XIII OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMÁTICAS UIS

Katherine Johnson
1918 - 2020

" Algunas cosas desaparecerán de nuestra vista, pero siempre habrá ciencia, ingeniería y tecnología. Y siempre, siempre, habrá matemáticas".

Secundaria 2021

Informes
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tels.: 6344000, exts.: 1281, 2316; 6450301
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

EDUMAT
SEA
IPRED
Vicerrectoría Académica
Universidad Industrial de Santander
VIGILADA MINEDUCACIÓN

2021

Decimoterceras Olimpiadas Regionales de Matemáticas Secundaria

Universidad Industrial de Santander

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga

2021

Elaboración y edición

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas - 2021.

Directora

Adriana Alexandra Albarracín Mantilla

Coordinador

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Monitores

Jamir Santiago Castellanos Mantilla
Jesús David Acero Rueda
Johan Sebastián Cortés Villamizar
José Camilo Rueda Niño
Juan David Rueda Centeno
Julián Enrique Neira Díaz
Liber Andrés Moreno Ariza
María del Pilar Bautista Niño
Natalia Isabel Pérez Niño
Santiago Niño Campos
Vianey Landínez García

Introducción

"(...) Algunas cosas desaparecerán de nuestra vista, pero siempre habrá ciencia, ingeniería y tecnología. Y siempre, siempre, habrá matemáticas"

-Katherine Jhonson

La Universidad Industrial de Santander, como institución de educación superior del ámbito regional, forma ciudadanos como profesionales integrales, éticos, con sentido político e innovadores; apropia, utiliza, crea, transfiere y divulga el conocimiento por medio de la investigación, la innovación científica, tecnológica y social, la creación artística y la promoción de la cultura, buscando de este modo el fortalecimiento de una sociedad democrática, participativa, deliberativa y pluralista, con justicia y equidad social, comprometida con la preservación del medio ambiente y el buen vivir.

En el marco de esta misión institucional, la Escuela de Matemáticas ofrece a la sociedad santandereana y de la región de influencia de la Universidad, un escenario de alta calidad para el cultivo de las matemáticas, promoviendo entre los integrantes de la comunidad académica una actitud creativa y rigurosa, y construyendo un ambiente académico basado en la solidaridad, la empatía y el reconocimiento de los otros en su dignidad humana. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado, sino también por su participación activa y crucial en la formación de los estudiantes de otros programas de la Universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a los diversos retos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las habilidades matemáticas en el nororiente colombiano, la Escuela de Matemáticas ha diseñado y ejecutado desde el 2009, el proyecto Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (ORM-UIS), para secundaria y primaria, a través del fortalecimiento de las competencias matemáticas de los estudiantes y la capacitación simultánea de los profesores que orientan dichos procesos. Incluso, en esta oportunidad, para el año 2020, haciendo esfuerzos logísticos y financieros, dio continuidad al proyecto, como una manera de contribuir a la "normalidad" que nos tocó a todos inventarnos, para no dejar de encontrarnos alrededor de nuestra pasión en común por los números.

Las ORM-UIS abordan cinco (5) áreas, a saber: i) teoría de números; ii) combinatoria; iii) álgebra, iv) lógica, y v) geometría. Por otra parte, las ORM-UIS se desarrollan en tres (3) niveles, según el grado de escolaridad de los participantes, de la formación básica secundaria y media vocacional, así:

- **Nivel Básico:** grados sexto y séptimo,
- **Nivel Medio:** grados octavo y noveno,
- **Nivel Avanzado:** grados décimo y undécimo.

La cartilla que tiene en sus manos compendia los problemas matemáticos propuestos por el equipo de trabajo de las ORM-UIS en las distintas fases de la Duodécima versión del certamen, desarrollada durante el año 2021, dirigido a estudiantes de educación media vocacional. En esta oportunidad se contó con la participación de 120 colegios, para un total de 7334 estudiantes en competencia, provenientes de 40 municipios de los departamentos de Santander, Norte de Santander y Cesar.

En esta versión las ORM-UIS, como siempre lo hace con alguien en especial, destacó a la matemática estadounidense Creola Katherine Johnson $(1918-2020)$, pieza fundamental en la carrera aeroespacial al constituirse en una pionera, no solamente en el cálculo orbital, sino, en el rol de las mujeres dentro de la NASA, entidad en la que trabajó por más de 35 años. Su capacidad para realizar cálculos matemáticos con precisión y belleza garantizaron la seguridad del primer viaje alrededor de la órbita terrestre de los norteamericanos, el hito del primer hombre en el espacio para su país, el viaje a la Luna y hasta la reciente aventura para llegar a Marte. También, aportó con su destreza y experiencia a la implementación del cálculo computacional a la NASA, sembrando un campo fecundo para nuevos desarrollos matemáticos en respuesta a los retos del espacio ultraterrestre. Su vida y el de muchas mujeres desconocidas que en su época trabajaron como calculistas para la NASA quedó registrada para nosotros en una película fabulosa titulada "Talentos ocultos"(Hidden

Figures), estrenada en el 2016 y que lleva al séptimo arte el libro del mismo nombre escrito por Margot Lee Shetterly. Para las mujeres que se aventuren por los hermosos senderos de los números y para quienes miramos asombrados las noches estrelladas, el libro y la película nos llevarán a darle la razón a Katherine cuando afirmó .ªlgunas cosas desaparecerán de nuestra vista, pero siempre habrá ciencia, ingeniería y tecnología. Y siempre, siempre, habrá matemáticas".

Este documento consta de tres (3) capítulos, cada uno correspondiente a un nivel de la competencia: nivel básico, nivel medio y nivel avanzado. En cada uno de ellos el lector encontrará los problemas y la correspondiente solución, de las distintas soluciones que puede tener cada uno. Por esa razón, el equipo de trabajo de las ORM-UIS recomienda e incentiva a quien desee enfrentar nuevamente estos problemas, a descubrir y proponer, métodos alternativos de solución que se destaquen por su sencillez, ingenio y belleza matemática.

La Escuela de Matemáticas, a través del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la UIS (EDUMAT), reconoce la labor esencial del maestro en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las competencias matemáticas de los estudiantes, y por ello elabora esta cartilla para su utilización en el aula de clase, que incluye, también, la preparación y discusión creativa entre pares en los espacios de formación docente. Esperamos que los participantes de la educación básica secundaria y media vocacional, los profesores, y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, disfrute tanto como nosotros lo hicimos, el hermoso y milenario ejercicio del pensamiento matemático.

Las ORM-UIS no son una mera competencia, implican una puesta en escena colectiva para que los niños, niñas y adolescentes desplieguen sus capacidades, fortalezcan sus habilidades y se reconozcan como sujetos capaces de enfrentar problemas y solucionarlos. Esto psicológicamente fomenta la autopercepción como sujetos con comprensión de su entorno, y esa es la exigencia que hace hoy la humanidad. Creemos firmemente que allí debemos dirigir todos nuestros esfuerzos, al fortalecimiento de ciudadanías que, gracias al pensamiento crítico que se desarrolla desde el ejercicio matemático, puedan enfrentarse a la diversidad de problemáticas que enfrenta la sociedad actual y que requieren de una mirada no solo crítica, sino, además, creativa para ser solucionadas.

El proyecto ORM- UIS agradece y destaca al grupo de estudiantes de Santander y Norte de Santander, que participaron de esta versión, y que han demostrado ser capaces de asumir el reto de pensar y sentir problemas sencillos y bellos de matemáticas, con pasión y con rigor, a pesar de los innumerables desafíos que la pandemia por la COVID-19 trajo para todos nosotros, nuevamente, en este año.

Índice general

Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

En cierto momento de una maratón olímpica, un atleta se da cuenta que ha recorrido $\frac{3}{7}$ de lo que le falta para llegar a la meta y que aún le quedan 1000 metros más de lo que lleva para terminar la carrera. ¿Cuántos metros debe recorrer el atleta desde el inicio hasta el final de la carrera?

(a) 2500 (b) 1750 (c) 4500 (d) 2400 (e) No sé

Solución: Sean a los metros que el atleta lleva recorridos y b los metros que le falta para terminar la carrera.

Entonces $a = \frac{3}{7}b$ y $b = 1000 + a$. Reemplazando a en la segunda ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} b &= 1000 + \frac{3}{7}b, \\ \frac{4}{7}b &= 1000, \\ b &= 1750. \end{aligned}$$

Luego $a = 750$, así que la distancia que debe recorrer el atleta desde el inicio hasta el final de la carrera es $a + b = 2500$ metros.

PROBLEMA 2.

En una fiesta hay dos mesas, cada una con 25 platos enumerados desde 1 hasta 25. En cada plato de la primera mesa hay cierta cantidad de dulces, y en cada plato de la segunda mesa hay 3 veces los dulces del plato con el mismo número en la primera mesa. Luego el organizador de la fiesta agrega 4 dulces a cada plato de la segunda mesa. Si la suma del total de dulces desde el plato 1 hasta el plato 10 de la primera mesa es 25, ¿cuántos dulces quedan en total desde el plato 1 hasta el plato 10 de la segunda mesa?

(a) 100 (b) 75 (c) 115 (d) 90 (e) No sé

Solución 1: Antes de que el organizador de la fiesta agregara los 4 dulces a cada plato de la segunda mesa, el total de dulces desde el plato 1 hasta el plato 10 de la segunda mesa es 3 veces el total de dulces desde el plato 1 hasta el 10 de la primera mesa, es decir, $3 \times 25 = 75$ dulces. Luego, el organizador agrega 4 dulces por plato, como son 10 platos entonces habrá agregado 40 dulces, por lo cual quedan $75+40 = 115$ dulces desde el plato 1 hasta el plato 10 en la segunda mesa.

Solución 2: Sean $d_1, d_2, \ldots, d_{10}$ la cantidad de dulces que hay en los platos del 1 al 10 de la primera mesa, respectivamente. Entonces, $d_1 + d_2 + \cdots + d_{10} = 25$, y luego de que el organizador agrega los 4 dulces a cada plato de la segunda mesa, en los primeros 10 platos de esta mesa quedan $(3d_1 + 4), (3d_2 + 4), \ldots, (3d_{10} + 4)$ dulces, respectivamente. Así, el total de dulces que quedan desde el plato 1 hasta el plato 10 de la segunda mesa está dado por:

$$\begin{aligned}(3d_1 + 4) + (3d_2 + 4) + \cdots + (3d_{10} + 4) &= 3(d_1 + d_2 + \cdots + d_{10}) + 4 \times 10 \\ &= 3 \times 25 + 4 \times 10 = 115.\end{aligned}$$

PROBLEMA 3.

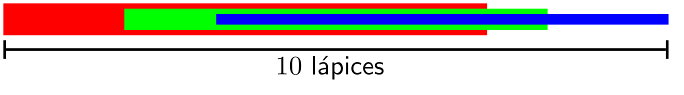
Sabemos que un año en Marte equivale, aproximadamente, a 687 días en la Tierra y uno en Venus, a 225 días. Dos expediciones espaciales salen de la Tierra, luego de un tiempo cada expedición llega a su destino, Marte y Venus respectivamente, aterrizando ambas al mismo tiempo. Si la expedición que está en Marte lleva 2 años de Marte, ¿cuántos años de Venus lleva la expedición en Venus, aproximadamente?

(a) 4 (b) 6 (c) 3 (d) 2 (e) No sé

Solución: *Un año en Marte son* 687 *días en la Tierra, por lo tanto, dos años en Marte equivalen a* 1350 *días en la Tierra. Ahora, se quiere saber aproximadamente cuántos años de Venus son* 1350 *días en la Tierra, para esto teniendo en cuenta que* 225 *días terrestres dura un año en Venus, dividimos* 1350 *en* 225 *que nos da aproximadamente* 6 *los cuales son los años de Venus que lleva la expedición.*

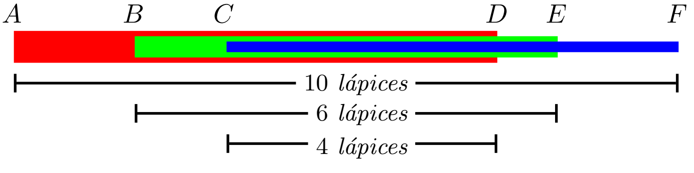
PROBLEMA 4.

Lucía desea medir sus lápices de colores. Para ello cuenta con tres cintas de colores diferentes, cuyas longitudes suman 1 metro. Ella logra extender las cintas como se muestra en el gráfico, cubriendo un segmento de línea recta cuya longitud equivale a 10 veces la de un lápiz. Luego se da cuenta que a lo largo de la cinta verde caben exactamente 6 lápices, y en el arreglo que hizo con las cintas, desde el extremo izquierdo de la cinta azul hasta el extremo derecho de la cinta roja caben exactamente 4 lápices, uno en seguida del otro. Si todos los lápices tienen la misma longitud, ¿cuál es la longitud de cada lápiz?



(a) $5\,cm$ (b) $10\,cm$ (c) $6\,cm$ (d) $4\,cm$ (e) No sé

Solución: *Denotamos cada cinta como un segmento, así:* $\overline{AD}$ *es la cinta roja,* $\overline{BE}$ *la cinta verde y* $\overline{CF}$ *la cinta azul. De este modo, tenemos que* $AD + BE + CF = 100\,cm$ *y además* $AF = 10$ *lápices,* $BE = 6$ *lápices y* $CD = 4$ *lápices.*



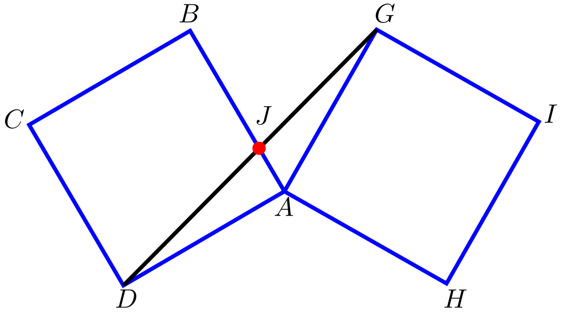
Note en el gráfico que $AD + BE + CF = AF + BE + CD$, *luego*

$$100\,cm = 20 \ \text{lápices}.$$

Por lo tanto cada lápiz mide $\dfrac{100\,cm}{20} = 5\,cm.$

Problema 5.

En la siguiente figura, $ABCD$ y $AHIG$ son cuadrados de igual área, $AD = BG$ y J es el punto de intersección entre $\overline{DG}$ y $\overline{AB}$. ¿Cuál es la medida del ángulo GJB?

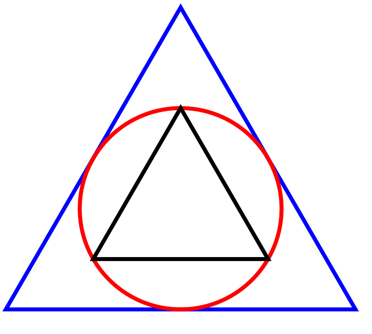


(a) $60°$ (b) $105°$ (c) $90°$ (d) $75°$ (e) No sé

Solución: Note que el triángulo BAG es equilátero, entonces $\measuredangle GAB = 60°$, y $\measuredangle GAD = 90° + 60° = 150°$. Además, el triángulo GAD es isósceles, de ahí que $\measuredangle ADG = \measuredangle DGA = 15°$. Finalmente, note que $\measuredangle GJB = 180° - \measuredangle GJA$, pero $\measuredangle GJA = 180 - \measuredangle DGA = 180° - 60° - 15° = 105°$, por lo tanto $\measuredangle GJB = 180° - 105° = 75°$.

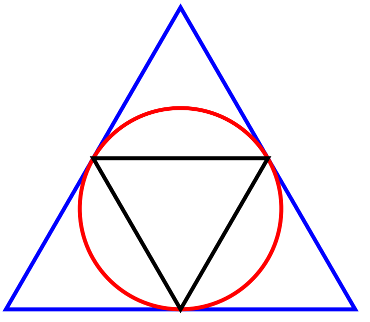
Problema 6.

