es una extensión real de $\mathbb{Q}$.

Teorema 2.2.2. *Sean $x \in G$ un elemento de orden $n > 2$, $\alpha \in K$ y $k = \alpha(x - x^{-1})$, donde K es una extensión real de $\mathbb{Q}$. Entonces el elemento Cayley unitario $u_{[k]}$ está dado por $b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}$, donde*

$$
b_0 = \frac{G_n - 2\alpha^2 G_{n-1} + \alpha^n(1 + (-1)^n)}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1 + (-1)^n)} \quad y \quad b_i = 2a_i, \ \ para \ \ i = 1, \dots, n-1, \quad (2.6)
$$

y los a_i's son dados por (2.5).

Demostración. Tenemos que

$$u_{[k]} = \left(1 - \alpha\left(x - x^{-1}\right)\right)\left(1 + \alpha\left(x - x^{-1}\right)\right)^{-1}.$$

Ahora, por el Teorema 2.2.1

$$(1 + \alpha(x - x^{-1}))^{-1} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1},$$

donde los a_i's son dados por (2.5). Luego,

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \alpha\left(x - x^{-1}\right)\right)\left(1 + \alpha\left(x - x^{-1}\right)\right)^{-1} = \left(1 - \alpha\left(x - x^{-1}\right)\right)\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}\right)\\
&= \left(a_0 - \alpha a_{n-1} + \alpha a_1\right) + \cdots + \left(a_i - \alpha a_{i-1} + \alpha a_{i+1}\right)x^i + \cdots + \left(a_{n-1} - \alpha a_{n-2} + \alpha a_0\right)x^{n-1}.
\end{aligned}$$

De aquí, igualando coeficientes, obtenemos

$$\begin{aligned}
b_0 &= (a_0 - \alpha a_{n-1} + \alpha a_1),\\
b_i &= (a_i - \alpha a_{i-1} + \alpha a_{i+1}) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots n-1\}
\end{aligned}$$

Usando (2.5) encontramos que

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{\alpha^n G_0 + G_n - \alpha(\alpha G_{n-1} + (-\alpha)^{n-1}G_1) + \alpha(\alpha^{n-1}G_1 - \alpha G_{n-1})}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1 + (-1)^n)}\\
&= \frac{G_n - \alpha^2 G_{n-1} + (-\alpha)^n + \alpha^n - \alpha^2 G_{n-1}}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1 + (-1)^n)}\\
&= \frac{G_n - 2\alpha^2 G_{n-1} + \alpha^n(1 + (-1)^n)}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1 + (-1)^n)}.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
b_i &= \\
&= \frac{\alpha^{n-i}G_i + (-\alpha)^i G_{n-i} - \alpha(\alpha^{n-i+1}G_{i-1} + (-\alpha)^{i-1}G_{n-i+1}) + \alpha(\alpha^{n-i-1}G_{i+1} + (-\alpha)^{i+1}G_{n-i-1})}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1+(-1)^n)} \\
&= \frac{\alpha^{n-i}G_i + (-\alpha)^i G_{n-i} - \alpha^{n-i+2}G_{i-1} + (-\alpha)^i G_{n-i+1} + \alpha^{n-i}G_{i+1} - (-\alpha)^{i+2}G_{n-i-1})}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1+(-1)^n)} \\
&= \frac{\alpha^{n-i}G_i + (-\alpha)^i G_{n-i} + \alpha^{n-i}(G_{i+1} - (\alpha)^2 G_{i-1}) + (-\alpha)^i(G_{n-i-1} - \alpha^2 G_{n-i-1})}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1+(-1)^n)} \\
&= \frac{\alpha^{n-i}G_i + (-\alpha)^i G_{n-i} + \alpha^{n-i}G_i + (-\alpha)^i G_{n-i}}{G_{n+1} + \alpha^2 G_{n-1} - \alpha^n(1+(-1)^n)} \\
&= 2a_i.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2.3. $\mathbb{Q}C_3$

Sea $C_3 = \langle x \rangle$, entonces $\mathbb{Q}C_3^- = \{\alpha(x - x^{-1}); \alpha \in \mathbb{Q}\}$. De esta manera todo elemento Cayley unitaro de $\mathbb{Q}C_3$ es obtenido a partir de $k = \alpha(x - x^{-1})$, para algún $\alpha \in \mathbb{Q}$. Ahora, del Teorema 2.2.2 se sigue que $u_{[\alpha(x-x^{-1})]}$ esta dado por $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, donde

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{G_3 - 2\alpha^2 G_2 + \alpha^3(1+(-1)^3)}{G_4 + \alpha^2 G_2 - \alpha^3(1+(-1)^3)} \\
&= \frac{(1+\alpha^2) - 2\alpha^2}{(1+2\alpha^2) + \alpha^2} \\
&= \frac{1-\alpha^2}{1+3\alpha^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= 2\frac{\alpha^2 G_1 + (-\alpha)^1 G_2}{G_4 + \alpha^2 G_2 - \alpha^3(1+(-1)^3)} \\
&= 2\frac{\alpha^2 - \alpha}{(1+2\alpha^2) + \alpha^2} \\
&= \frac{2\alpha(\alpha-1)}{1+3\alpha^2},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} b_2 &= 2\frac{\alpha^1 G_2 + (-\alpha)^2 G_1}{G_4 + \alpha^2 G_2 - \alpha^3(1 + (-1)^3)} \\ &= 2\frac{\alpha^2 + \alpha}{(1 + 2\alpha^2) + \alpha^2} \\ &= \frac{2\alpha(\alpha + 1)}{1 + 3\alpha^2}. \end{aligned}$$

Así, todo elemento Cayley unitario de $\mathbb{Q}C_3$ es de la forma

$$\frac{1}{1 + 3\alpha^2}(1 - \alpha^2 + 2\alpha(\alpha - 1)x + 2\alpha(\alpha + 1)x^2),$$

para algún $\alpha \in \mathbb{Q}$, esto es

$$\mathcal{U}n^C(\mathbb{Q}C_3) = \left\{ \frac{1}{1 + 3\alpha^2}(1 - \alpha^2 + 2\alpha(\alpha - 1)x + 2\alpha(\alpha + 1)x^2); \alpha \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathcal{U}n(\mathbb{Q}C_3).$$