En un triángulo equilátero de área $A = 8\,cm^2$ se inscribe una circunferencia, y en la circunferencia se inscribe otro triángulo equilátero cuya área es B, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor de $\frac{B}{A}$?



(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) No sé

Solución: *Considere la siguiente figura, en la que se ha girado* $180°$ *el triángulo interior:*



Note que el triángulo exterior de área A *queda dividido en cuatro triángulos pequeños iguales, siendo uno de ellos el triángulo interior a la circunferencia de área* B*, por lo tanto* $\dfrac{B}{A} = \dfrac{1}{4}$.

PROBLEMA 7.

Mariana, Carolina y Paula están leyendo cada una el mismo libro de cuentos. Mariana lleva un número par de cuentos leídos y solo le falta 1 para terminar el libro, mientras que a Carolina, que lleva un número múltiplo de 3 de cuentos leídos, le faltan 2, y a Paula que ha leído el mismo número de cuentos por día, durante 4 días, le faltan 3. Si el libro tiene menos de 16 cuentos, ¿cuántos cuentos tiene el libro?

(a) 9 (b) 15 (c) 11 (d)13 (e) No sé

Solución: *Sea* n *el número de cuentos que tiene el libro, entonces* $n < 16$ *y*

$$n = 2k + 1,$$
$$n = 3s + 2,$$
$$n = 4r + 3,$$

donde k, r *y* s *son números enteros. De la primera ecuación, se sigue que* n *es impar así, los posibles valores para* n *son:*

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.$$

Pero de estos, el único número que cumple las otras dos condiciones es el 11*. De modo que el libro tiene* 11 *cuentos.*

Problema 8.

Un colegio de Santander está planeando retornar a clases presenciales de forma alternada. Para ello, a cada estudiante le ofrecen asignarle aleatoriamente 3 días de lunes a viernes para tomar sus clases en las instalaciones. ¿Cuál es el menor número de niños que deben aceptar la propuesta del colegio para que sea seguro que al menos dos de ellos vayan los mismos días a las instalaciones?

(a) 10 (b) 12 (c) 9 (d) 11 (e) No sé

Solución: Tenemos 5 días en donde cada niño podrá ir 3 días, luego el total de posibilidades para que un estudiante asista al plantel es

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

Por el principio de casillas como tenemos 10 posibilidades basta con que 11 niños tomen el nuevo modelo, de esta manera al menos dos de ellos compartirán los días para ir al colegio.

Problema 9.

Si el dígito de las unidades de 2^a es b y el dígito de las unidades de 3^b es a, ¿cuál es dígito de las unidades de $(a \times b)^{2020}$?

(a) 8 (b) 6 (c) 4 (d) 2 (e) No sé

Solución: Dado que a y b son dígitos, por inspección tenemos que $a = 9$ y $b = 2$, luego

$$(9 \times 2)^{11} = 18^{2020}.$$

Note que el dígito de las unidades de 18^{2020} es el mismo que el de

$$8^{2020} = 2^{6060}.$$

Observemos qué pasa con el dígito de las unidades de las potencias de $2:$

$$\begin{aligned}
2^1 &= 2,\\
2^2 &= 4,\\
2^3 &= 8,\\
2^4 &= 16,\\
2^5 &= 32,\\
2^6 &= 64,\\
2^7 &= 128,\\
2^8 &= 256,\\
&\vdots\\
2^{2020} &= \ldots 6.
\end{aligned}$$

Note que la cifra de las unidades en las potencias de 2 *tienen un ciclo:* $2, 4, 8, 6$ *que se repite cada cuatro potencias, y dado que* 2020 *es múltiplo de* 4 *concluimos que el dígito de las unidades de* $(a \times b)^{2020}$ *es* 6.

1.2. Prueba Selectiva

PROBLEMA 1.

Natalia construye una sucesión de números enteros de la siguiente manera: el primer término es el 2, el segundo es el 3 y a partir del tercero, cada término se obtiene al multiplicar los dos anteriores.
Si $2^{144}3^a$, $2^{233}3^b$ y 2^c3^d son términos consecutivos, en orden ascendente, de esta sucesión, ¿cuál es el valor de $a+b+c+d$?
(a) 1131 (b) 1597 (c) 2584 (d) 4181 (e) No sé

Solución: Los primeros términos de esta sucesión son:

$$2, \quad 3, \quad 2\times 3, \quad 2\times 3^2, \quad 2^2\times 3^3, \quad 2^3\times 3^5, \quad 2^5\times 3^8, \dots$$

Note que el exponente del 3 en cualquier término de la sucesión es el exponente del 2 en el siguiente término, de ahí que $a=233$ y $c=b$.

Por otro lado, sabemos que el término 2^c3^d es la multiplicación de $2^{144}3^{233}$ y $2^{233}3^b$ por lo que $c=233+144=377$ y $d=a+b=233+377=610$. Finalmente,

$$a+b+c+d = 233+377+377+610 = 1597.$$

PROBLEMA 2.

Un lechero tiene 4 tanques: uno amarillo, uno azul, uno rojo y otro verde. Inicialmente el amarillo está completamente lleno y el azul está lleno hasta $\frac{1}{5}$ de su volumen. Los otros dos están vacíos. El lechero vierte $\frac{2}{3}$ del contenido del amarillo en el azul y este queda completamente lleno. Luego vierte en el verde lo que queda en el amarillo llenándolo hasta $\frac{3}{5}$ de su capacidad. Finalmente, vacía la mitad del contenido del tanque azul y todo el contenido del tanque verde en el rojo, quedando este último lleno hasta $\frac{3}{4}$ de su capacidad. Si la capacidad del tanque verde es de 90 litros, ¿cuál es la capacidad total de los cuatro tanques?
(a) 162 litros (b) 360 litros (c) 459 litros (d) 549 litros (e) No sé

Solución: Sean a, z, r y v las capacidades (en litros) de los tanques amarillo, azul, rojo y verde, respectivamente. El lechero vierte $\frac{2}{3}$ del contenido del amarillo en el azul y este queda completamente lleno, como el tanque azul estaba lleno *hasta* $\frac{1}{5}$ *de su capacidad, se deduce que:*

$$\frac{4}{5}z = \frac{2}{3}a \Longrightarrow z = \frac{5}{6}a.$$

Luego vierte en el verde lo que queda en el amarillo llenándolo hasta $\frac{3}{5}$ *de su capacidad, esto es*

$$\frac{1}{3}a = \frac{3}{5}v \Longrightarrow a = \frac{9}{5}v.$$

Y por lo anterior, $z = \frac{5}{6} \times \frac{9}{5}v = \frac{3}{2}v.$

Finalmente, el lechero vacía la mitad del contenido del tanque azul y todo el contenido del tanque verde en el rojo, quedando este último lleno hasta $\frac{3}{4}$ *de su capacidad, de ahí que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}z + \frac{3}{5}v &= \frac{3}{4}r. \\ \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}v + \frac{3}{5}v &= \frac{3}{4}r. \\ \frac{27}{20}v &= \frac{3}{4}r \Longrightarrow r = \frac{9}{5}v. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a + z + r + v &= \frac{9}{5}v + \frac{3}{2}v + \frac{9}{5}v + v \\ &= \frac{61}{10}v = \frac{61}{10} \times 90 = 549\,litros. \end{aligned}$$

Problema 3.

Andrea está participando en un concurso de cultura general. Por la primera respuesta correcta ganará 20 puntos y en adelante, por cada respuesta correcta ganará dos puntos más de los que ganó por el acierto anterior. Si las respuestas incorrectas no le suman ni le restan puntos, ¿cuántas preguntas debe responder correctamente Andrea para obtener 1550 puntos?

(a) 29 (b) 30 (c) 31 (d) 71 (e) No sé

Solución: Sea n *la cantidad de preguntas respondidas correctamente por Andrea.*

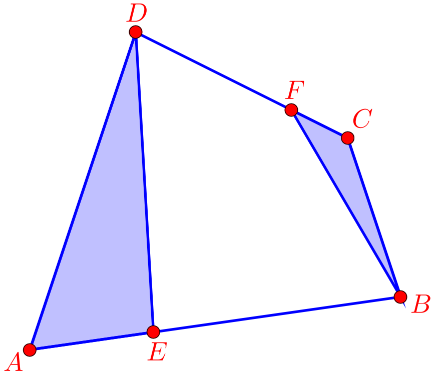
Entonces,

$$\begin{aligned}
1550 &= 20 + 22 + 24 + 26 + \cdots + 20 + 2(n-1),\\
&= 20 + 20 + 2 + 20 + 4 + 20 + 6 + \cdots + 20 + 2(n-1),\\
&= 20n + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n-1),\\
&= 20n + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1),\\
&= 20n + 2\left(\frac{(n-1)(n)}{2}\right).
\end{aligned}$$

Así tenemos que $n^2 + 19n - 1550 = 0$, *luego* $n = 31$ *o* $n = -50$ *pero la cantidad de preguntas respondidas correctamente es un entero positivo, entonces* $n = 31$.

PROBLEMA 4.

Si en la figura $AB = 3AE$, $CD = 4CF$, el área del triángulo ADE es $10\,cm^2$ y el área del triángulo BCF es $3\,cm^2$; ¿cuál es el área del cuadrilátero $ABCD$?



(a) $55\,cm^2$ (b) $49\,cm^2$ (c) $42\,cm^2$ (d) $29\,cm^2$ (e) No sé

Solución: *Trace el segmento* $\overline{BD}$.

Note que los triángulos ADE *y* EDB *comparten la misma altura, respecto a sus bases* $\overline{AE}$ *y* $\overline{EB}$, *respectivamente; y dado que* $AB = 3AE$, *entonces* $EB = 2AE$ *Por lo tanto el área del triángulo* EDB *es el doble del área del triángulo* ADE, *esto es* $20\,cm^2$.

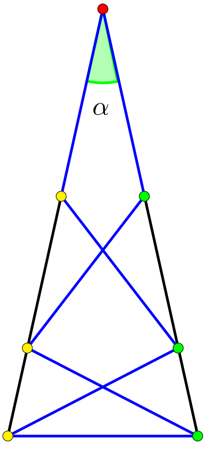
Análogamente, se deduce que el área del triángulo BFD *es el triple del área del triángulo* BCF, *es decir* $9\,cm^2$.

Por lo anterior, el área del cuadrilátero $ABCD$ *es* $10 + 20 + 9 + 3 = 42\,cm^2$.

PROBLEMA 5.

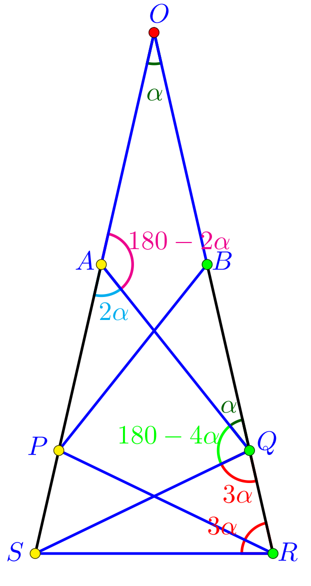
En la siguiente figura todos los segmentos azules son congruentes. Si el ángulo coloreado con verde mide $\alpha°$, ¿cuál es el valor de 7α?

Nota: Los puntos amarillos y el rojo son colineales, al igual que los puntos verdes y el rojo.



(a) 182 (b) 210 (c) 175 (d) 180 (e) No sé

Solución: Considere la siguiente figura:



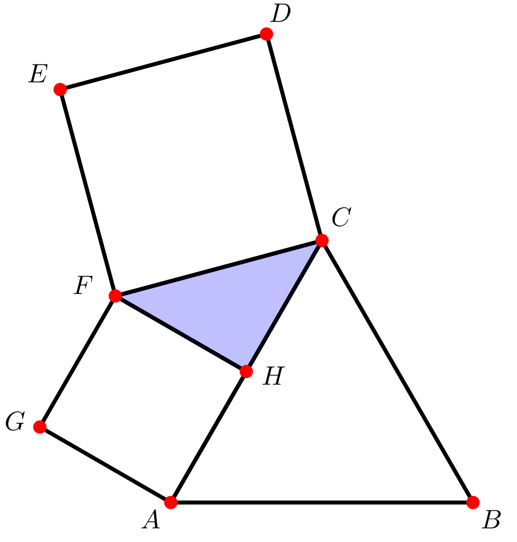
Note que:

- *El triángulo OAQ es isósceles y sus ángulos miden:* α, $180 - 2\alpha$ *y* α.
- *El triángulo AQS también es isósceles y sus ángulos miden:* 2α, $180 - 4\alpha$ *y* 2α.
- *El triángulo, QSR es isósceles, sus ángulos miden:* 3α, $180 - 6\alpha$ *y* 3α.
- *El triángulo PRS es congruente con el triángulo QSR, luego* $\measuredangle PSR = \measuredangle QRS = 3\alpha$.

Finalmente, la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo OSR es $180°$, *esto es:* $\alpha + 3\alpha + 3\alpha = 7\alpha = 180°$.

Problema 6.

En la siguiente figura, $AHFG$ y $CDEF$ son cuadrados, y el triángulo ABC es equilátero. Si H es el punto medio de $\overline{AC}$ y el área coloreada de azul es $9\,cm^2$, ¿cuántos centímetros mide el perímetro del polígono $ABCDEFG$?



(a) $18 + 18\sqrt{2}$
(b) $24 + 27\sqrt{2}$
(c) $27 + 12\sqrt{2}$
(d) $9 + 9\sqrt{2}$
(e) No sé

Solución: *Dado que* H *es el punto medio de* $\overline{AC}$*, entonces el triángulo* FHC *es rectángulo e isósceles, por lo tanto su área está dada por*

$$\frac{FH \times HC}{2} = \frac{HC \times HC}{2} = 9\ cm^2,$$

Luego $HC^2 = 18$*, de ahí que* $FG = GA = HC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\,cm$*, y*

$$AB = BC = AC = 2HC = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}\,cm.$$

Además, por el Teorema de Pitágoras,

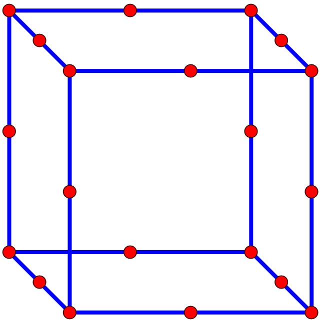
$$CD = DE = EF = FC = \sqrt{FH^2 + HC^2} = \sqrt{18+18} = 6\,cm.$$

Por lo anterior, el perímetro del polígono $ABCDEFG$ *es:*

$$3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 6 + 6 + 6 = 18 + 18\sqrt{2}\,cm.$$

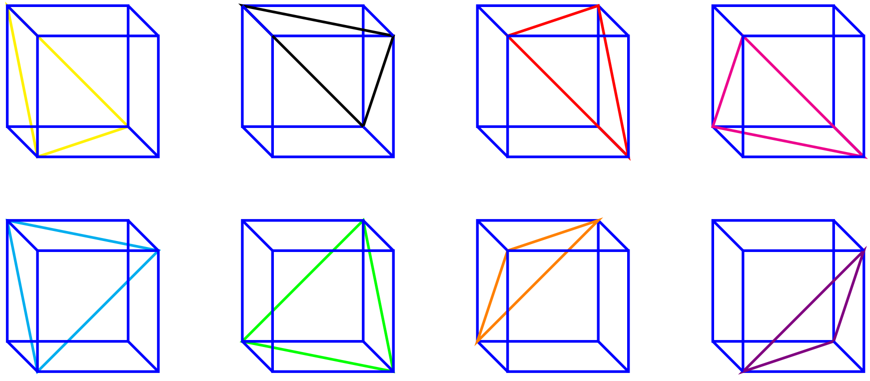
Problema 7.

En un cubo se marcan los vértices, y los puntos medios de sus aristas, como se muestra en la figura. ¿Cuántos triángulos equiláteros se pueden construir con sus tres vértices en tres de los puntos marcados?

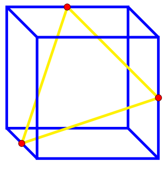


(a) 32 (b) 24 (c) 16 (d) 8 (e) No sé

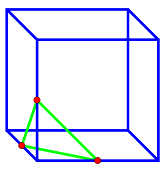
Solución: *Con los vértices del cubo se pueden determinar* 8 *triángulos equiláteros como se muestra a continuación:*



Por otro lado, si consideramos los puntos medios de las aristas del cubo, podemos determinar otros 8 *triángulos equiláteros como el que se muestra a continuación:*



y otros 8 *como el que se muestra a continuación:*



Por lo tanto, el total de triángulos equiláteros que se pueden construir con sus tres vértices en los puntos marcados es 24.

PROBLEMA 8.

¿Cuántos números enteros positivos menores que 2021 tienen entre sus cifras al 0, al 1 o al 2?

(a) 1678 (b) 1761 (c) 1621 (d) 1572 (e) No sé

Solución: Hay 2020 *enteros positivos menores* 2021*. Contaremos los que NO tienen entre sus cifras al* 0*, al* 1 *o al* 2 *y restaremos esta cantidad de* 2020 *para obtener los que cumplen la condición del enunciado.*

En efecto, de una cifra hay 7 *números enteros positivos menores que* 2021 *que NO tienen entre sus cifras al* 0*, al* 1 *o al* 2*. De dos cifras hay* $7 \times 7 = 49$ *de estos números, pues tanto la cifra de la unidades como la de las decenas tiene* 7 *posibilidades. De tres cifras hay* $7 \times 7 \times 7 = 343$ *de estos números; y de cuatro cifras no hay.*
Por lo tanto, los números que cumplen la condición del enunciado son

$$2020 - 7 - 49 - 343 = 1621.$$

PROBLEMA 9.

Si el número $\overline{7ba1b}$ es divisible entre 15, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar $a + b$?

(a) 14 (b) 18 (c) 12 (d) 16 (e) No sé

Solución: Si $\overline{7ba1b}$ *es divisible entre* 15*, entonces es divisible entre* 5 *y* 3*. Un número es divisible entre* 5 *si termina en* 0 *o en* 5*, luego* $b = 0$ *o* $b = 5$*.*

- *Si* $b = 0$*, entonces* $\overline{7ba1b} = \overline{70a10}$*, por el criterio de divisibilidad del* 3 *la suma de las cifras,* $7 + 0 + a + 1 + 0 = 8 + a$*, es múltiplo de* 3*, luego los posibles valores de* a *son:* $1, 4$ *y* 7*.*

- *Si* $b = 5$*, entonces* $\overline{7ba1b} = \overline{75a15}$*, por el criterio de divisibilidad del* 3*, la suma de las cifras,* $7 + 5 + a + 1 + 5 = 18 + a$*, es múltiplo de* 3*, luego los posibles valores de* a *son:* $0, 3, 6$ *y* 9*.*

Por lo anterior, el máximo valor que puede tomar $a + b$ *es* $9 + 6 = 14$*.*

1.3. Prueba Final

Problema 1.

Jerónimo construyó una sucesión de números de la siguiente manera: el primer término es el promedio entre su código de estudiante y el 1, y cada término, después del primero, es el promedio entre el número anterior y el 1. Si el término 21 de esta sucesión es el 2, ¿cuál es el código de estudiante de Jerónimo?

Solución: Sea c el código de estudiante de Jerónimo, y para cada entero positivo n, a_n es el $n-$ésimo término de la sucesión. Entonces:

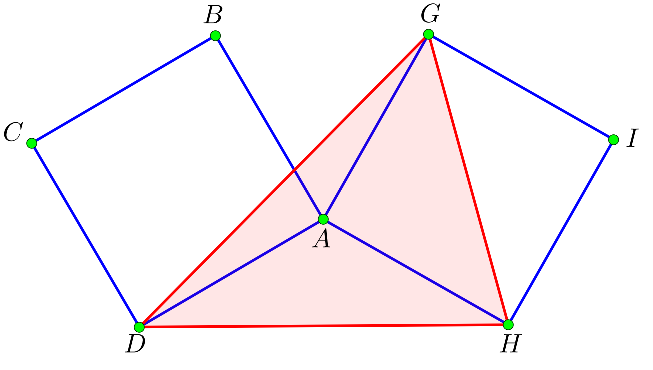
$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{c+1}{2},\\
a_2 &= \frac{a_1+1}{2} = \frac{\frac{c+1}{2}+1}{2} = \frac{c+3}{4},\\
a_3 &= \frac{a_2+1}{2} = \frac{\frac{c+3}{4}+1}{2} = \frac{c+7}{8},\\
&\vdots\\
a_n &= \frac{c+2^n-1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Finalmente, dado que el término 21 es 2, entonces

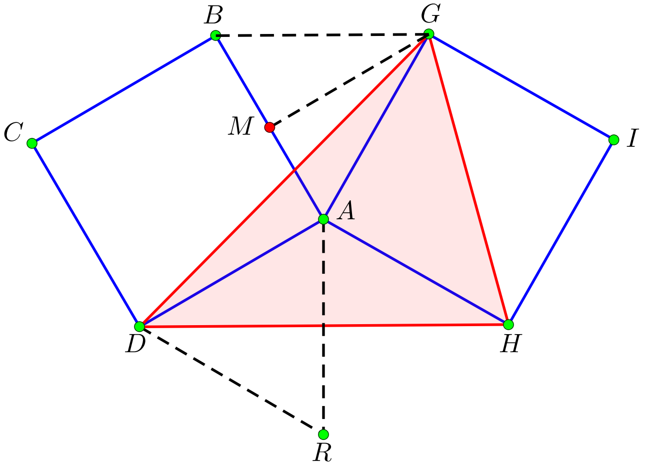
$$\begin{aligned}
a_{21} = \frac{c+2^{21}-1}{2^{21}} &= 2,\\
c+2^{21}-1 &= 2^{22},\\
c &= 2^{22}-2^{21}+1\\
c &= 2^{21}(2-1)+1\\
c &= 2^{21}+1,\\
c &= 2097153.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 2.

En la siguiente figura, $ABCD$ y $AHIG$ son cuadrados de igual área. Si $AD = BG = 2\,cm$, ¿cuál es el área del triángulo DGH?



Solución: *Considere la siguiente figura auxiliar, en la que M es el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y R es la reflexión del punto A respecto al segmento $\overline{DH}$.*



Note que el área del triángulo DGH corresponde a la suma de las áreas de los triángulos GAH, GAD y ADH.

- *El área del triángulo GAH es la mitad del área del cuadrado $AHIG$ esto es $(2 \times 2) \div 2 = 2\,cm^2$.*
- *Para hallar el área del triángulo GAD note que el triángulo AGB es equilátero, luego $\overline{GM}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y paralelo a $\overline{AD}$, por lo tanto la longitud de $\overline{AM}$ es la altura del triángulo GAD respecto a su*

base $\overline{AD}$, y dado que M es el punto medio de $\overline{BA}$ entonces $AM = 1\,cm$ luego el área del triángulo GAD es

$$\frac{AD \times AM}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1\,cm^2.$$

- *Observe que triángulo ADH es isósceles en A y $\measuredangle DAH = 120°$, por lo tanto $\measuredangle RDH = \measuredangle HDA = \measuredangle AHD = 30°$. Además $\overline{AR}$ es perpendicular a $\overline{DH}$, luego $\measuredangle ADR = 60°$. De modo que el triángulo ADR es equilátero de lado $2\,cm$ y así su área, que es igual a la del triángulo ADH, es:*

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}\,cm^2.$$

Por lo anterior el área del triángulo DGH está dada por:

$$2 + 1 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}\,cm^2.$$

Problema 3.

Sara escribió en el tablero los números enteros del 1 al 2021. Luego decidió cambiarle el signo a todos los múltiplos de 2 y después se lo cambió a todos los múltiplos de 3. ¿Cuál es la suma de los números que quedan finalmente en el tablero?

Solución: Primero, Sara escribe los números del 1 al 2021 :

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \ldots$$

Luego cambia el signo a los múltiplos de 2 :

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, -10, 11, -12, 13, -14, 15, \ldots$$

Y luego cambia el signo a los múltiplos de 3 :

$$1, -2, -3, -4, 5, +6, 7, -8, -9, -10, 11, +12, 13, -14, -15, \ldots$$

Agrupando la última lista en bloques de 6 números notamos que la suma de los números de cada bloque es 3, así:

$$(1-2-3-4+5+6) + (7-8-9-10+11+12) + \cdots$$

Dado que $2021 = 336 \times 6 + 5$, *entonces hay* 336 *bloques de* 6 *números y al final queda la suma:*

$$2017 - 2018 - 2019 - 2020 + 2021 = -2019.$$

Por lo tanto, la suma de los números que quedan en el tablero es:

$$336 \times 3 - 2019 = -1011.$$

Problema 4.

Un constructor desea cortar una varilla de 420 unidades de longitud, de tal manera que todas las piezas tengan longitudes diferentes y que la longitud de cada pieza, salvo la más pequeña, sea una unidad mayor que la longitud de la siguiente pieza más pequeña. Si la pieza más grande debe medir 30 unidades, ¿en cuántas piezas debe dividir la varilla el constructor?

Solución 1: Sea x *la longitud de la pieza más pequeña y* n *el número de piezas en que se debe dividir la varilla, entonces:*

$$x + (x+1) + (x+2) + \cdots + (x+n-1) = 420 \tag{1.1}$$

$$x + n - 1 = 30. \tag{1.2}$$

De la ecuación (2) *se tiene que* $x = 31 - n$, *luego de la ecuación* (1) *se sigue que:*

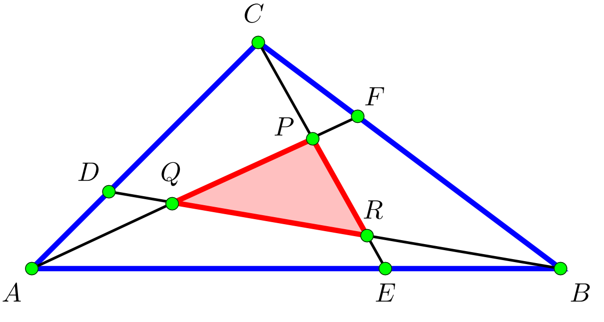
$$\begin{aligned}
\underbrace{x + x + x + \cdots + x}_{n-veces} + (1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1) &= 420, \\
nx + \frac{(n-1)n}{2} &= 420, \\
n(31-n) + \frac{(n-1)n}{2} &= 420, \\
\frac{2n(31-n) + (n-1)n}{2} &= 420, \\
2n(31-n) + (n-1)n &= 840, \\
n^2 - 61n + 840 &= 0, \\
(n-21)(n-40) &= 0,
\end{aligned}$$

de donde $n = 21$ *o* $n = 40$, *pero si* $n = 40$, *entonces* $x = 31 - 40 = -9$ *lo cual* *es imposible porque x es una longitud y debe ser positiva. Por lo tanto $n = 21$, esto es, el número de piezas en que debe dividirse la varilla es 21.*

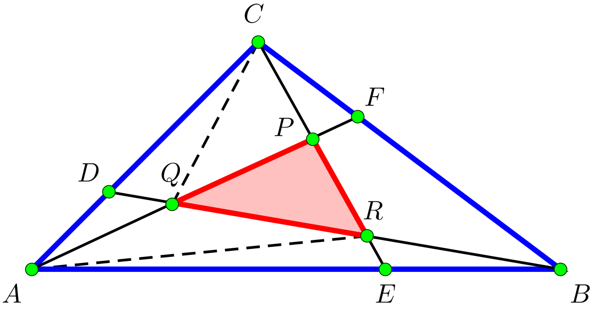
Solución 2: La suma de los números enteros del 1 al 30 es 465 y la diferencia de esta suma con 420 es 45, que es precisamente la suma de los números enteros del 1 al 9. De modo que los enteros del 10 al 30 suman 420. De lo que se concluye que el número de piezas en que debe dividirse la varilla es 21 (la cantidad de enteros que hay en el intervalo desde el 10 hasta el 30).

Problema 5.

En la siguiente figura, $AQ = QP$, $BR = RQ$ y $CP = PR$. Si el área del triángulo PQR es $9\,cm^2$, ¿cuál es el área del triángulo ABC, en centímetros cuadrados?



Solución: Considere la siguiente figura auxiliar en la que se han punteado los segmentos $\overline{CQ}$ y $\overline{AR}$



Note que los triángulos PQR y PQC tienen la misma área ($9\,cm^2$), pues $\overline{QP}$ es mediana del triángulo RQC. Análogamente se deduce que los triángulos BCR y QCR tienen la misma área ($18\,cm^2$), así como los triángulos QPC, QAC,

AQR y ARB, cada uno con $9\,cm^2$. Finalmente, note que el área del triángulo ABC es la suma de las áreas de los triángulos PQR, PQC, BCR, QAC, QAR y ARB, que por lo anterior es:

$$9 + 9 + 18 + 9 + 9 + 9 = 63\,cm^2.$$

PROBLEMA 6.

Juliana planea unas vacaciones de 6 días en Santa Marta. Para este viaje lleva ropa naranja, rosada, roja, azul, verde y blanca. Si cada día quiere vestir un color diferente y además el primer día no quiere usar ropa rosada y el segundo día no quiere usar ropa roja, ¿de cuántas formas puede Juliana escoger los colores que usará cada día de sus vacaciones?

Solución: Contemos de cuántas formas se puede vestir Juliana usando un color diferente cada día sin más condiciones, usando el Principio multiplicativo tenemos que estas son $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.
Ahora contaremos las formas que no quiere usar para restarlas de las anteriores. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. *El primer día usa ropa rosada y los demás días colores diferentes:* $1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Caso 2. *El segundo día usa ropa roja y los demás días colores diferentes:* $5 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Caso 3. *El primer día usa ropa rosada, el segundo ropa roja y los demás días colores diferentes:* $1 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Entonces al restar las formas del **Caso** 1. *y del* **Caso** 2. *a* 720 *tenemos* $720 - 2(120) = 480$, *pero note que aquí hemos restado dos veces las del* **Caso** 3, *por lo que debemos sumarlas una vez. Así, el número total de formas en las que Juliana puede escoger los colores para vestir cada día de sus vacaciones es:* $480 + 24 = 504$.

Capítulo 2

Nivel Medio

2.1. Prueba Clasificatoria

PROBLEMA 1.

Con el fin de entrenarse para una maratón, un profesor de atletismo propone a sus estudiantes trotar durante 31 días de la siguiente manera: el primer día cada uno debe trotar 200 metros y a partir del segundo día, podrá escoger 7 días para descansar y no trotar, teniendo en cuenta que cada día, salvo los días de descanso, debe trotar 200 metros más de los que trotó el día inmediatamente anterior. ¿Cuál es la menor cantidad de kilómetros que puede trotar un estudiante durante los 31 días?