Note que $\mathcal{U}n^C(\mathbb{Q}C_3)$ no es subgrupo de $\mathcal{U}n(\mathbb{Q}C_3)$, pues el producto de dos elementos Cayley unitarios no es necesariamente Cayley unitario. De hecho, sean $k_1 = -(x - x^{-1})$ y $k_2 = -\frac{1}{3}(x - x^{-1})$, entonces

$$u_{[k_1]} = x \quad \text{y} \quad u_{[k_2]} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^2,$$

de ahí que

$$u_{[k_1]}u_{[k_2]} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2.$$

Ahora

$$1 + u_{[k_1]}u_{[k_2]} = \frac{2}{3}(1 + x + x^2)$$

el cual es un divisor de cero, pues

$$\frac{2}{3}(1 + x + x^2)(1 - x) = \frac{2}{3}(1 - x^3) = 0 \qquad (o(x) = 3).$$

Luego, $1+u_{[k_1]}u_{[k_2]}$ no es invertible y por la Proposición 2.0.7 concluimos que $u_{[k_1]}u_{[k_2]}$ no es un elemento Cayley unitario de $\mathbb{Q}C_3$

Ejemplo 2.2.4. $\mathbb{Q}S_3$

Sea $S_3 = \langle x, y \,|\, x^2 = 1, y^3 = 1, xy = y^{-1}x\rangle$. Dado que los único elementos de orden mayor que 2 son y^{-1} e y, se sigue que $\mathbb{Q}S_3{}^- = \{\alpha(y - y^{-1}); \alpha \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}C_3{}^-$. Luego

$$\begin{aligned}\mathcal{U}n^C(\mathbb{Q}S_3) &= \mathcal{U}n^C(\mathbb{Q}C_3)\\ &= \left\{\frac{1}{1+3\alpha^2}(1-\alpha^2+2\alpha(\alpha-1)x+2\alpha(\alpha+1)x^2); \alpha \in \mathbb{Q}\right\}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.5. $\mathbb{Q}C_4$

Sea $C_4 = \langle x\rangle$. A partir de que $o(x^2) = 2$, $o(x) = 4$ y $o(x^3) = 4$, además que $x^{-1} = x^3$, se sigue que todo elemento Cayley unitario de $\mathbb{Q}C_4$ es obtenido a partir de $k = \alpha(x - x^{-1})$, para algún $\alpha \in \mathbb{Q}$, i.e., $\mathbb{Q}C_4^- = \{\alpha(x - x^{-1}); \alpha \in \mathbb{Q}\}$. Ahora, del Teorema 2.2.2 se sigue que $u_{[\alpha(x-x^{-1})]}$ esta dado por $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$, donde

$$b_0 = \frac{1}{1+4\alpha^2},\ b_1 = -\frac{2\alpha}{1+4\alpha^2},\ b_2 = \frac{4\alpha^2}{1+4\alpha^2} \quad \text{y} \quad b_3 = \frac{2\alpha}{1+4\alpha^2}.$$

Luego,

$$\mathcal{U}n^C(\mathbb{Q}C_4) = \left\{\frac{1}{1+4\alpha^2}(1-2\alpha x+4\alpha^2x^2+2\alpha x^3); \alpha \in \mathbb{Q}\right\} \subseteq \mathcal{U}n(\mathbb{Q}C_4).$$

A partir de la forma de los elementos en $\mathcal{U}n^C(\mathbb{Q}C_4)$, se puede concluir que x, x^2 y x^3 no son Cayley unitarios en $\mathbb{Q}C_4$, puesto que tienen término independiente nulo.

Ejemplo 2.2.6. $\mathbb{Q}D_4$

Sea $D_4 = \langle x, y | x^2 = 1, y^4 = 1, xy = y^{-1}x\rangle$. Los únicos elementos con orden mayor que 2 son y^{-1} e y, por tanto

$$\mathbb{Q}D_4{}^- = \{\alpha(y - y^{-1}); \alpha \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}D_4{}^-,$$

de esta forma

$$\mathcal{U}n^{C}(\mathbb{Q}D_4) = \mathcal{U}n^{C}(\mathbb{Q}C_4) = \left\{ \frac{1}{1+4\alpha^2}(1 - 2\alpha y + 4\alpha^2 y^2 + 2\alpha y^3); \alpha \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Ejemplo 2.2.7. $\mathbb{Q}C_5$

Sea $C_5 = \langle x \rangle$. A partir de que $o\,(x) = 5$, $o\,(x^2) = 5$, $o\,(x^3) = 5$ y $o\,(x^4) = 5$, además que $x^{-1} = x^4$ y $(x^2)^{-1} = x^3$, se sigue que todo elemento Cayley unitario de $\mathbb{Q}C_5$ es obtenido a partir de un antisimétrico con la forma

$$k = \alpha\,(x - x^{-1}) + \beta\,(x^2 - (x^2)^{-1}) = \alpha\,(x - x^4) + \beta\,(x^2 - x^3), \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{Q}.$$

Es decir,

$$\mathbb{Q}C_5^{-} = \left\{ \alpha \left(x - x^4 \right) + \beta \left(x^2 - x^3 \right); \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}.$$