(a) 9 (b) 9000 (c) $9{,}2$ (d) $9{,}6$ (e) No sé

Solución: Para obtener la menor cantidad de metros recorridos, distribuimos los días de descanso de tal manera que después tres días de ejercicio descanse uno, entonces tenemos la siguiente sucesión de metros recorridos por día:

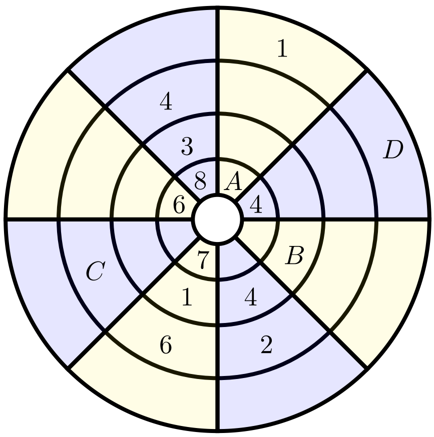
$$200,\ 400,\ 600,\ 0,\ 200,\ 400,\ 600,\ 0,\ \ldots$$

De esta manera el total de metros recorridos es

$$8 \times (200 + 400 + 600) = 8 \times (1200) = 9600\, m = 9,6\, km.$$

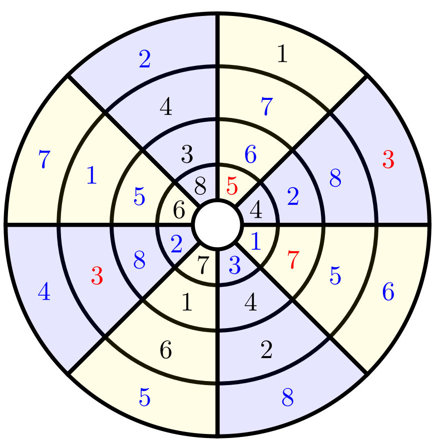
Problema 2.

Un Sudoku-Diana es un arreglo circular, formado con 4 arandelas y dividido en 8 porciones coloreadas alternadamente con dos colores, como el que se muestra a continuación. El objetivo es ubicar en cada región del arreglo un dígito del 1 al 8 de modo que en cada dos porciones adyacentes, así como en cada arandela no se repita número y además en las porciones del mismo color estén los mismos cuatro números, no necesariamente en el mismo orden. Complete el siguiente Sudoku-Diana y de como respuesta el valor numérico de $A \times B \times C \times D$.



(a) 180 (b) 240 (c) 315 (d) 490 (e) No sé

Solución: Con las reglas para jugar Sudoku-Diana, se completa el arreglo así:



De ahí que $A \times B \times C \times D = 5 \times 7 \times 3 \times 3 = 315$.

Problema 3.

Lucía compró dos empanadas, un jugo natural y varias frutas para sus compañeros. Todo le costó $\$8.000$. Si el precio de un jugo natural es el doble del de una empanada y el valor total de las frutas que compró es el triple que el de un jugo natural, ¿cuál es el precio de un jugo natural y una empanada?

(a) $\$2.000$ (b) $\$2.400$ (c) $\$3.200$ (d) $\$4.500$ (e) No sé

Solución: *Sea x el valor de una empanada, y el precio del jugo natural y z el valor de todas las frutas que compró Lucía. Entonces*

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 8000, \\ y &= 2x, \\ z &= 3y = 3(2x), \\ z &= 6x. \end{aligned}$$

Reemplazando la segunda y cuarta ecuación en la primera, se tiene:

$$\begin{aligned} 8000 &= 2x + 2x + 6x, \\ 8000 &= 10x, \\ 800 &= x. \end{aligned}$$

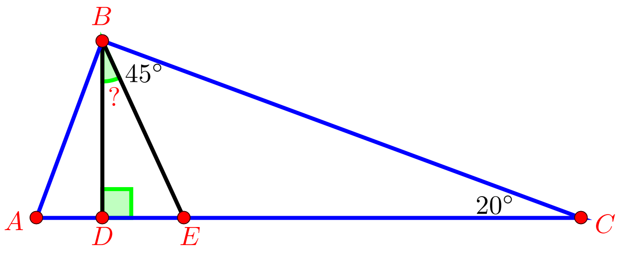
Luego $y = 2x = 1600$. Por lo tanto, el precio de un jugo natural y una empanada es $x + y = 2400$ pesos.

Problema 4.

Dos ángulos internos de un triángulo miden 90° y 20°. ¿Cuál es la medida del ángulo agudo que forman la bisectriz del ángulo recto y la altura perpendicular a la hipotenusa?

(a) 70° (b) 35° (c) 30° (d) 25° (e) No sé

Solución: *Considere la siguiente figura, en la que ABC es un triángulo rectángulo con $\measuredangle ABC = 90^\circ$, $\measuredangle BCA = 20^\circ$, $\overline{BE}$ es la bisectriz del ángulo recto y $\overline{BD}$ altura perpendicular a su hipotenusa $\overline{AC}$.*

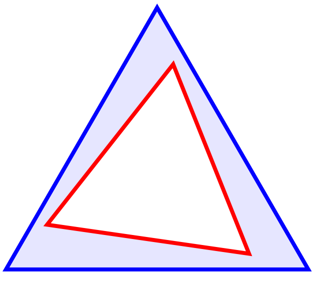


Dado que $\overline{BE}$ es bisectriz del ángulo ABE, entonces $\measuredangle EBC = 45°$. Además, sabiendo que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, se deduce que $\measuredangle CEB = 115°$, luego $\measuredangle BED = 65°$. Finalmente, como $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, entonces $\measuredangle EDB = 90°$ y por lo tanto

$$\measuredangle DBE = 180° - 90° - 65° = 25°.$$

Problema 5.

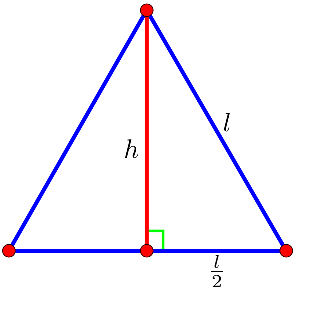
En la siguiente figura se muestran dos triángulos equiláteros. Si un lado del triángulo más pequeño mide $\sqrt{2}\,cm$ y el área entre los dos triángulos es igual al área del triángulo pequeño, ¿cuál es el perímetro del triángulo grande?



(a) $6\,cm$ (b) $6\sqrt{2}\,cm$ (c) $12\,cm$ (d) $9\sqrt{2}/2\,cm$ (e) No sé

Solución:

Primero hallemos el área del un triángulo equilátero en términos de la longitud l de uno de sus lados. Para ello, considere la siguiente figura, en la que se ha trazado una de las alturas del triángulo equilátero.



Por ser un triángulo equilátero, dicha altura es mediatriz, así, del teorema de Pitágoras se tiene que:

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2,$$
$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{l},$$
$$h = \frac{\sqrt{3}l}{2}.$$

Luego el área de dicho triángulo está dada por

$$A = \frac{l \times h}{2} = \frac{l \times \frac{\sqrt{3}l}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}. \tag{2.1}$$

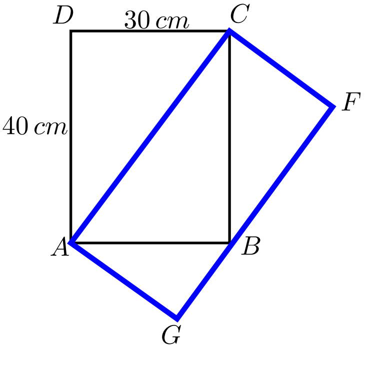
Volviendo al enunciado, la longitud de cada lado del triángulo equilátero más pequeño es $\sqrt{2}\,cm$, luego su área es $\frac{(\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,cm^2$. Así, el área entre los dos triángulos está dada por:

$$\frac{L^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

donde L es la longitud del lado del triángulo más grande. De la última ecuación se deduce que $L = 2\,cm$. Por lo tanto, el perímetro del triángulo más grande es $3 \times 2\,cm = 6\,cm$.

Problema 6.

Si las dimensiones del rectángulo $ABCD$ son las que se muestran en la figura, ¿cuál es el perímetro del rectángulo $AGFC$?



(a) $140\,cm$ (b) $148\,cm$ (c) $174\,cm$ (d) $1200\,cm$ (e) No sé

Solución 1: Del teorema de Pitágoras se tiene que $AC^2 = 40^2 + 30^2$, luego

$AC = 50\,cm$. Ahora, note los rectángulos $AGFC$ y $ABCD$ tienen igual área, a saber: $40 \times 30 = 1200\,cm^2$.

Pero el área del rectángulo $AGFC$ también está dada por $AG \times AC$, de ahí que

$$\begin{aligned} AG \times AC &= 1200 \\ AG &= \frac{1200}{AC} = \frac{1200}{50} = 24\,cm. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el perímetro del rectángulo $AGFC$ es $2 \times (50 + 24) = 148\,cm$.

Solución 2: *Por un lado el área del triángulo ABC es la mitad del área del rectángulo $ABCD$, esto es* $\frac{30 \times 40}{2} = 600\,cm^2$. *Además, del teorema de Pitágoras se tiene que $AC = 50\,cm$, luego el área del triángulo ABC también está dada por:*

$$\begin{aligned} \frac{AG \times AC}{2} &= 600 \\ AG &= \frac{1200}{AC} = \frac{1200}{50} = 24\,cm. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el perímetro del rectángulo $AGFC$ es $2 \times (50 + 24) = 148\,cm$.

Problema 7.

¿Cuántos números impares de cinco cifras hay tales que la cifra de las centenas excede en 2 a la cifra de las unidades de mil y la cifra de las decenas es la mitad la cifra de las decenas de mil?

(a) 140 (b) 160 (c) 200 (d) 250 (e) No sé

Solución: *Sea $abcde$ un número que satisface las condiciones del enunciado. Entonces e debe ser impar, $c = b + 2$ y $d = \frac{a}{2}$. Además, a, b, c, d, e son dígitos, con $a \neq 0$ pues el número es de cinco cifras, de modo que $a \in \{2, 4, 6, 8\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $e \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Por lo tanto hay $4 \times 8 \times 5 = 160$ de estos números.*

Problema 8.

Javier y Mario hicieron una apuesta. Mario, quien perdió, debe darle dulces a Javier diariamente, de modo que cada día le entregue el doble de la cantidad que le dio el día anterior. A Javier no le gustan los dulces, por lo que todos los que reciba los guardará y al final, se los dará a sus tres hermanas en cantidades iguales. Javier planea darle a cada una de sus hermanas más de 10 dulces. La apuesta queda pagada tan pronto como Javier tenga una cantidad total de dulces que pueda repartir como quiere, sin que le sobre alguno. Si el primer día Mario le da 1 dulce a Javier, ¿cuántos dulces le habrá dado en total para cuando quede pagada la apuesta?

(a) 31 (b) 33 (c) 63 (d) 15 (e) No sé

Solución: El primer día Mario le da un dulce a Javier, en el segundo día le dará dos dulces, siguiendo este orden, para el n-ésimo día le habrá dado en total

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Como cada hermana recibe al menos 10 *dulces, el total de entregados es al menos* 30*. Para $n = 5$ los dulces no son repartibles entre* 3*, pues* $2^5 - 1 = 31$*. Para $n = 6$ los dulces sí son repartibles entre* 3*, pues* $2^6 - 1 = 63$*, luego el total de dulces que Mario habrá dado cómo pago a la apuesta es* 63

Problema 9.

Melissa escribe los números naturales del 1 al 2021 en orden ascendente. Luego borra el primero, deja el segundo, borra el tercero, deja el cuarto y continúa borrando alternadamente los números hasta llegar al último. Luego repite este proceso con la lista de números que quedan sin borrar y continúa haciéndolo a cada nueva lista, hasta que solo queda un número sin borrar. ¿Cuál es el número que queda sin borrar?

(a) 1024 (b) 1010 (c) 1011 (d) 2020 (e) No sé

Solución: Melissa escribe los números naturales del 1 *al* 2021 :

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots, 2018, 2019, 2020, 2021.$$

Luego borra alternadamente los números, iniciando con el primero de la lista, *hasta llegar al último, obteniendo la siguiente lista:*

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., 2018, 2020.$$

Repite el proceso anterior y obtiene la siguiente lista:

$$4, 8, 12, ..., 2018,$$

y continúa con este proceso hasta llegar a una lista con un solo número.
Note que la primera vez que borra quedan los múltiplos de 2*, la segunda vez, los múltiplos de* $4 = 2^2$*, luego los de* $8 = 2^3$*, y así, hasta que solo queda la mayor potencia* 2 *menor que* 2021 *es decir, el número* $2^{10} = 1024$.

2.2. Prueba Selectiva

Problema 1.

Sean x, y, z números reales tales que $xy+1 = 3y$, $yz+1 = 3z$ y $xz+1 = 7x$. Determine la suma de todos los valores que puede tomar $x \times y \times z$.

(a) 6 (b) 1 (c) 50 (d)13 (e) No sé

Solución: *Del enunciado,*

$$x + \frac{1}{y} = 3, \qquad y + \frac{1}{z} = 3, \qquad z + \frac{1}{x} = 7.$$

Multiplicando estas expresiones se obtiene:

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right) &= xyz + (x+y+z) + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{xyz},\\ &= 3 \times 3 \times 7 = 63.\end{aligned}$$

Pero,

$$(x+y+z) + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 3+3+7 = 13.$$

Luego,

$$xyz + 13 + \frac{1}{xyz} = 63.$$

Haciendo $xyz = t$ se tiene:

$$\begin{aligned} t + 13 + \frac{1}{t} &= 63,\\ t + \frac{1}{t} &= 50,\\ t^2 - 50t + 1 &= 0.\end{aligned}$$

De ahí que $t = xyz = 25 \pm 4\sqrt{39}$. Por lo tanto, la suma de todos los valores que puede tomar $x \times y \times z$ es 50.

PROBLEMA 2.

Juan y Andrés tienen cada uno un billete de $\$50{,}000$, dos billetes de $\$20{,}000$ y tres billetes de $\$10{,}000$. A cada uno se le dan seis bolsas negras numeradas del 1 al 6, y se les pide depositar en cada bolsa un solo billete. A continuación, se le pide a cada uno decir, por turnos, un número del 1 al 6 y tomar el dinero dentro de las dos bolsas con dicho número, de modo que no pueden repetir un número ya dicho por alguno de los dos. El juego termina cuando entre los dos hayan dicho todos los números del 1 al 6. Juan se enteró que Andrés depositó los billetes de mayor a menor valor, en las bolsas de menor a mayor numeración. Si Andrés empieza el juego, ¿de cuántas formas puede Juan depositar sus billetes, de tal manera que sin importar como juegue Andrés, él pueda empatarle?

(a) 12 (b) 9 (c) 15 (d) 20 (e) No sé

Solución: Se quiere asegurar que, sin importar cómo juegue Andrés, Juan pueda empatarle; entonces las bolsas deben contener por pares la misma cantidad de dinero, de modo que si Andrés toma las bolsas con cierto número, Juan tome las bolsas con el correspondiente número que contienen la misma cantidad de dinero que las tomadas por Andrés.

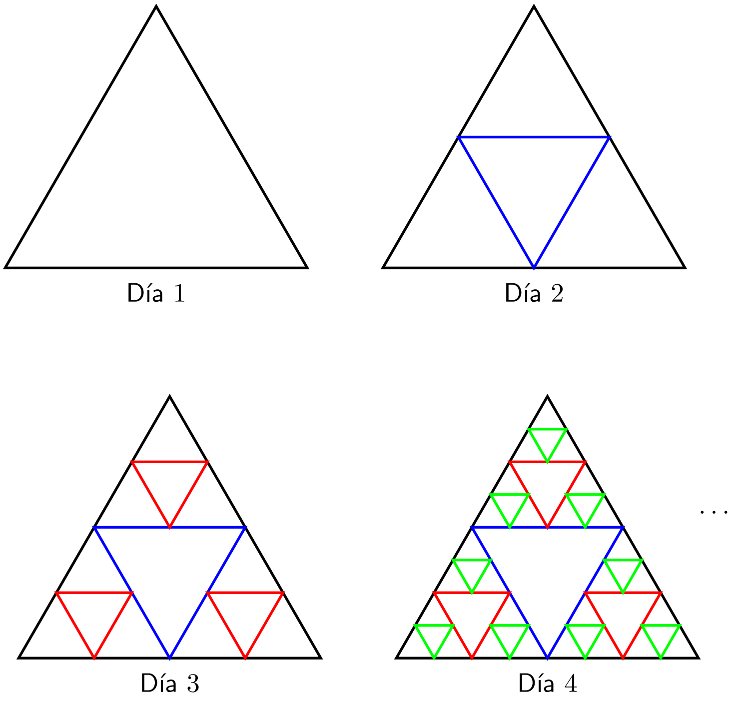
Teniendo en cuenta lo anterior, Juan no puede depositar el billete de 50 mil en la bolsa 1, pues si Andrés elige el 1 al tomar las bolsas con el número 1 sumaría 100 mil, y no hay forma de que Juan pueda empatarle. Veamos las opciones:

Bolsas	1	2	3	4	5	6
Andrés	50	20	20	10	10	10
Juan	20	50	10	20	10	10
	20	50	10	10	20	10
	20	50	10	10	10	20
	20	10	50	20	10	10
	20	10	50	10	20	10
	20	10	50	10	10	20
	10	20	20	50	10	10
	10	20	20	10	50	10
	10	20	20	10	10	50
	10	10	10	50	20	20
	10	10	10	20	50	20
	10	10	10	20	20	50

De modo que en total, Juan tiene 12 *formas de depositar los billetes en las bolsas, de modo que sin importar cómo juegue Andrés, él pueda empatarle.*

PROBLEMA 3.