En este caso no es posible usar el Teorema 2.2.2 para calcular elementos Cayley unitarios con $\alpha \neq 0 \neq \beta$. Sin embargo en [9] se muestra la siguiente presentación para los a_i's, obtenida computacionalmente

$$a_0 = \frac{\alpha^4 + 2\beta\alpha^3 - \beta^2\alpha^2 + 3\alpha^2 - 2\alpha\beta^3 + 1 + \beta^4 + 3\beta^2}{5\alpha^4 + 10\beta\alpha^3 - 5\beta^2\alpha^2 + 5\alpha^2 - 10\alpha\beta^3 + 1 + 5\beta^2 + 5\beta^4}$$

$$a_1 = \frac{\alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\beta\alpha^3 - \beta^2\alpha^2 - 3\beta\alpha^2 + \alpha\beta^2 - \alpha - 2\alpha\beta^3 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \beta^4 + \beta^3}{5\alpha^4 + 10\beta\alpha^3 - 5\beta^2\alpha^2 + 5\alpha^2 - 10\alpha\beta^3 + 1 + 5\beta^2 + 5\beta^4},$$

$$a_2 = \frac{\alpha^4 + 2\beta\alpha^3 + \alpha^3 + \alpha^2 - \beta\alpha^2 - \beta^2\alpha^2 - 2\beta\alpha - 3\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta^3 + \beta + \beta^4 + 2\beta^3}{5\alpha^4 + 10\beta\alpha^3 - 5\beta^2\alpha^2 + 5\alpha^2 - 10\alpha\beta^3 + 1 + 5\beta^2 + 5\beta^4},$$

$$a_3 = \frac{\alpha^4 + 2\beta\alpha^3 - \alpha^3 + \alpha^2 + \beta\alpha^2 - \beta^2\alpha^2 - 2\beta\alpha - 3\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta^3 + \beta + \beta^4 - 2\beta^3}{5\alpha^4 + 10\beta\alpha^3 - 5\beta^2\alpha^2 + 5\alpha^2 - 10\alpha\beta^3 + 1 + 5\beta^2 + 5\beta^4},$$

$$a_4 = \frac{\alpha^4 + 2\alpha^3 + 2\beta\alpha^3 - \beta^2\alpha^2 + 3\beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 + \alpha - 2\alpha\beta^3 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \beta^4 - \beta^3}{5\alpha^4 + 10\beta\alpha^3 - 5\beta^2\alpha^2 + 5\alpha^2 - 10\alpha\beta^3 + 1 + 5\beta^2 + \beta^4}.$$

A partir de estos coeficiente se calculan los b_i's, obteniendo

$$b_0 = \frac{1 - 3\alpha^4 + 6\beta\alpha^3 - 6\beta^3 + 3\alpha^2\beta^2 + \alpha - 3\alpha^4 + \beta^2}{5\alpha^4 + 10\beta\alpha^3 - 5\beta^2\alpha^2 + 5\alpha^2 - 10\alpha\beta^3 + 1 + 5\beta^2 + 5\beta^4}$$

$$b_1 = 2\left[\frac{\alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\beta\alpha^3 - \beta^2\alpha^2 - 3\beta\alpha^2 + \alpha\beta^2 - \alpha - 2\alpha\beta^3 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \beta^4 + \beta^3}{5\alpha^4 + 10\beta\alpha^3 - 5\beta^2\alpha^2 + 5\alpha^2 - 10\alpha\beta^3 + 1 + 5\beta^2 + 5\beta^4}\right],$$

$$b_2 = 2\left[\frac{\alpha^4+2\beta\alpha^3+\alpha^3+\alpha^2-\beta\alpha^2-\beta^2\alpha^2-2\beta\alpha-3\alpha\beta^2-2\alpha\beta^3+\beta+\beta^4+2\beta^3}{5\alpha^4+10\beta\alpha^3-5\beta^2\alpha^2+5\alpha^2-10\alpha\beta^3+1+5\beta^2+5\beta^4}\right],$$
$$b_3 = 2\left[\frac{\alpha^4+2\beta\alpha^3-\alpha^3+\alpha^2+\beta\alpha^2-\beta^2\alpha^2-2\beta\alpha-3\alpha\beta^2-2\alpha\beta^3+\beta+\beta^4-2\beta^3}{5\alpha^4+10\beta\alpha^3-5\beta^2\alpha^2+5\alpha^2-10\alpha\beta^3+1+5\beta^2+5\beta^4}\right],$$
$$b_4 = 2\left[\frac{\alpha^4+2\alpha^3+2\beta\alpha^3-\beta^2\alpha^2+3\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\alpha-2\alpha\beta^3+2\alpha\beta+\beta^2+\beta^4-\beta^3}{5\alpha^4+10\beta\alpha^3-5\beta^2\alpha^2+5\alpha^2-10\alpha\beta^3+1+5\beta^2+\beta^4}\right].$$

El denominador de los a_i's, b_i's es igual a $5(\alpha^2+\alpha\beta-\beta^2)+5(\alpha^2+\beta^2)+1$ y por tanto siempre es mayor que cero, garantizando que los a_i's y b_i's están bien definidos.

Observación 2.2.8. Sea $C_p = \langle x\rangle$ donde p es un número primo fijo. Entonces $\alpha_1(x-x^{p-1})+\alpha_3(x^3-x^{p-3})+\cdots+\alpha_{p-2}(x^{p-2}-x^2)$ es antisimétrico y cuando $1+\alpha_1(x-x^{p-1})+\alpha_3(x^3-x^{p-3})+\cdots+\alpha_{p-2}(x^{p-2}-x^2)$ sea invertible, es posible establecer una expresión para los elementos Cayley unitarios en $\mathbb{Q}C_p$. Sin embargo, hasta el momento no hay un resultado que permita calcular directamente los elementos Cayley unitario de $\mathbb{Q}C_p$ para p arbitrario, esto se debe a que es necesario establecer nuevas sucesiones recursivas del tipo $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y encontrar una regularidad en los a_i's que se relacione con dichas sucesiones.

Capítulo 3

ELEMENTOS CAYLEY UNITARIOS EN KG CON INVOLUCIÓN ORIENTADA

Sean K un cuerpo con característica cero, G un grupo con una orientación σ no trivial y una involución $*$. Sea $N = kern(\sigma) = \{g \in G : \sigma(g) = 1\}$ y consideremos la siguiente partición sobre el grupo G:

$$S_1 = \{g \in N : g^* = g\}, \qquad S_2 = \{g \in N : g^* \neq g\},$$
$$S_3 = \{g \notin N : g^* = g\}, \qquad S_4 = \{g \notin N : g^* \neq g\}.$$

Sea $\alpha \in KG$, podemos escribir este elemento de la forma

$$\alpha = \sum_{g \in S_1} \alpha_g g + \sum_{g \in S_2} \alpha_g g + \sum_{g \in S_3} \alpha_g g + \sum_{g \in S_4} \alpha_g g,$$

luego

$$\alpha^{\circledast} = \sum_{g \in S_1} \alpha_g g + \sum_{g \in S_2} \alpha_g g^* - \sum_{g \in S_3} \alpha_g g - \sum_{g \in S_4} \alpha_g g^*.$$