Sierpinski, el pintor, está creando un mural para el edificio de matemáticas de la Universidad. El primer día, Sierpinski dibuja un triángulo equilátero de lado $5632\,cm$. El segundo día, uniendo los puntos medios de cada lado del triángulo, dibuja un triángulo dentro del que tenía. El tercer día, inscribe un triángulo dentro de cada triángulo más pequeño, salvo el que dibujó el día anterior, uniendo los puntos medios de sus lados. Y continúa así, dibujando cada día, un triángulo dentro de cada triángulo más pequeño, salvo los que dibujó el día anterior, uniendo los puntos medios de sus lados. En la siguiente figura se muestran los resultados de los primeros cuatro días. ¿Al cabo de qué día, la suma de las longitudes (en centímetros) de todos los trazos del mural no será un entero?



(a) 10 (b) 11 (c) 8 (d) 9 (e) No sé

Solución: *Sea L el lado del triángulo equilátero inicial, entonces el lado del triángulo dibujado en el segundo día es $\frac{L}{2}$ cm; el lado de los 3 triángulos dibujados el tercer día es $\frac{L}{4} = \frac{L}{2^2}$ cm, el lado de los $9 = 3^2$ triángulos dibujado el el cuarto día es $\frac{L}{8} = \frac{L}{2^3}$ cm y así sucesivamente. De modo que la suma de las longitudes de todos los trazos del mural al cabo del $n-$ésimo día será*[1]

$$\begin{aligned}
S_n &= 3L + 3\frac{L}{2} + 3^2\frac{L}{2^2} + 3^3\frac{L}{2^3} + \cdots + 3^{n-1}\frac{L}{2^{n-1}},\\
&= L\left(2 + 1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right),\\
&= L\left(2 + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right),\\
&= L\left(2 + 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)\right) = \frac{2 \times L \times 3^n}{2^2}.
\end{aligned}$$

Del enunciado tenemos que $L = 5632 = 2^9 \times 11$ cm. Entonces

$$S_n = \frac{2^{10} \times 11 \times 3^n}{2^n}.$$

Note que para cada n menor o igual que 10, la suma S_n es un entero, pues en el numerador aparece una potencia de 2 mayor que la del denominador, pero al terminar el día $n = 11$, se tiene que

$$S_{11} = \frac{2^{10} \times 11 \times 3^{11}}{2^{11}} = \frac{11 \times 3^{11}}{2},$$

que no es entero, luego 11 es la respuesta.

Problema 4.

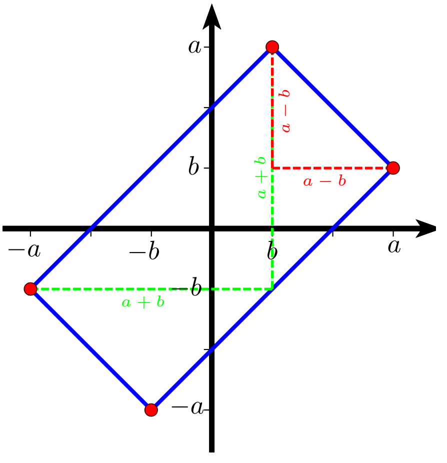
Sea S el cuadrilátero en el plano, cuyos vértices son los puntos (a, b), (b, a), $(-a, -b)$, $(-b, -a)$; con $0 < b < a$. Si el área de S es 16, ¿cuál es el valor de $a^2 - b^2$?

(a) 4 (b) 8 (c) 12 (d) 16 (e) No sé

Solución: *Considere la siguiente ilustración:*

[1]La tercera igualdad se sigue de la siguiente propiedad:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}, \text{ con } a \neq 1.$$



Note que el cuadrilátero es un rectángulo y por el teorema de Pitágoras dos de sus lados adyacentes miden

$$\sqrt{(a-b)^2+(a-b)^2} = \sqrt{2}(a-b),$$
$$\sqrt{(a+b)^2+(a+b)^2} = \sqrt{2}(a+b).$$

Así que su área está dada por:

$$16 = \sqrt{2}(a-b) \times \sqrt{2}(a+b),$$
$$16 = 2(a-b)(a+b),$$
$$16 = 2(a^2-b^2);$$

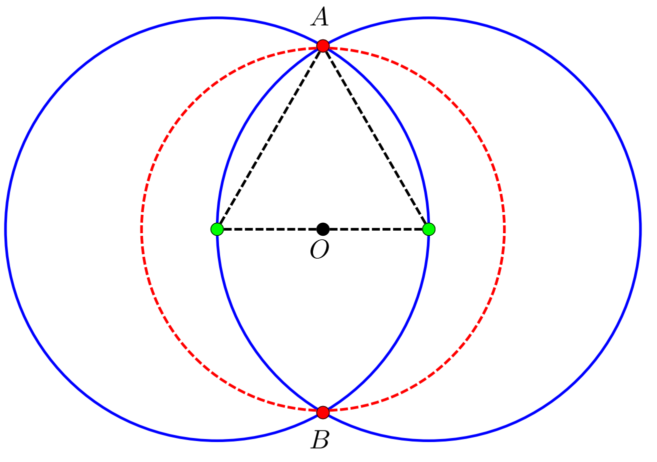
de ahí que $a^2 - b^2 = 8$.

Problema 5.

Valeria dibuja dos circunferencias de radio $4\,cm$, de modo que una de las circunferencias pasa por el centro de la otra. Si A y B son los puntos de intersección entre las circunferencias que dibujó Valeria, ¿cuál es el área de un círculo de diámetro $\overline{AB}$?

(a) $12\pi\,cm^2$ (b) $14\pi\,cm^2$ (c) $8\sqrt{3}\pi\,cm^2$ (d) $16\pi\,cm^2$ (e) No sé

Solución: Considere la siguiente ilustración, en la que O es el centro del círculo rojo, cuyo diámetro es $\overline{AB}$.



Note que el triángulo punteado es equilátero, pues cada uno de sus lados mide $4\,cm$*, al ser un radio de alguna de las circunferencias azules. Así, por el teorema de Pitágoras, tenemos que*

$$OA = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}\,cm.$$

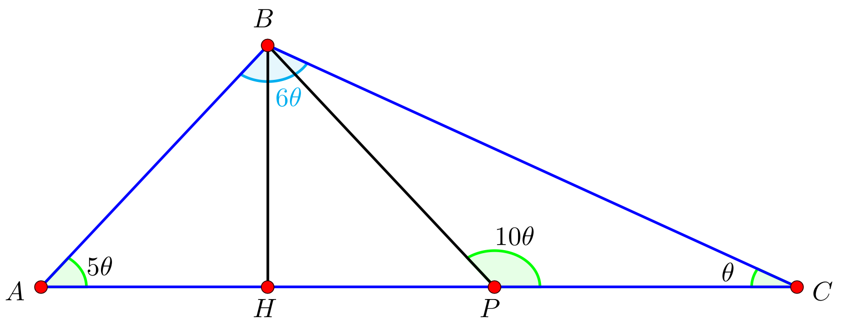
Por lo tanto, el área del círculo de diámetro $\overline{AB}$ *es* $\pi\left(\sqrt{12}\right)^2 = 12\pi\,cm^2$.

PROBLEMA 6.

Sea ABC un triángulo tal que $\measuredangle CAB = 5\theta$, $\measuredangle ABC = 6\theta$ y $\measuredangle BCA = \theta$. Se toma un punto P sobre $\overline{AC}$ tal que la medida del ángulo opuesto a $\overline{BC}$ en el triángulo BCP es 10θ. Si $\overline{BP} = 6\,cm$, ¿cuál es el área del triángulo ABC?

(a) $36\,cm^2$ (b) $24\,cm^2$ (c) $9\,cm^2$ (d) $18\,cm^2$ (e) No sé

Solución: Considere la siguiente ilustración, en la que $\overline{BH}$ *es la altura del triángulo desde* B.



Note que $5\theta+6\theta+\theta = 12\theta = 180°$*, por lo tanto* $\theta = 15°$*. Además,* $\measuredangle CPB = 10\theta$*, entonces* $\measuredangle PBC = \theta$ *y* $\measuredangle ABP = 5\theta$*, por lo que los triángulos* ABP *y* BCP *son isósceles, con* $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{PC} = 6\,cm$*, luego* $\overline{AC} = 2\times 6 = 12\,cm$*.*
Resta hallar la altura $\overline{BH}$*. Dado que* $\measuredangle CPB = 10\theta$*, y* $12\theta = 180°$*, entonces* $\measuredangle BPA = 2\theta$*. Los ángulos internos de* BPH *miden* $\measuredangle BPH = 2\theta = 30°$*,* $\measuredangle PHB = 6\theta = 90°$ *y* $\measuredangle HBP = 4\theta = 60°$*, luego teniendo claro que* $\overline{BP} = 6\,cm$*, entonces*[2] $\overline{BH} = \dfrac{6}{2} = 3\,cm$*.*
Por lo anterior, el área del triángulo ABC *es*

$$\frac{AC\times BH}{2}\,cm^2 = \frac{12\times 3}{2} = 18\,cm^2.$$

Problema 7.

¿Cuántos números capicúas positivos de 6 dígitos divisibles por 33 existen tales que la cifra de las decenas sea múltiplo de 3 y la cifra de las unidades deje residuo 1 al dividirse entre 4?
Nota: Un número es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

(a) 27 (b) 36 (c) 40 (d) 48 (e) No sé

Solución: Si un número es divisible por 33*, entonces es divisible por* 11 *y por* 3*. Todo número capicúa de* 6 *dígitos es divisible*[3] *por* 11*, pues la suma alternada de sus cifras es* $0 = 11\times 0$*. Ahora, para que sea divisible en* 3 *la suma de sus cifras debe ser múltiplo de* 3*, en nuestro caso, como el número es capicúa, se debe cumplir que el número formado por los* 3 *últimos dígitos sea múltiplo de*

[2] En un triángulo cuyos ángulos internos miden $90°$, $60°$ y $30°$, el cateto opuesto al ángulo de $30°$ mide la mitad de la hipotenusa.

[3] Un número es divisible por 11 si y solo si la suma alternada de sus cifras es múltiplo de 11.

3, pues las 3 primeras cifras son iguales a las 3 últimas, y si la suma de los 3 últimos dígitos no es múltiplo de 3, entonces 2 veces dicho valor tampoco es lo es. La cifra de las decenas puede tomar valores del conjunto $\{0, 3, 6, 9\}$, *4 en total. La cifra de las unidades puede tomar valores del conjunto* $\{1, 5, 9\}$, *para el 1 la cifra de las centenas tiene 3 posibilidades en el conjunto* $\{2, 5, 8\}$, *para el 5 hay 3 posibilidades en* $\{1, 4, 7\}$, *y para el 9 hay 4 posibilidades en el conjunto* $\{0, 3, 6, 9\}$. *De modo que el total de números capicúas que cumplen lo dicho es:*

$$(3 \times 4 \times 1) + (3 \times 4 \times 1) + (4 \times 4 \times 1) = 40.$$

Problema 8.

¿Cuántos puntos de coordenadas enteras en el plano cartesiano están sobre el segmento que une los puntos $A(0, 0)$ y $B(1092, 1386)$?

(a) 33 (b) 43 (c) 26 (d) 42 (e) No sé

Solución: *Teniendo en cuenta que el máximo común divisor entre a y b indica el número de puntos* (x, y) *con coordenadas enteras en el segmento que une los puntos* $(0, 0)$ *y* (a, b), *sin incluir al* $(0, 0)$. *Entonces, el número de puntos de coordenadas enteras que están sobre el segmento que une los puntos* $A(0, 0)$ *y* $B(1092, 1386)$ *es* $\text{mcd}(1092, 1386) + 1 = 42 + 1 = 43$.

Problema 9.

Antonia obtuvo el mismo residuo r al dividir los números 1186, 1520 y 2021 entre cierto entero positivo $n > 1$. ¿Cuál es valor de $n + r$?

(a) 211 (b) 291 (c) 177 (d) 184 (e) No sé

Solución: *Antonia obtuvo el mismo residuo r al dividir* 1186, 1520 *y* 2021 *entre* n, *esto quiere decir que,*

$$\begin{aligned} 1186 &= n \times a + r, \\ 1520 &= n \times b + r, \\ 2021 &= n \times c + r, \end{aligned}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. *Luego,*

$$\begin{aligned} 2021 - 1520 &= n(c - b) = 501 = 3 \times 167, \\ 2021 - 1186 &= n(c - a) = 835 = 5 \times 167, \\ 1520 - 1186 &= n(b - a) = 334 = 2 \times 167. \end{aligned}$$

De donde se deduce que $n = 167$ *es el número que se repite en las tres igualdades anteriores. Para hallar* r *efectuamos la división* $1186 \div 167$*, donde obtenemos* $a = 7$ *de cociente y* $r = 17$ *de residuo. Por lo tanto,* $n + r = 167 + 17 = 184$.

2.3. Prueba Final

Problema 1.

Si a, b y c son las soluciones de la ecuación $x^3 - 2x^2 - 3x + 8 = 0$, ¿cuál es el valor de $a^2 + b^2 + c^2$?

Solución: *Note que*

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).$$

Además, por el Teorema Fundamental del Álgebra, se tiene que

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 3x + 8 = (x - a)(x - b)(x - c),& \\ = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc.& \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} -2 &= -(a + b + c), \\ -3 &= ab + ac + bc. \end{aligned}$$

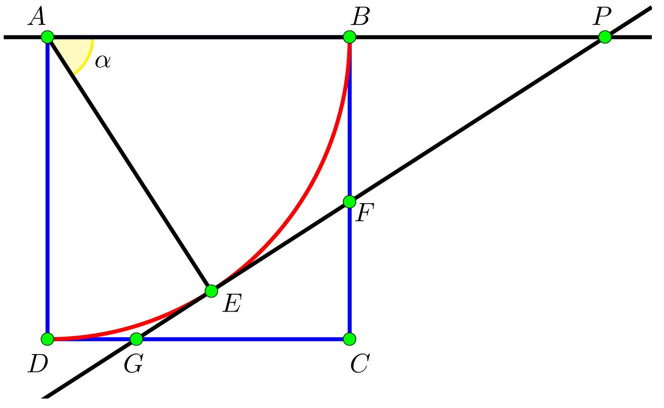
Luego,

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 2^2 - 2(-3) = 10.$$

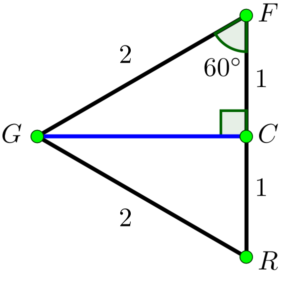
Problema 2.

En un cuadrado $ABCD$ se dibuja un cuarto de circunferencia con centro en A y radio $\overline{AB}$; sobre dicho arco se toma un punto E de modo que el ángulo agudo BAE mida $\alpha°$. Luego se traza una recta tangente al cuarto de circunferencia en el punto E; se nombran F y G los puntos de corte de dicha recta con los lados $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ del cuadrado, respectivamente. Si $\dfrac{GF}{FC} = 2$, determine el valor de α.