Por tanto $\alpha^{\circledast} = -\alpha$ si y solamente si

$$\begin{cases} \alpha_g = -\alpha_g, & \text{si } g \in S_1 \\ \alpha_{g^*} = -\alpha_g, & \text{si } g \in S_2 \\ \alpha_{g^*} = \alpha_g, & \text{si } g \in S_4 \end{cases}$$

Comparando α y $\alpha^{\circledast}$, tenemos sobre el conjunto S_1, $\alpha_g = -\alpha_g$, i.e., $2\alpha_g = 0$, pero $char(K) \neq 2$. Esto permite concluir que trabajando con el conjunto de elementos antisimétricos de KG, el conjunto S_1 es vacío.

Por tanto, como $K-$módulo, KG^- es generado por la unión de los siguientes conjuntos

$$\mathcal{L}_2 = \{g \notin N : g^* = g\}, \quad \mathcal{L}_3 = \{g+g^* : g \notin N, g^* = g\}, \quad \mathcal{L}_4 = \{g-g^* : g \in N, g^* \neq g\}.$$

Cuando $*$ es la involución inducida por $g \mapsto g^{-1}$ para cada $g \in G$ y σ es no trivial, tenemos que

$$KG^- = \langle \{g \in G : g \notin N, g^2 = 1\} \cup \{g + g^{-1} : g^2 \neq 1, g \notin N\} \cup \{g - g^{-1} : g^2 \neq 1, g \in N\} \rangle_K$$

El estudio de la obtención de elementos Cayley unitario en álgebras de grupo considerando antisimétricos $k \in \langle \{g \in G : g \notin N, g^2 = 1\} \cup \{g - g^{-1} : g^2 \neq 1, g \in N\} \rangle_K$ fue realizado en el Capítulo anterior. Además en el Lema (1.2.12-II) mostramos que si $o(x)$ es impar entonces $x \in N$. Por lo tanto, en adelante vamos a considerar antisimétricos de la forma $k = \alpha(x + x^{-1})$ tal que x es de orden n-par ($n \geq 4$), $x \notin N$ y $\alpha \in K$ no nulo.

3.1. Encontrando $\left(1+\left(x+x^{-1}\right)\right)^{-1}$

A continuación, considerando antisimétricos de la forma $(x+x^{-1})$, describiremos como obtener el inverso de $(1+(x+x^{-1}))$.

Ejemplo 3.1.1. Sean $C_4 = \langle x \rangle$ con $\sigma(x) = -1$ y sea K un cuerpo con característica cero. Si $(1+(x+x^{-1}))$ es invertible en KC_4, su inverso es de la forma $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. Esto es,

$$\left(1+\left(x+x^{-1}\right)\right)\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right) = 1.$$

Al efectuar el producto anterior, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_3 + a_0 + a_1 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 + a_0 = 0. \end{cases}$$

Sigamos el primer paso descrito en el Ejemplo 2.1.5 para resolver este sistema. Despejamos a_3 de la 4^a ecuación y la sustituimos en la 3^a ecuación obteniendo,

$$\begin{cases} a_3 + a_0 + a_1 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 - a_0 = 0 \\ a_3 = -(a_2 + a_0). \end{cases}$$

En la tercera ecuación del anterior sistema podemos notar que a_2 se elimina y por tanto no es posible continuar con este paso. Necesitamos explorar otra forma de resolver el sistema tratando de encontrar, en el proceso, una regularidad para los a_i's. A partir del sistema inicial vamos a seguir los siguiente pasos:

Primer paso: Restar la 4^a ecuación de la 3^a y restar la 2^a ecuación de la 1^a. De esta forma se obtiene

$$a_1 = a_0 \qquad \text{y} \qquad a_3 = a_2 + 1.$$

Segundo paso: Sustituir los valores obtenidos en el sistema inicial y resolver el sistema resultante, es decir,

$$\begin{cases} 2a_0 = -a_2 \\ a_0 + 2a_2 = -1, \end{cases}$$

resultando que $a_0 = \frac{1}{3}$ y $a_2 = -\frac{2}{3}$, luego $a_1 = \frac{1}{3}$ y $a_3 = \frac{1}{3}$. Así,

$$\left(1 + \left(x + x^{-1}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Ejemplo 3.1.2. Sea $C_6 = \langle x \rangle$ con $\sigma(x) = -1$ y sea K un cuerpo con característica cero. Si $(1 + (x + x^{-1}))$ es invertible en KC_6, su inverso es de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$. Esto es,

$$\left(1 + \left(x + x^{-1}\right)\right)\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5\right) = 1.$$

De aquí se obtiene el sistema

$$\begin{cases} a_5 + a_0 + a_1 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_3 + a_4 + a_5 = 0 \\ a_4 + a_5 + a_0 = 0. \end{cases}$$

Vamos a seguir los pasos descritos en el ejemplo 3.1.1.

Primer paso:

$$a_0 = a_3, \qquad a_1 = a_4, \qquad \text{y} \qquad a_5 = a_2 + 1.$$

Segundo paso: Al sustituir los anteriores valores en el sistema inicial, obtenemos

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 = -1, \end{cases}$$

lo cual es contradictorio y por tanto, $(1 + (x + x^{-1}))$ no es invertible en KC_6.

Ejemplo 3.1.3. Sea $C_8 = \langle x \rangle$ con $\sigma(x) = -1$ y sea K un cuerpo con característica cero. Si $(1 + (x + x^{-1}))$ es invertible en KC_8, su inverso es de la forma $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_7 x^7$. Esto es,

$$\left(1 + \left(x + x^{-1}\right)\right)^{-1} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_7 x^7\right) = 1.$$

De donde

$$\begin{cases} a_7 + a_0 + a_1 & = & 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 & = & 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 & = & 0 \\ a_2 + a_3 + a_4 & = & 0 \\ a_3 + a_4 + a_5 & = & 0 \\ a_4 + a_5 + a_6 & = & 0 \\ a_5 + a_6 + a_7 & = & 0 \\ a_6 + a_7 + a_0 & = & 0. \end{cases}$$

Nuevamente siguiendo los pasos descritos en el Ejemplo 3.1.1, obtenemos:

Primer paso:

$$a_0 = a_3, \quad a_1 = a_4, \quad a_2 = a_5, \quad a_3 = a_6, \quad a_4 = a_7, \quad a_5 = a_0 \qquad \text{y} \qquad a_7 = a_2 + 1.$$

Así,

$$a_0 = a_2 = a_3 = a_5 = a_6 \qquad \text{y} \qquad a_1 = a_4 = a_7.$$

<u>Segundo paso:</u> Sustituyendo,

$$\begin{cases} 2a_1 + a_0 = 1 \\ 2a_0 + a_1 = 0. \end{cases}$$

De aquí que $a_0 = -\frac{1}{3}$ y $a_1 = \frac{2}{3}$, luego $a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = -\frac{1}{3}$ y $a_4 = a_7 = \frac{2}{3}$. Así,

$$\left(1 + \left(x + x^{-1}\right)\right)^{-1} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{2}{3}x^7.$$

En la siguiente tabla se muestra el inverso de $(1 + (x + x^{-1}))$ cuando $o(x) = n$ par mayor que 2 y $\sigma(x) = -1$

n	$(1 + (x + x^{-1}))^{-1}$
4	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3$
6	NO ES INVERTIBLE
8	$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{2}{3}x^7$
10	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{3}x^7 - \frac{2}{3}x^8 + \frac{1}{3}x^9$
12	NO ES INVERTIBLE
14	$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{2}{3}x^7 - \cdots + \frac{2}{3}x^{13}$
16	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{3}x^7 - \frac{2}{3}x^8 + \cdots \frac{1}{3}x^{15}$
18	NO ES INVERTIBLE

Cuadro 3.2: Inversos de $(1 + (x + x^{-1}))$.

Si $o(x) = n$ par mayor que 2 con $\sigma(x) = -1$, podemos observar del sistema obtenido a partir de $(1+(x+x^{-1}))(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{-1}) = 1$ un aspecto interesante, este es que al despejar a_i de la ecuación i-ésima $(1 \leq i \leq n-1)$ y a_0 de la n-ésima ecuación se encuentra que

$$a_0 = -(a_{n-1} + a_{n-2}), \qquad a_1 = 1 - (a_0 + a_{n-1}) \qquad \text{y} \qquad a_i = -(a_{i-1} + a_{i-2}).$$

Esta regularidad puede verificarse fácilmente en los casos mostrados en la tabla anterior. Vamos a formalizar este hecho con en la siguiente Proposición.

Proposición 3.1.4. *Sean G un grupo, K un cuerpo con característica cero y sea el álgebra de grupo KG dotado de la involución clásica orientada. Si $o(x) = n$ par $(n \geq 4)$ y $\sigma(x) = -1$, entonces $k = (x+x^{-1}) \in KG^-$ y si $(1+k)$ es invertible en KG su inverso es de la forma $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$, donde $a_0 = -(a_{n-2}+a_{n-1})$, $a_1 = 1-(a_{n-1}+a_0)$ y $a_i = -(a_{i-2}+a_{i-1})$ para $2 \leq i \leq n-1$. Además $a_i = a_m$ donde $m \equiv i \pmod 3$.*

Demostración. Es claro que $k = (x + x^{-1}) \in KG^-$. Ahora,

$$\left(1 + \left(x + x^{-1}\right)\right)\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}\right) = 1,$$

y al efectuar el producto tenemos

$$\begin{cases} a_{n-1} + a_0 + a_1 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ \quad\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad = \vdots \\ a_{i-1} + a_i + a_{i+1} = 0 \\ a_i + a_{i+1} + a_{i+2} = 0 \\ a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} = 0 \\ \quad\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad = \vdots \\ a_{n-2} + a_{n-1} + a_0 = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación $a_1 = 1 - (a_{n-1} + a_0)$, de la segunda $a_0 = -(a_{n-2} + a_{n-1})$ y de las demás ecuaciones tenemos que $a_i = -(a_{i-2} + a_{i-1})$ para $2 \leq i \leq n-1$.
Por otro lado, de las ecuaciones $i+2$ e $i+3$ encontramos que $a_i = a_{i+3}$. Haciendo variar i vemos que $a_i = a_{i+3t}$ con $t \in \mathbb{Z}$, esto es $a_i = a_m$ donde $m \equiv i \pmod 3$. $\square$

La conclusión de la anterior Proposición muestra que los coeficientes a_i's siguen la ecuación de recurrencia $H_i = -(H_{i-2} + H_{i-1})$. Tomemos como términos iniciales de esta sucesión $H_0 = 0$ y $H_1 = 1$, luego

$H_2 = -1$	$H_5 = -1$	$H_8 = -1$	$H_{11} = -1$	$H_{14} = -1$
$H_3 = 0$	$H_6 = 0$	$H_9 = 0$	$H_{12} = 0$	$H_{16} = 0$
$H_4 = 1$	$H_7 = 1$	$H_{10} = 1$	$H_{13} = 1$	$H_{17} = 1.$

Observando los resultados mostrados en la Tabla 3.2 podemos conjeturar los siguiente.

Conjetura 3.1.5. *Sean G un grupo, K un cuerpo con característica cero y el álgebra de grupo KG dotado de la involución clásica orientada. Si $o(x) = n$ par $(n \geq 4)$ y $\sigma(x) = -1$, entonces si $(1 + k)$ es invertible en KG, su inverso es de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ y*

1. *Si $n = 6m + 2$, entonces $a_i = -\left(\dfrac{H_{i+1} - H_i}{3}\right)$ para $0 \leq i \leq n-1$.*
2. *Si $n = 6m + 4$, entonces $a_0 = \dfrac{1}{3}$ y $a_i = \dfrac{H_i - H_{i-1}}{3}$ para $1 \leq i \leq n-1$.*

En base a lo observado en la Tabla 3.2 y a la solución de los sistemas en los ejemplos mostrados surgen las ideas para probar los siguientes resultados.