Solución: *Considere la siguiente ilustración del enunciado en la que se ha prolongado el lado $\overline{AB}$ del cuadrado y P es la intersección de esta prolongación con la recta tangente al cuarto de circunferencia en el punto E.*



Dado que E es punto de tangencia, entonces el radio $\overline{AE}$ es perpendicular al segmento tangente $\overline{GF}$, esto es $\measuredangle AEP = \measuredangle FCG = 90°$. Además, los ángulos APE y CGF son congruentes, pues son alternos internos entre paralelas, por lo tanto $\measuredangle EAP = \measuredangle GFC = \alpha°$.
Por otra parte, dado que $GF = 2FC$, y el triángulo GCF es rectángulo entonces $\measuredangle GFC = 60°$. Luego $\alpha = 60$.
Esto último se puede ver de varias formas, una de ellas es la siguiente: refleje el punto F respecto al segmento $\overline{GC}$, obtendrá un triángulo equilátero como el que se muestra a continuación. Por lo tanto cada uno de sus ángulos internos mide $60°$, en particular $\measuredangle GFC = 60°$.



PROBLEMA 3.

Juan y Marcos son dos amigos a los que les apasiona las matemáticas. Cierto día, Juan le dice a su amigo que ha descubierto que, para cada número entero n se cumple que $n^2(n^2-1)(n^2-4)$ es múltiplo de 360. Marcos no está seguro de esta afirmación. ¿Cómo podría Marcos probar o contradecir la afirmación de Juan?

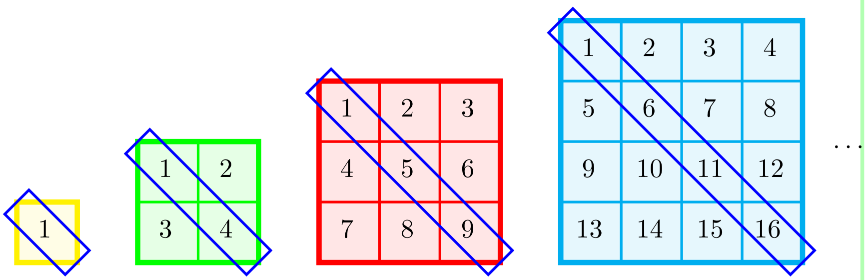
Solución: *Note que:*

$$P = n^2(n^2-1)(n^2-4) = n^2(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$$
$$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)n,$$

Pero $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ *es el producto de* 5 *enteros consecutivos, por lo tanto es múltiplo de* 5*. Además,* $(n-2)(n-1)n$ *y* $n(n+1)(n+2)$ *son productos de tres enteros consecutivos, por lo que cada uno es múltiplo de* 3*, así el producto* $P = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)n$*, es múltiplo de* 9*. Finalmente, si* n *es par, entonces* P *es múltiplo de* 8 *pues en tal caso* n*,* $n-2$ *y* $n+2$ *son múltiplos de* 2*, y si* n *es impar, entonces* $n+1$ *y* $n-1$ *son pares, siendo uno de ellos múltiplo de* 4*, y por lo tanto* P *también sería múltiplo de* 8*. De modo que,* P *es múltiplo de* 5*,* 8 *y* 9*, por lo tanto es múltiplo de* $5 \times 8 \times 9 = 360$*.*

Problema 4.

Para cada entero positivo n, se escriben en orden estrictamente ascendente, los números enteros desde el 1 hasta n^2, uno en cada casilla de una cuadrícula que tiene el mismo número de filas que de columnas; llenando cada fila de izquierda a derecha, de modo que al terminar una fila se continúa en la inmediatamente siguiente (abajo), como se muestra a continuación:



Luego se construye una sucesión en la que cada término es la suma de los elementos en la diagonal de la correspondiente cuadrícula, así:

$$1, 5, 15, 34, \ldots.$$

¿Cuál es el término número 100 de esta sucesión?

Solución: *Note que la suma de los elementos de la diagonal de cada arreglo* *(sumando de abajo hacia arriba) está dada por:*

$$
\begin{aligned}
1 &= \boxed{1}\\
2\cdot 2+2\cdot 1-1 = 2(2+1)-1 &= \boxed{5}\\
3\cdot 3+3\cdot 2-1+3\cdot 1-2 = 3(3+2+1)-(1+2) &= \boxed{15}\\
4\cdot 4+4\cdot 3-1+4\cdot 2-2+4\cdot 1-3 = 4(4+3+2+1)-(1+2+3) &= \boxed{34}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

De modo que, la suma de los elementos en la diagonal del $n-$ésimo cuadrado está dada por[4]

$$
\begin{aligned}
n(n+\cdots+2+1)-(1+2+\cdots+n-1) &= n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-\frac{(n-1)n}{2},\\
&= \frac{n(n^2+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Así, el término número 100 *en la sucesión de estas sumas es:*

$$\frac{100(100^2+1)}{2} = 500050.$$

PROBLEMA 5.

Daniela quiere elegir una clave para el candado de su bicicleta, de modo que la suma de los dígitos sea su edad. Si la clave debe tener 4 dígitos y su edad es 9 años, ¿de cuántas formas puede elegir la clave?
Por ejemplo, una clave posible es 0504.

Solución: Se trata de contar de cuántas formas se puede escribir a 9 *como suma de cuatro dígitos (no necesariamente diferentes).*

Representamos al 9 *con* 9 *puntitos:*

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\ \bullet$$

y usaremos tres barras para separar los puntos quedando 4 *grupos de puntos que representan cada uno un dígito.*

[4]Recuerde que la suma de los primeros k enteros positivos es $1+2+3+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

Por ejemplo, la clave $\boxed{\textit{0504}}$ *se representa por el siguiente arreglo:*

$$|\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet||\bullet\bullet\bullet\bullet\ \bullet$$

Otras claves serían:

$$\bullet|\bullet\bullet\ \bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet|\bullet \longrightarrow \boxed{\textit{1341}},$$

$$\bullet\bullet|\bullet\ \bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet| \longrightarrow \boxed{\textit{2430}}.$$

Note que en total hay 12 *objetos (*9 *puntos y* 3 *barras) y cada caso diferente está determinado por la posición de las barras, luego nuestro problema se reduce a contar de cuántas formas podemos ubicar las* 3 *barras en las* 12 *posiciones que determinan los objetos y esto se puede hacer de*

$$\binom{12}{3} = 220$$

formas diferentes.[5] *Por lo tanto Daniela puede elegir la clave de* 220 *formas diferentes.*

Problema 6.

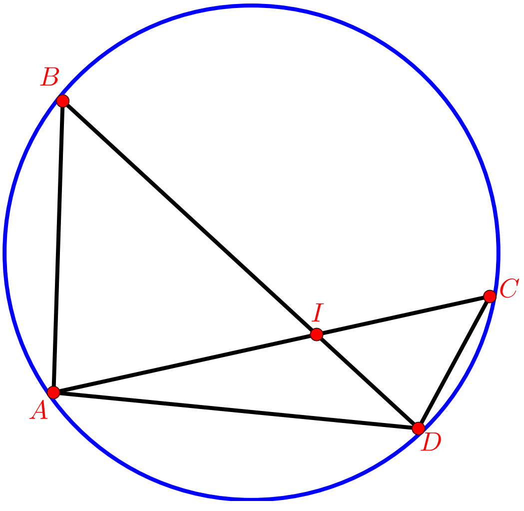
En una circunferencia se marcan cuatro puntos diferentes y se nombran: A, B, C y D, en ese orden. Luego se nombra I, al punto de intersección entre las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Si $AC = 5\,cm$, $2(AI) = 3(IC)$, ¿cuál es el valor de $BI \times ID$?

Solución: *Considere la siguiente figura:*

[5] En general, el número de formas en que se pueden separar n objetos en k categorías está dado por:

$$\binom{\text{objetos } + \text{ categorías } - 1}{\text{categorías } - 1} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

a este método se le conoce como Técnica de separadores.



Dado que

$$2(AI) - 3(IC) = 0,$$
$$AI + IC = 5\,cm,$$

luego $AI = 3\,cm$ *y* $IC = 2\,cm$. *Además, note que los triángulos* AIB *y* DIC *son semejantes, pues los ángulos* BIA *y* CID *son congruentes por se opuestos por el vértices, y los ángulos* ABI *y* ICD *también son congruentes, pues son ángulos inscritos en la circunferencia que subtienden el mismo arco* AD; *análogamente* $\measuredangle CDB = \measuredangle CAB$. *Por tanto,*

$$\frac{BI}{AI} = \frac{IC}{ID},$$
$$\frac{BI}{3} = \frac{2}{ID},$$
$$BI \times ID = 3 \times 2 = 6.$$

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

Si las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6b = 0$ son: 2 y a, ¿cuál es el valor de $a + b$?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) No sé

Solución 1: Usando la fórmula cuadrática, tenemos que las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6b = 0$ están dadas por:

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6b)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24b}}{2},$$

y dado que 2 es una solución, entonces $\dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24b}}{2} = 2$, luego $5 \pm \sqrt{25 - 24b} = 4$, es decir $\mp\sqrt{25 - 24b} = 1$, de donde

$$\begin{aligned} 25 - 24b &= 1, \\ -24b &= -24, \\ b &= 1. \end{aligned}$$

De modo que las soluciones de la ecuación original están dadas por:

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 24(1)}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2},$$

es decir, 2 y $a = 3$. Por lo tanto, $a + b = 3 + 1 = 4$.

Solución 2: Por el Teorema Fundamental del Álgebra, se tiene que

$$x^2 - 5x + 6b = (x - 2)(x - a),$$

y al desarrollar la parte derecha de la igualdad se obtiene:

$$x^2 - 5x + 6b = x^2 - (a + 2)x + 2a,$$

de modo que al iguar los coeficientes se llega a:

$$\begin{aligned} -5 &= -(a + 2), \\ 6b &= 2a, \end{aligned}$$

de donde $5 = a + 2$, luego $a = 3$ y $6b = 2(3)$, así, $b = 1$. Por lo tanto, $a + b = 4$.

Solución 3: Para hallar las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6b = 0$, factorizamos la parte izquierda. Note que se trata de un polinomio de la forma $x^2 + Bx + C$, cuya factorización es: $(x - 2)(x - a)$, pues 2 y a son las soluciones, y además $-2 - a = -5$ y $2a = 6b$, de donde se sigue que $a = 3$ y $b = 1$, así que $a + b = 4$.

Problema 2.

Ana, Brandon y Camila son hermanos. La edad de Ana es

$$A = \sqrt[3]{9\sqrt[3]{9\sqrt[3]{9 \cdots \sqrt[3]{9\sqrt[3]{9\sqrt[3]{27}}}}}},$$

y la edad de Brandon es

$$B = \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}} \times \sqrt{b\sqrt{c\sqrt{a}}} \times \sqrt{c\sqrt{a\sqrt{b}}},$$

donde $a \times b \times c = \sqrt[7]{256}$. Si la edad de Camila es $C = A + B$, ¿cuál será su edad en 8 años?

(a) 13 (b) 11 (c) 19 (d) 9 (e) No sé

Solución: Note que $A = 3$ y $B = a^{\frac{7}{8}} b^{\frac{7}{8}} c^{\frac{7}{8}} = (abc)^{\frac{7}{8}} = \left(\sqrt[7]{2^8}\right)^{\frac{7}{8}} = 2$, luego

$C = A + B = 5$, *por lo tanto, en* 8 *años Camila tendrá* 13 *años.*

Problema 3.

Se tiene una sucesión de números reales desconocida cuyo término inicial es a_1. En otra sucesión cuyo término inicial es b_1, se cumple que $b_n = 3a_n + 4$, para todo entero positivo n. Si $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 8$, ¿cuánto es $b_1 + b_2 + \cdots + b_{10}$?

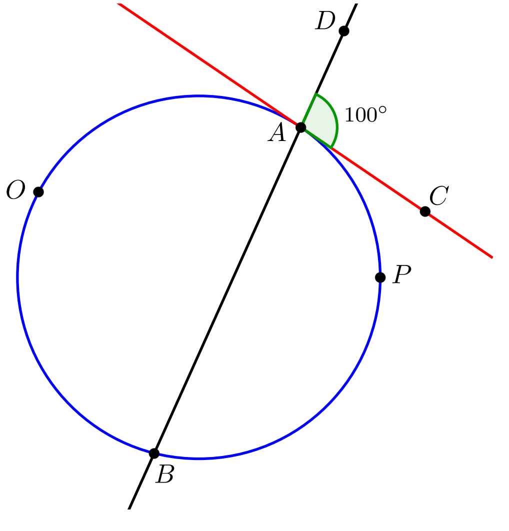
(a) 28 (b) 32 (c) 60 (d) 64 (e) No sé

Solución: Observe que

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \cdots + b_{10} &= (3a_1 + 4) + (3a_2 + 4) + \cdots + (3a_{10} + 4), \\ &= 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) + 40, \\ &= 3 \times 8 + 40 = 64. \end{aligned}$$

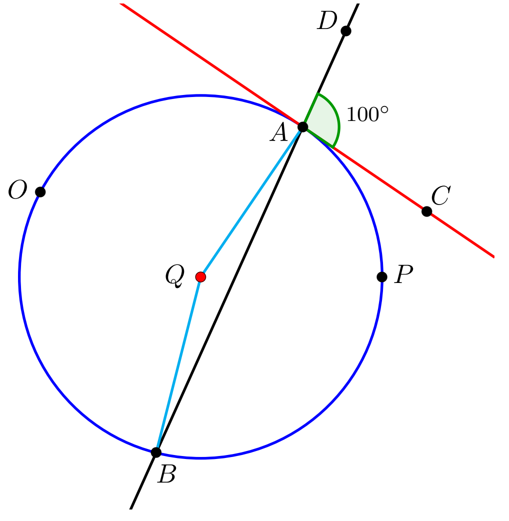
Problema 4.

En la siguiente figura la recta $\overleftrightarrow{AC}$ es tangente a la circunferencia y $\measuredangle CAD = 100°$. Si a es la medida del arco $\widehat{AOB}$ y b es la medida del arco $\widehat{APB}$, ¿cuál es el valor de $\dfrac{a}{b}$?



(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{6}{5}$ (e) No sé

Solución: Considere la siguiente figura, en la que Q *es el centro del círculo:*



Note que $\measuredangle BAC = 80°$ *y dado que la recta* $\overleftrightarrow{AC}$ *es tangente a la circunferencia y* $\overline{QA}$ *es un radio, entonces* $\measuredangle QAC = 90°$. *Así que*

$$\measuredangle QAB = \measuredangle QAC - \measuredangle BAC = 90° - 80° = 10°.$$

Además, el triángulo BQA *es isósceles en* Q, *entonces* $\measuredangle ABQ = \measuredangle QAB = 10°$, *de ahí que* $\measuredangle BQA = 160°$ *y* $\measuredangle AQB = 360° - 160° = 200°$. *Por lo tanto*

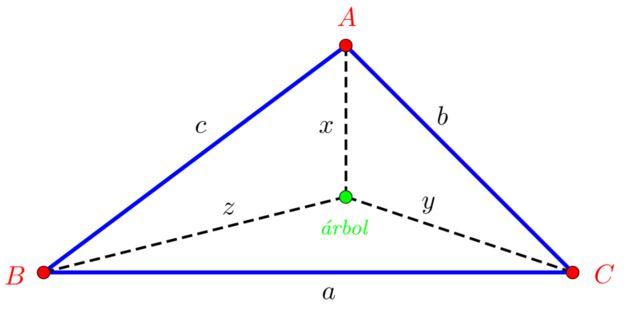
$$\frac{a}{b} = \frac{200°}{160°} = \frac{5}{4}.$$

Problema 5.