Lema 3.1.6. *Sean G un grupo, K un cuerpo con característica cero y considere el álgebra de grupo KG dotado de la involución clásica orientada. Si $x \in G$ tal que $o(x) = 6t$ con $t \in \mathbb{Z}$ y $\sigma(x) = -1$, entonces $1 + (x + x^{-1})$ no es invertible en KG.*

Demostración. Si $1 + (x + x^{-1})$ es invertible en KG, su inverso es de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$. Esto es,

$$\left(1 + \left(x + x^{-1}\right)\right)\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}\right) = 1.$$

Efectuando el producto tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{n-1} + a_0 + a_1 & = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 & = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = \vdots \\ a_{i-1} + a_i + a_{i+1} & = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = \vdots \\ a_{n-4} + a_{n-3} + a_{n-2} & = 0 \\ a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} & = 0 \\ a_{n-2} + a_{n-1} + a_0 & = 0. \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones tenemos que $a_{n-1} = 1 + a_2$ y de las ecuaciones $n-2$ y $n-1$ tenemos que $a_{n-4} = a_{n-1}$. De esta forma $a_{6t-4} = 1 + a_2$ con $t \in \mathbb{Z}$. Por la Proposición 3.1.4 tenemos que $a_2 = a_{2+3t_1}$ con $t_1 \in \mathbb{Z}$ y dado que $6t - 4 = 3(2t) - 6 + 2 = 3(2t-2) + 2$, entonces $a_2 = a_{6t-4}$. Se sigue que $a_{6t-4} = 1 + a_{6t-4}$ lo cual es contradictorio y así el sistema es inconsistente. Por lo tanto $1 + (x + x^{-1})$ no es invertible en KG. $\square$

Lema 3.1.7. *Sean G un grupo, K un cuerpo con característica cero y considere el álgebra de grupo KG dotado de la involución clásica orientada. Si $x \in G$ tal que $o(x) = 6t + 2$ con $t \in \mathbb{Z}$ y $\sigma(x) = -1$, entonces $1 + (x + x^{-1})$ es invertible en KG y su inverso es de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ donde $a_0 = -\frac{1}{3}$, $a_1 = \frac{2}{3}$ y $a_i = -(a_{i-2} + a_{i-1})$ para $2 \leq i \leq n-1$.*

Demostración. Si $1 + (x + x^{-1})$ es invertible en KG, su inverso es de la forma $a_0 +$

$a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$. Esto es,

$$\left(1 + \left(x + x^{-1}\right)\right)\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}\right) = 1,$$

y al efectuar el producto obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} a_{n-1} + a_0 + a_1 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad = \vdots \\ a_{i-1} + a_i + a_{i+1} = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad = \vdots \\ a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} = 0 \\ a_{n-2} + a_{n-1} + a_0 = 0. \end{cases}$$

Por la Proposición 3.1.4 tenemos que $a_1 = a_{1+3t_1}$ y que $a_2 = a_{2+3t_2}$ con $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$. De las dos últimas ecuaciones obtenemos que $a_0 = a_{n-3}$. Dado que $n - 3 = 6k - 1 = 3(2k-1) + 2$ y que $n - 1 = 6k + 1 = 3(2k) + 1$, se sigue que $a_0 = a_2$ y que $a_1 = a_{n-1}$. Considerando esto, las primeras dos ecuaciones quedan así

$$\begin{cases} 2a_1 + a_0 = 1 \\ 2a_0 + a_1 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema encontramos que $a_0 = -\frac{1}{3}$ y $a_1 = \frac{2}{3}$. $\square$

Lema 3.1.8. *Sean G un grupo, K un cuerpo con característica cero y considere el álgebra de grupo KG dotado de la involución clásica orientada. Si $x \in G$ tal que $o(x) = 6t + 4$ con $t \in \mathbb{Z}$ y $\sigma(x) = -1$, entonces $1 + (x + x^{-1})$ es invertible en KG y su inverso es de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ donde $a_0 = \frac{1}{3}$, $a_1 = \frac{1}{3}$ y $a_i = -(a_{i-2} + a_{i-1})$ para $2 \leq i \leq n-1$.*

Demostración. Si $u = 1+(x+x^{-1}) \in \mathcal{U}(KG)$, entonces su inverso u^{-1} es de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$. Esto es,

$$\left(1 + \left(x + x^{-1}\right)\right)\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}\right) = 1,$$

que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{n-1} + a_0 + a_1 & = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 & = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = \vdots \\ a_{i-1} + a_i + a_{i+1} & = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = \vdots \\ a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} & = 0 \\ a_{n-2} + a_{n-1} + a_0 & = 0. \end{cases}$$

Por la Proposición 3.1.4 tenemos que $a_0 = a_{3t_1}$ y que $a_1 = a_{1+3t_2}$ con $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$. De las dos últimas ecuaciones obtenemos que $a_0 = a_{n-3}$. Dado que $n-3 = 6k+1 = 3(2k)+1$ y que $n-1 = 6k+3 = 3(2k+1)$, se sigue que $a_0 = a_1$ y que $a_0 = a_{n-1}$. Considerando esto, de la primera ecuación tenemos que $3a_0 = 1$ y así, $a_0 = a_1 = \frac{1}{3}$. Usando la recurrencia para los a_i's mostrada en la Proposición 3.1.4 y los valores a_0, a_1 podemos determinar los demás a_i's, esto implica que $1 + (x + x^{-1})$ es invertible en KG. □

Los anteriores Lemas nos permiten determinar el valor del término independiente y del coeficiente del término lineal en el inverso de $1+(x+x^{-1})$, cuando este existe. De la ecuación de recurrencia lineal $a_i = -a_{i-2} - a_{i-1}$ para la sucesión $(a_i)_{i\geq 2}$, definimos la sucesión $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como $b_i = a_{i+2}$. Usando técnicas de funciones generadoras vamos a establecer una forma cerrada que permita calcular los términos en la sucesión $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Usando la Proposición 4.9 en [2] tenemos que el término general de la sucesión $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$

es

$$b_n = c_1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n.$$

Si $o(x) = 6k + 4$, del Lema 3.1.8 tenemos que

$$a_2 = b_0 = c_1 + c_2 \qquad \text{y} \qquad a_3 = b_1 = c_1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + c_2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Luego,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{2}{3} \\ c_1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + c_2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema encontramos que $c_1 = c_2 = -\frac{1}{3}$. De esta forma,

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3(2^n)} \left[\left(1 - \sqrt{3}i\right)^n + \left(1 + \sqrt{3}i\right)^n \right]. \tag{3.1}$$

Si $o(x) = 6k + 2$, del Lema 3.1.7 tenemos que

$$-\frac{1}{3} = a_2 = b_0 = c_1 + c_2 \qquad \text{y} \qquad -\frac{1}{3} = a_3 = b_1 = c_1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + c_2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$$

Por tanto,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2}(c_1 + c_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(c_1 - c_2) = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Reemplazando la primera ecuación en la segunda tenemos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{1}{3} \\ \sqrt{3}i(c_1 - c_2) = -1, \end{cases}$$

y al resolver el sistema encontramos que $c_1 = -\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{6}\right)$ y $c_2 = -\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{6}\right)$. De esta forma

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3(2^{n+1})}\left[\left(1-\sqrt{3}i\right)^{n+1} + \left(1+\sqrt{3}i\right)^{n+1}\right]. \tag{3.2}$$

La prueba del siguiente resultado se sigue inmediatamente de los Lemas 3.1.6, 3.1.7 y 3.1.8, junto con la información de las expresiones (3.1) y (3.2).

Teorema 3.1.9. *Sean G un grupo, K un cuerpo con característica cero y el álgebra de grupo KG dotado de la involución clásica orientada. Sea $x \in G$ tal que $\sigma(x) = -1$. Las siguientes son validas:*

1. *Si $o(x) = 6t$, $t \in \mathbb{N}$, el elemento $(1 + (x + x^{-1}))$ no es invertible en KG.*

2. *Si $o(x) = 6t + 2$, $t \in \mathbb{N}$, el elemento $(1 + (x + x^{-1}))$ es invertible en KG y su inverso es de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{6t+1}x^{6t+1}$, donde $a_0 = -\frac{1}{3}$, $a_1 = \frac{2}{3}$ y para todo $n \geq 0$*

$$a_{n+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{3(2^{n+1})}\left[\left(1-\sqrt{3}i\right)^{n+1} + \left(1+\sqrt{3}i\right)^{n+1}\right].$$

3. *Si $o(x) = 6t + 4$, $t \in \mathbb{N}$, el elemento $(1 + (x + x^{-1}))$ es invertible en KG y su inverso es de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{6t+3}x^{6t+3}$, donde $a_0 = a_1 = \frac{1}{3}$ y para todo $n \geq 0$*

$$a_{n+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{3(2^{n})}\left[\left(1-\sqrt{3}i\right)^{n} + \left(1+\sqrt{3}i\right)^{n}\right].$$

Si bien este último resultado nos permite determinar $(1 + (x + x^{-1}))^{-1}$, los cálculos necesarios son aún dispendiosos. Los Lemas 3.1.7 y 3.1, nos permite calcular los a_i's y notar que esto siguen un ciclo; en caso que $o(x) = 6k+2$ tenemos el ciclo $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$ y en caso que $o(x) = 6k+4$ tenemos el ciclo $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$. Esto nos permite conjeturar lo siguiente.

Conjetura 3.1.10. *Sea G un grupo, K un cuerpo con característica cero y $x \in G$ con $\sigma(x) = -1$. Si $o(x)$ es par y $o(x) \neq 6t$ para algún $t \in \mathbb{N}$, entonces el elemento $(1+(x+x^{-1}))$ es invertible en KG y su inverso es de la forma $a_0+a_1x+\cdots a_{o(x)-1}x^{o(x)-1}$. Además*

1. *Si $o(x) = 6t+2$ para algún $t \in \mathbb{N}$, entonces $a_i = -\frac{1}{3}$ cuando $i \equiv 0, 2 \ (\text{mód}\, 3)$ y $a_i = \frac{2}{3}$ cuando $i \equiv 1 \ (\text{mód}\, 3)$.*

2. *Si $o(x) = 6t+4$ para algún $t \in \mathbb{N}$, entonces $a_i = \frac{1}{3}$ cuando $i \equiv 0, 1 \ (\text{mód}\, 3)$ y $a_i = -\frac{2}{3}$ cuando $i \equiv 2 \ (\text{mód}\, 3)$.*

3.2. Cayley unitarios obtenidos a partir de $\big(1+\big(x+x^{-1}\big)\big)$

En la sección anterior vimos como obtener $(1+(x+x^{-1}))^{-1}$, cuando este existe. Esto permite construir elementos Cayley unitarios a partir de antisimétricos de la forma $x+x^{-1}$.

Sea $x \in G$ un elemento con $o(x) = 6t+2$ ó $o(x) = 6t+4$ $(o(x) \geq 4)$ y sea $k = (x+x^{-1})$, del Teorema 3.1.9 tenemos que $1+(x+x^{-1})$ invertible, luego el elemento Cayley unitario construído a partir de k es de la forma $b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}$. Esto es,

$$\begin{aligned}
u_{[k]} &= (1-k)(1+k)^{-1} \\
&= (1-\big(x+x^{-1}\big))(1+\big(x+x^{-1}\big))^{-1} \\
&= (1-\big(x+x^{-1}\big))(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}).
\end{aligned}$$

Efectuando producto y considerando la recurrencia de los a_i's mostrada en la Proposición 3.1.4, encontramos que

$$
\begin{aligned}
b_0 &= -a_{n-1} + a_0 - a_1 = 2a_0 - 1 \\
b_1 &= -a_0 + a_1 - a_2 = 2a_1 \\
b_2 &= -a_1 + a_2 - a_3 = 2a_2 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
b_i &= -a_{i-1} + a_i - a_{i+1} = 2a_i \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
b_{n-2} &= -a_{n-3} + a_{n-2} - a_{n-1} = 2a_{n-2} \\
b_{n-1} &= -a_{n-2} + a_{n-1} - a_0 = 2a_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta lo que acabamos de deducir, podemos establecer el siguiente resultado que permite construir elementos Cayley unitarios del álgebra de grupo KG dotado de una involución orientada.