Un finca triangular debe dividirse entre 3 hermanos. Para ello, escogieron un árbol en el interior y desde cada vértice de la finca, trazaron un segmento hasta el árbol. Si su padre había cercado la finca con $\frac{49}{3}\,hm$ de malla, ¿cuál es el mayor valor entero de hectómetros de malla que con seguridad no les será suficiente para terminar de cercar sus terrenos?

(a) $9\,hm$ (b) $8\,hm$ (c) $6\,hm$ (d) $5\,hm$ (e) No sé

Solución: Considere la siguiente ilustración en la que ABC *representa la finca triangular, y dentro del triángulo se ha marcado un punto verde que representa el árbol.*



En los términos del gráfico, se trata de hallar el mayor entero, menor que $x + y + z$*, sabiendo que* $a + b + c = \dfrac{49}{3}\,hm$.
En efecto, de la desigualdad triangular[1]*, se sigue que*

$$x + z > c,$$
$$x + y > b,$$
$$z + y > a,$$

de donde al sumar las tres desigualdades se obtiene

$$\begin{aligned} 2(x + y + z) &> a + b + c \\ x + y + z &> \frac{a + b + c}{2} = \frac{49/3}{2} \approx 8{,}16. \end{aligned}$$

Por lo anterior, el mayor valor entero de hectómetros de malla que con seguridad no les será suficiente a los hermanos para terminar de cercar sus terrenos es $8\,hm$.

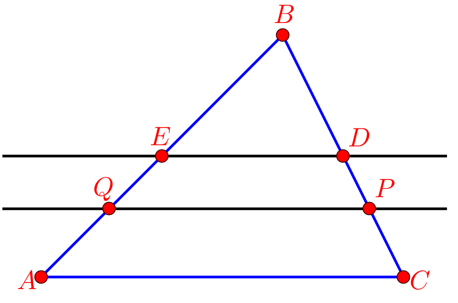
Problema 6.

En un triángulo ABC se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ que pasa por D, el punto medio de $\overline{BC}$, y corta a $\overline{AB}$ en un punto E. Se toma ahora un punto P sobre $\overline{BC}$ y se traza otra recta paralela a $\overline{AC}$ que pase por P; dicha recta corta a $\overline{AB}$ en el punto Q. Denotemos por $a(ABC)$ el área de un triángulo ABC. Si $\dfrac{a(BPQ)}{a(BDE)} = \dfrac{3}{2}$, ¿cuánto es $\dfrac{a(ABC)}{a(BPQ)}$?

(a) $\dfrac{8}{3}$ (b) 3 (c) $\dfrac{4}{3}$ (d) 6 (e) No sé

[1] Desigualdad Triangular: *En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante.*

Solución 1: Considere la siguiente figura:

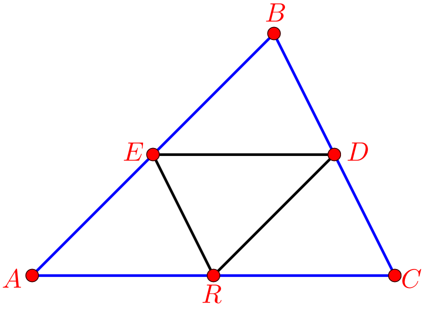


Note que los triángulos ABC, QBP y EBD son semejantes. Además, la razón de semejanza entre los triángulos ABC y EBD está dada por $\dfrac{BC}{BD} = 2$, pues D es el punto medio de $\overline{BC}$; de modo que la razón entre las áreas de estos triángulos[2] es $\dfrac{a(ABC)}{a(EBD)} = 4$.

Finalmente, dado que $a(BPQ) = \dfrac{3}{2}a(BDE)$, se concluye que

$$\frac{a(ABC)}{a(BPQ)} = \frac{a(ABC)}{\frac{3}{2}a(BDE)} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}.$$

Solución 2: Considere la siguiente figura en la que R es el punto medio de $\overline{AC}$.



Note que $\dfrac{a(BDE)}{a(ABC)} = \dfrac{1}{4}$, y dado que $\dfrac{a(BPQ)}{a(BDE)} = \dfrac{3}{2}$, entonces

$$\frac{\cancel{a(BDE)}}{a(ABC)} \times \frac{a(BPQ)}{\cancel{a(BDE)}} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8},$$

de ahí que $\dfrac{a(ABC)}{a(BPQ)} = \dfrac{8}{3}$.

[2] Si la razón entre dos triángulos semejantes es r, la razón entre sus áreas es r^2.

PROBLEMA 7.

El curso de la profesora Mariela tiene 7 niñas y 5 niños. Para la celebración del cumpleaños del colegio, cada curso enviará a un grupo de 6 estudiantes para participar en una obra de teatro. Si los integrantes del grupo del curso de la profesora Mariela son elegidos completamente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dicho grupo tenga más niños que niñas?

(a) $4/33$ (b) $1/7$ (c) $2/11$ (d) $12/35$ (e) No sé

Solución: *Para que uno de los grupos tenga más niños que niñas, este debe tener 4 o 5 niños. Si el grupo tiene 4 niños, los grupos posibles con esta característica son:*

$$\binom{5}{4} \times \binom{7}{2} = 5 \times 21 = 105.$$

Si el grupo tiene 5 niños, la cantidad de grupos posibles de este tipo es

$$\binom{5}{5} \times \binom{7}{1} = 1 \times 7 = 7.$$

De modo que el total de grupos donde hay más niños que niñas es $105+7=112$. Por otro lado, el total de grupos posibles es

$$\binom{12}{6} = \frac{12!}{6!6!} = 4 \times 3 \times 7 \times 11 = 924.$$

Así que la probabilidad de que un grupo tenga más niños que niñas es:

$$\frac{112}{924} = \frac{4}{33}.$$

PROBLEMA 8.

La maestra de Juan escribe un número natural en el tablero cuyas cifras son: 2 doses, 3 treses, 4 cuatros, 5 cincos, 6 seises, 7 sietes, 8 ochos y 9 nueves, no necesariamente en ese orden. Juan debe ir borrando de a un dígito de modo que al borrarlo, el nuevo número que queda en el tablero sea múltiplo de 3. Por ejemplo, si en el tablero está el número 3927, Juan no puede borrar el 2, pues 397 no es múltiplo de 3. ¿Cuál es el mayor número de dígitos que puede borrar Juan?

(a) 13 (b) 15 (c) 19 (d) 26 (e) No sé

Solución: Un número es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3, por lo tanto el número escrito por la maestra de Juan no es divisible entre 3 pues la suma de sus cifras es 284. Pero este número deja residuo 2 al dividirlo entre 3, luego Juan puede quitar por ejemplo un 2 (o cualquier dígito que deje residuo 2 al dividirse entre 3). Note que al borrar un 2 del número original la suma de los dígitos daría como resultado 282, por lo tanto el nuevo número sería divisible entre 3.
En adelante, para que el siguiente número, luego de borrar un dígito, sea divisible entre 3, el dígito retirado debe ser un múltiplo de 3, por lo tanto se podría retirar uno de los 18 dígitos que son múltiplos de 3 (los 3 treses, 6 seises y 9 nueves). Así, el número máximo de dígitos que puede quitar Juan es 19.

PROBLEMA 9.

Diego escribió en su cuaderno un 2 seguido de varios ceros, formando un número con 2070 divisores positivos. ¿Cuántos ceros tiene el número que escribió Diego?

(*a*) 47 (*b*) 46 (*c*) 45 (*d*) 44 (*e*) No sé

Solución: Sea n la cantidad de ceros escritos por Diego enseguida del 2. Entonces el número que escribió Diego está dado por:

$$\begin{aligned} 2\overbrace{0\cdots 0}^{n-ceros} &= 2\times 10^n \\ &= 2\times (2\times 5)^n \\ &= 2^{n+1}\times 5^n. \end{aligned}$$

De modo que los divisores positivos de este número son

$$(n+2)(n+1) = 2070.$$

Finalmente, al resolver la ecuación cuadrática, se obtiene que el número de ceros es $n = 44$.

3.2. Prueba Selectiva

Problema 1.

Se tiene una sucesión de números enteros en la que cada término, después del primero, es la suma de su antecesor con su sucesor. Si el entero en la posición 70 es el 16 y el entero en la posición 75 es el -23, ¿cuál es el entero en la posición 2021?

(a) -16 (b) -7 (c) 23 (d) 39 (e) No sé

Solución: Denotemos a_n como el término n-ésimo de la sucesión. Veamos que $a_{n+3} = -a_n$, en efecto:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + a_{n+3}, \\ a_{n+2} &= a_n + a_{n+2} + a_{n+3}, \\ a_{n+3} &= -a_n. \end{aligned}$$

Así, $a_{n+6} = -a_{n+3} = a_n$. Por otro lado, tenemos que $2020 = 70 + 325 \times 6$ y $2019 = 75 + 324 \times 6$, concluyendo así que $a_{2020} = a_{70}$, $a_{2019} = a_{75}$ y $a_{2022} = -a_{2019}$.

Finalmente, $a_{2021} = a_{2020} + a_{2022} = a_{70} - a_{75} = 16 + 23 = 39$.

Problema 2.

Sea P un polinomio tal que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, se verifica que $P(x+y) = 2P(x) - P(y)$. Si además, $P(x-1)P(x+1) - 2P(x-1) + P(12) = 6$, ¿cuál es el mayor valor que puede tomar $P(x^2 + 4x - 5)$?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5 (e) No sé

Solución: Veamos que un polinomio que cumple la condición del enunciado es constante. En efecto, tomando $x = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} P(y) &= 2P(0) - P(y), \\ 2P(y) &= 2P(0), \\ P(y) &= P(0); \end{aligned}$$

Esto es, para cualquier número real y, el valor de $P(y)$ es el número $P(0)$. Hallemos el valor de $P(0)$. Supongamos que $P(0) = a$, entonces reemplazando *en* $P(x-1)P(x+1) - 2P(x-1) + P(12) = 6$, *obtenemos:*

$$a^2 - 2a + a = 6,$$
$$a^2 - a - 6 = 0,$$
$$(a-3)(a+2) = 0.$$

De ahí que $a = 3$ *o* $a = -2$. *Así, el mayor valor que puede tomar* $P(x^2+4x-5)$ *es* 3.

Problema 3.

Victoria y Felipe tienen, cada uno, una colección de figuritas. Ellos desean regalar todas sus figuritas a sus sobrinos de modo que a cada uno le corresponda la misma cantidad. Victoria tiene V figuritas, y Felipe tiene F. Para calcular cuántas le corresponden a cada sobrino, Victoria digita en la calculadora $V + F \div S$, donde S es el número de sobrinos, y obtiene 27 como respuesta. Felipe, para estar seguro del resultado, digita $F + V \div S$ en la calculadora, pero obtiene 22 como respuesta. ¿Cuál es la cantidad de figuritas que realmente le corresponde a cada sobrino?

(a) 7 (b) 6 (c) 5 (d) 21 (e) No sé

Solución: Sea x *la cantidad de figuritas que realmente le corresponde a cada sobrino, esto es* $x = \frac{F+V}{S}$. *Sumando las dos expresiones calculadas por Victoria y Felipe, tenemos*

$$V + \frac{F}{S} + F + \frac{V}{S} = 49,$$
$$V + F + \frac{V+F}{S} = 49,$$
$$Sx + x = 49,$$
$$x = \frac{49}{S+1}.$$

Pero x *es un entero, entonces* $S+1$ *debe ser un divisor de* 49. *Los divisores de* 49 *son* $1, 7$ *y* 49. *Veamos cada caso:*

Caso 1. *Si* $S+1 = 1$, *entonces* $S = 0$, *pero esto no es posible, pues* S *es el número de sobrinos.*

Caso 2. *Si* $S+1 = 7$, *entonces* $S = 6$, *y en tal caso* $x = \dfrac{49}{7} = 7$.

Caso 3. *Si* $S+1=49$, *entonces* $S=48$, $x=1$ *y* $V+F=48$, *pero al reemplazar estos valores en la expresión calculada por Victoria tenemos:*

$$\begin{aligned} V+\frac{F}{48} &= 27, \\ \frac{48V+F}{48} &= 27, \\ 47V+V+F &= 1296, \\ 47V+48 &= 1296, \\ V &= \frac{1296-48}{47}. \end{aligned}$$

Pero V *es un entero, entonces este caso es también es imposible.*

Por lo anterior, el número de figuritas que realmente le corresponde a cada sobrino es 7.

Problema 4.

Al llegar al hotel, Alejandro vio en un cartel las medidas de la piscina cuyo piso es rectangular. Al entrar a la piscina, llena de agua hasta el máximo de su capacidad, recordó que el ancho de la piscina era de 5 metros y su capacidad era de 153 metros cúbicos, pero olvidó los demás datos, así que decidió medirlos con su propia estatura. Nadando de principio a fin descubrió que el largo de la piscina medía 10 veces su altura y que, de pie, el agua lo sobrepasaba por $10\,cm$. ¿Cuál es el área del piso de la piscina?

(a) $85\,m^2$ (b) $80\,m^2$ (c) $95\,m^2$ (d) $90\,m^2$ (e) No sé

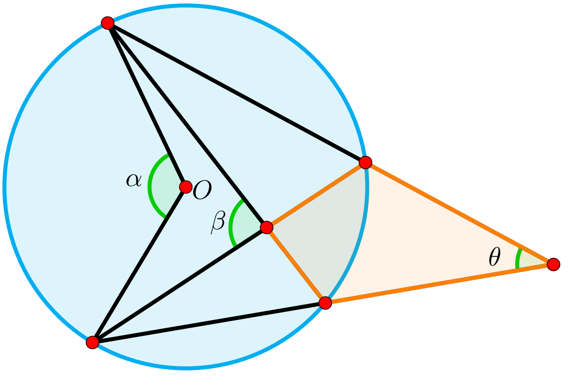
Solución: *Sea* x *la estatura de Alejandro,* h *la altura de la piscina y* l *el largo de la misma. Entonces* $5\times h\times l=153$, $l=10x$ *y* $h=x+0{,}1$. *Por lo tanto*

$$\begin{aligned} 153 &= 5(10x)(x+0{,}1). \\ 0 &= 50x^2+5x-153. \end{aligned}$$

Aplicando fórmula cuadrática obtenemos $x=1{,}7$, *luego* $l=17$. *De ahí que el área del piso de la piscina es* $5\times l=5\times 17=85\,m^2$.

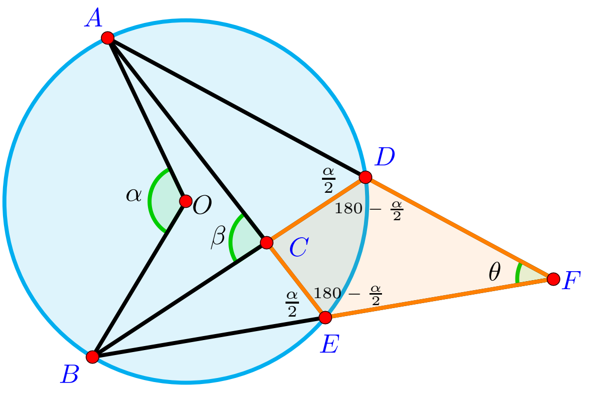
PROBLEMA 5.

En la siguiente figura O es el centro de la circunferencia. Si $\alpha = 94°$ y $\beta = 58°$, ¿cuál es el medida del ángulo θ?