Teorema 3.2.1. *Sean G un grupo, K un cuerpo con característica cero y el álgebra de grupo KG dotado de la involución clásica orientada. Sea $x \in G$ tal que $\sigma(x) = -1$. Las siguientes afirmaciones son validas:*

1. *Si $o(x) = 6t + 2$, $t \in \mathbb{N}$, el elemento Cayley unitario $u_{[k]}$ obtenido a partir del antisimétrico $(x + x^{-1})$, es de la forma $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{6t+1}x^{6t+1}$, donde $b_0 = 2a_0 - 1$ y $b_i = 2a_i$ para todo $1 \leq i \leq 6t + 1$.*

2. *Si $o(x) = 6t + 4$, $t \in \mathbb{N}$, el elemento Cayley unitario $u_{[k]}$ obtenido a partir del antisimétrico $(x + x^{-1})$, es de la forma $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{6t+3}x^{6t+3}$, donde $b_0 = 2a_0 - 1$ y $b_i = 2a_i$ para todo $1 \leq i \leq 6t + 3$.*

Dado $x \in G$ con $\sigma(x) = -1$, el Teorema 3.1.9 muestra condiciones para que el antisimétrico $k = x + x^{-1} = x + x^{o(x)-1}$ sea invertible en KG y el Teorema 3.2.1 muestra como construir el elemento Cayley unitario a partir de k. La siguiente tabla muestra elementos Cayley unitarios en función del orden de x.

$o(x)$	$u_{[k]} = \left(1 - \left(x + x^{o(x)-1}\right)\right)\left(1 + x + x^{o(x)-1}\right)^{-1}$
4	$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^3$
8	$-\frac{5}{3} + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^5 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{4}{3}x^7$
10	$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^5 + \frac{2}{3}x^6 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{4}{3}x^8 + \frac{2}{3}x^9$
14	$-\frac{5}{3} + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^5 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{4}{3}x^7 - \cdots + \frac{4}{3}x^{13}$
16	$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^5 + \frac{2}{3}x^6 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{4}{3}x^8 + \cdots \frac{2}{3}x^{15}$

Cuadro 3.4: Cayley unitario a partir de $k = (x + x^{-1})$ con $\sigma(x) = -1$.

Capítulo 4

CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

En el Capítulo 2 consideramos G un grupo, K un cuerpo inicialmente con $char(K) \neq 2$ y el álgebra de grupo KG dotada de la involución canónica. Bajo estas condiciones analizamos la existencia del inverso $1+k$, donde $k = (x - x^{-1})$ $(x \in G)$ es un elemento antisimétrico, lo cual permitió construir elementos Cayley unitarios a partir de k. Posteriormente, consideramos un elemento antisimétrico más general $k = \alpha(x - x^{-1})$ y nuevamente analizamos la existencia del inverso de $1 + k$, lo cual requirió el estudio de ciertas sucesiones recurrentes. Posteriormente se estableció un resultado que permite calcular elementos Cayley unitarios a partir del valor de α y del orden del elemento x.

En el Capítulo 3 consideramos G un grupo, K un cuerpo con $char(K) = 0$ y el álgebra de grupo K dotada de la involución clásica orientada. Considerando elementos $x \in G$ con orden par y orientación no trivial, tratamos de establecer resultados similares a los del Capítulo 2, pero este estudio no pudo hacerse de forma totalmente análoga y requirió explorar otros caminos. De la investigación acerca de como obtener elementos Cayley unitarios a partir de antisimétricos $k = x + x^{-1}$ con $\sigma(-1)$, obtuvimos las Conjeturas 3.1.5 y 3.1.10, los Lemas 3.1.6, 3.1.7 y 3.1.8, y los Teoremas 3.1.9 y 3.2.1, los cuales son resultados nuevos. Sin embargo, al considerar antisimétricos más generales $k = \alpha(x + x^{-1})$ nuestro estudio e investigación no permitió establecer resultados que permitieran determinar la forma de $(1 + k)^{-1}$ y por ende de los elementos Cayley unitarios bajo estas condiciones.

Bibliografía

[1] ATIYAH, Michael Francis & MACDONALD, Ian Grant. *Introducción al álgebra Conmutativa.* Editorial Reverté, 1980.

[2] COMELLAS, Francesc, FABREGA, Josep, SANCHEZ, Alexandre & SERRA, O., *Matemática Discreta.* Edicions UPC SL, Barcelona (2001).

[3] CHUANG, Chen Lian and LEE, Paul H. , *Unitary Elements in Simple Artinian Rings.* Journal of Algrebra. 176 (1995): 449-459.

[4] GOODAIRE, Edgar G. & POLCINO MILIES, Cesar (2013). Oriented Involutions and Skew-symmetric Elements in Group Rings. Journal of Algebra and Its Applications, 12(01), 1250131.

[5] HOLGUÍN VILLA, Alexander. *Involuções de grupo orientadas em algebras de grupo*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo (2013). São Paulo, SP-Brasil.

[6] HERSTEIN, Israel Nathan., *Rings with involution.*, U. Chicago Press - Chicago Lectures in Mathematics, Chicago (1976).

[7] LAM, Tsit Yuen. , *Lectures on Modules and Rings.* Springer (1999).

[8] POLCINO MILIES, Cesar & SEHGAL, Sudarshan K., *An Introduction to Group Rings.* Kluwer, Dordrecht (2002).

[9] RIBEIRO DA SILVA, Viviane, *Involuções e elemnetos Cayley unitários em álgebras de grupos e anéis de matrizes*, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais (2004), Belo Horizonte, MG-Brasil.

[10] COSTA VIEIRA, André & RIBEIRO DA SILVA, Viviane., *Unitary units in group algebras and Fibonacci sequences.* J Algebra Appl. Vol.5, No. **2**. (2006):145-151.

[11] WILF, Herbert S., *Generatingfunctionology.* Academic Press, 2^a Edición (1994).