(a) 38° (b) 36° (c) 29° (d) 18° (e) No sé

Solución: Considere la siguiente figura:



Note que:

- *AOB es un ángulo central, mientras que ADB y AEB son ángulos inscritos que subtienden el mismo arco que AOB, de ahí que:*

$$\measuredangle ADB = \measuredangle AEB = \frac{\measuredangle AOB}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

- *Los ángulos ACB y ECD son opuestos por el vértice, luego*

$$\measuredangle ECD = \beta.$$

- *Los ángulos CDF y FEC son suplementarios con los ángulos ADB y AEB, respectivamente, esto es:*

$$\measuredangle CDF = \measuredangle FEC = 180 - \frac{\alpha}{2}.$$

Finalmente, como las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero suman 360°, tenemos, para el cuadrilátero $CDFE$:

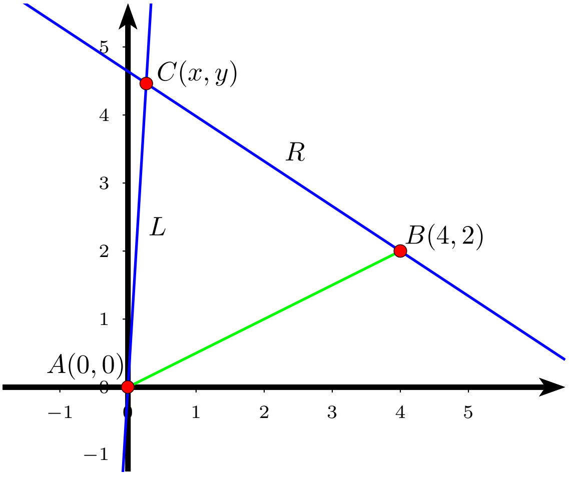
$$\begin{aligned}
\measuredangle ECD + \measuredangle CDF + \measuredangle DFE + \measuredangle FEC &= 360,\\
\beta + 180 - \frac{\alpha}{2} + \theta + 180 - \frac{\alpha}{2} &= 360,\\
\theta &= \alpha - \beta,\\
\theta &= 94^\circ - 58^\circ,\\
\theta &= 36^\circ.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 6.

Sean R y L dos rectas en el plano, tales que R pasa por el punto $A(0,0)$ y L, por el punto $B(4,2)$. Si las rectas se cortan en el punto C de tal manera que el triángulo ABC es equilátero, ¿cuál es el producto de las pendientes de estas rectas?

(a) -33 (b) -11 (c) $-3/13$ (d) -1 (e) No sé

Solución 1: Considere la siguiente ilustración:



Hallemos las coordenadas del punto $C(x, y)$. Dado que el triángulo ABC es *equilátero, entonces $AC = BC = AB$, esto es*[3]*:*

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}.$$

De ahí que

$$\begin{aligned} 20 &= x^2+y^2, \\ 20 &= (x-4)^2+(y-2)^2, \\ 20 &= x^2-8x+16+y^2-4y+4, \\ -20 &= -8x-4y \\ y &= 2x-5. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 20 &= x^2+(2x-5)^2, \\ 20 &= x^2+4x^2-20x+25, \\ 0 &= 5x^2-20x+5. \\ x &= 2\pm\sqrt{3}. \\ y &= 1\mp 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Luego, las coordenadas de C son[4] $C\left(2-\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3}\right)$ *y por lo tanto el producto de las pendientes*[5] *de las rectas L y R está dado por*

$$\begin{aligned} m_L \times m_R &= \frac{1+2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \times \frac{1+2\sqrt{3}-2}{2-\sqrt{3}-4}, \\ m_L \times m_R &= \frac{\left(2\sqrt{3}+1\right)\left(2\sqrt{3}-1\right)}{\left(-\sqrt{3}+2\right)\left(-\sqrt{3}-2\right)}, \\ m_L \times m_R &= \frac{(2\sqrt{3})^2-1}{(-\sqrt{3})^2-4} = \frac{11}{-1} = -11. \end{aligned}$$

Solución 2: Considere la siguiente ilustración:

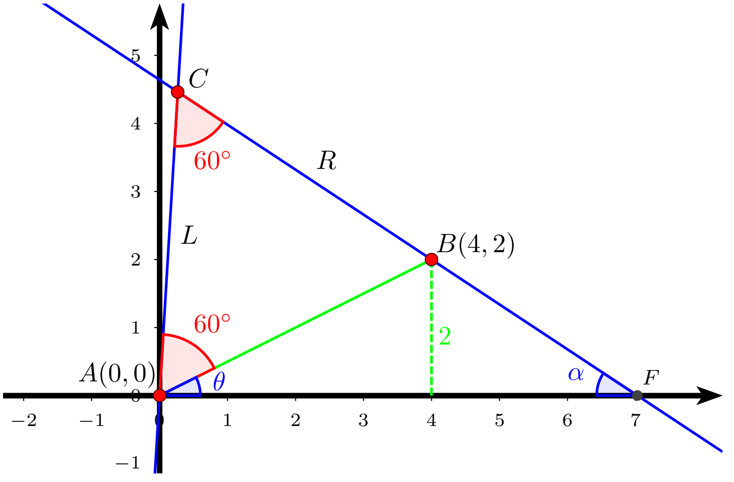
---

[3] La distancia entre los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ está dada por

$$PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

[4] Existen dos posibilidades para C, sin embargo, para resolver el ejercicio tomamos a C en el primer cuadrante (como en la figura). El lector puede comprobar que al tomar la otra opción para C, la solución es análoga y la respuesta es la misma.

[5] Recuerde que la pendiente de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por $m = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.



Dado que el triángulo ABC es equilátero, cada uno de sus ángulos internos mide $60°$. *Además, note que* $60° + 60° + \theta + \alpha = 180°$, *luego* $\alpha = 60° - \theta$, *y* $\tan\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. *De modo que las pendientes*[6] *de las rectas L y R están dadas por:* $m_L = \tan(\theta + 60)$ *y* $m_R = \tan(-\alpha) = \tan(\theta - 60°)$, *respectivamente. Por lo tanto,*[7]

$$
\begin{aligned}
m_L \times m_R &= \tan(\theta + 60°) \times \tan(\theta - 60°)\\
&= \frac{\tan\theta + \tan 60°}{1 - \tan\theta \tan 60°} \times \frac{\tan\theta - \tan 60°}{1 + \tan\theta\tan 60°},\\
&= \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}},\\
&= \frac{\frac{1}{4} - 3}{1 - \frac{3}{4}} = -11.
\end{aligned}
$$

Problema 7.

¿Cuántos enteros positivos de 4 cifras, todas diferentes, comparten únicamente dos dígitos con 2819, uno en la misma posición y el otro en diferente posición?

Por ejemplo, el 6893 es uno de estos números.

(a) 720 (b) 990 (c) 480 (d) 660 (e) No sé

[6] Si α es el ángulo de inclinación de una recta, es decir el ángulo que forma la recta con el semieje positivo de la x, entonces su pendiente está dada por $m = \tan\alpha$.

[7] Recuerde la identidad $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

Solución: Analicemos los siguientes casos:

Caso $1:$ *cuando* 2 *es el dígito en la misma posición. Entonces el dígito en diferente posición tiene* 2 *posibilidades al colocarse en cada una de las* 3 *cifras restantes, y para las* 2 *cifras que queden hay* 6 *y* 5 *posibilidades, respectivamente. La cantidad de posibles números tomando a* 2 *como el dígito en la misma posición es*

$$(1 \times 2 \times 6 \times 5) + (1 \times 6 \times 2 \times 5) + (1 \times 6 \times 5 \times 2) = 180.$$

Caso $2:$ *el* 8 *es el dígito en la misma posición. Entonces el dígito en diferente posición tiene* 2 *posibilidades al colocarse en cada una de las* 3 *cifras restantes. Si el dígito de los miles es el dígito en diferente posición entonces hay* $2 \times 1 \times 6 \times 5 = 60$ *números. Si el dígito en diferente posición está en las unidades o en las decenas, la cifra de los miles no tiene* 6*, sino* 5 *posibilidades, pues el* 0 *no se debe considerar, luego la cantidad de posibles números es:*

$$(5 \times 1 \times 2 \times 5) + (5 \times 1 \times 5 \times 2) = 100.$$

La cantidad de posibles números siendo 8 *el dígito en la misma posición es* $60 + 100 = 160$.

Los casos en los que el 1 *o el* 9 *es el dígito en la misma posición, el razonamiento es análogo al caso del* 8*, y la cantidad de posibles números es la misma,* 160 *para cada uno.*

Por lo anterior, el total de números de 4 *cifras con todas sus cifras diferentes entre sí que comparten únicamente un dígito en la misma posición y un dígito en diferente posición con* 2819 *es:*

$$180 + 160 + 160 + 160 = 660.$$

Problema 8.

En un supermercado se etiquetan los productos con códigos que son números enteros de 10 dígitos. ¿Cuántos códigos $ABCDEFGHIJ$ cumplen que todos sus dígitos son diferentes y

$$A > B > C > D > E < F < G < H < I < J?$$

Por ejemplo, el código 8652013479 cumple.

(a) 126 (b) 210 (c) 252 (d) 84 (e) No sé

Solución: *De las condiciones del enunciado se deduce que $E = 0$. Además, como los dígitos de cada código están ordenados, al escoger A, B, C y D, los demás dígitos quedarán determinados. Ahora bien, los dígitos del código deben ser diferentes, entonces A, B, C y D se pueden escoger de $\binom{9}{4} = 126$ formas diferentes. Por lo tanto, hay 126 códigos que cumplen las condiciones del enunciado.*

Problema 9.

¿Cuántos números enteros positivos menores que 2021 pueden ser escritos como la suma de 3, 5 y 7 números enteros consecutivos?

(a) 18 (b) 19 (c) 20 (d) 21 (e) No sé

Solución: *Note que los números que pueden escribirse como suma de n enteros consecutivos, con n impar, son precisamente los múltiplos de n. En efecto, sea a un entero, entonces:*

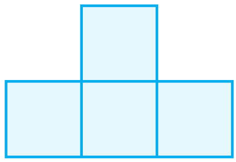
$$\left(a - \frac{n-1}{2}\right) + \cdots + (a-2) + (a-1) + a + (a+1) + (a+2) + \cdots + \left(a + \frac{n-1}{2}\right)$$
$$= \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n-veces} = na.$$

Por lo anterior, los enteros positivos menores que 2021 que se pueden escribir como suma de 3, 5 y 7 enteros consecutivos son los múltiplos de 3, 5 y 7 es decir, los múltiplos de 105, menores que 2021, y de estos hay $\left\lfloor \frac{2021}{105} \right\rfloor = 19$.

3.3. Prueba Final

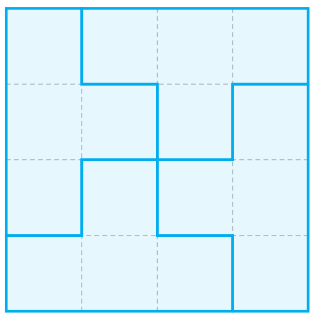
Problema 1.

Determine todos los enteros positivos p para los cuales se puede cubrir un tablero cuadrado de ajedrez de lado $2p\,cm$, con p^2 fichas como la que se muestra en la siguiente figura:



Nota: cada cuadradito de la ficha tiene $1\,cm$ de lado.

Solución: Si p es par, entonces la longitud de cada lado del tablero es múltiplo de 4 por lo que podríamos completar el tablero con bloques de fichas como el que se muestra a continuación:



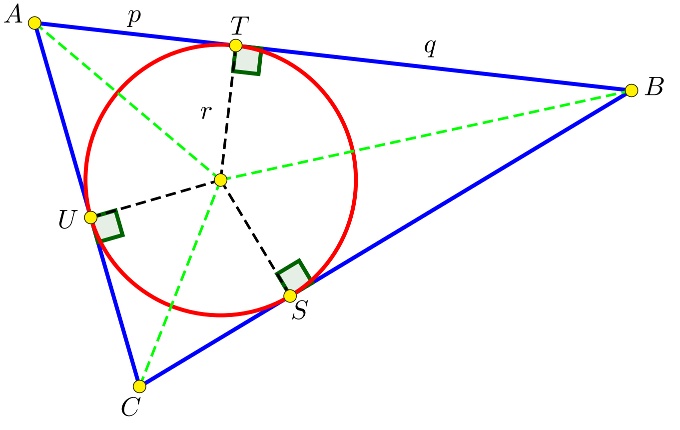
Por otra parte, si $p = 1$ claramente no es posible cubrir el tablero como se indica en el enunciado y si $p = 2k + 1$ es impar mayor que 1 tampoco, pues en tal caso el área del tablero será $2(2k + 1) \times 2(2k + 1) = 4 \times I\,cm^2$, donde $I = (2k + 1) \times (2k + 1)$ es un número impar, y dado que el área de cada ficha es $4\,cm^2$, entonces se requiere un número impar de fichas. Pero, note que si coloreamos el tablero como un tablero de ajedrez (con $2p \times 2p$ casillas, cada una de $1\,cm^2$ de área), entonces cada ficha cubre tres cuadraditos negros y uno blanco o bien tres cuadraditos blancos y uno negro. Al ser un número impar de fichas, el área blanca cubierta será diferente al área negra cubierta por las fichas, pero el tablero tiene igual área negra que blanca.

Por lo anterior, los únicos valores de p para los cuales se podrá cubrir el tablero, como se indica en el enunciado son los enteros positivos pares.

Problema 2.

El incírculo de un triángulo ABC tiene $r\,cm$ de radio. Sea T el punto de tangencia del incírculo con el lado $\overline{AB}$. Si $AT = p\,cm$ y $TB = q\,cm$, halle el perímetro del triángulo ABC, en términos de p, q y r.
Nota: el incírculo de un triángulo es tangente a sus tres lados.

Solución: Considere la siguiente figura en la que se ha hecho un bosquejo de la situación del enunciado y se han nombrado U y S los otros dos puntos de tangencia del incírculo con los correspondientes lados del triángulo.



Por teorema de tangencia[8] se tiene que $AU = AT = p$, $BS = BT = q$ y $CS = CU = x$. De modo que el perímetro del triángulo ABC está dado por $P = 2p + 2q + 2x$. Pongamos a x en términos de los parámetros dados p, q y r. Usando la fórmula de Herón se tiene que el área del triángulo ABC es

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

donde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, es el semiperímetro, y a, b y c son las longitudes de los

[8] *Sea P un punto exterior a una circunferencia $\mathcal{C}$. Entonces existen dos rectas tangentes a $\mathcal{C}$ que pasan por P. Además, si T y S son los puntos de tangencia, entonces $PT = PS$.*
Este resultado se puede evidenciar trazando los radios de la circunferencia perpendiculares a las rectas tangentes en T y S, notando que así se forman dos triángulos congruentes.

lados $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ del triángulo, respectivamente.

Por otro lado, es fácil probar[9] *que esta área también está dada por $r \cdot s$.*

De modo que,

$$\begin{aligned} r \cdot s &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \\ r^2 &= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}. \end{aligned}$$

Reemplazado s, $a = x + q$, $b = p + x$ y $c = p + q$ en la última ecuación tenemos:

$$r^2 = \frac{p \cdot q \cdot x}{p + q + x},$$

de donde $x = \dfrac{r^2(p+q)}{pq - r^2}$.

Finalmente, el perímetro del triángulo ABC está dado por:

$$\begin{aligned} P = 2(p+q+x) &= 2\left(p + q + \frac{r^2(p+q)}{pq - r^2}\right), \\ P &= 2(p+q)\left(1 + \frac{r^2}{pq - r^2}\right), \\ P &= \frac{2pq(p+q)}{pq - r^2}. \end{aligned}$$

Problema 3.

Para cada entero positivo n denotamos por $d(n)$ a la cantidad de divisores positivos de n. Así, por ejemplo $d(6) = 4$, pues los divisores positivos de 6 son: 1, 2, 3 y 6.

Sean a y b cuadrados perfectos mayores que 1 y primos relativos entre sí. Pruebe que si

$$d(a \times b) = d(a) + d(b) + d(c),$$

para algún entero positivo c, entonces c debe ser un cuadrado perfecto.

Nota: Dos enteros son primos relativos si su máximo común divisor es 1.

Solución: Primero probaremos que un entero positivo n es un cuadrado perfecto

[9] Trace los segmentos desde el centro del incírculo a los vértices del triángulo. Se formarán tres triángulos. Tome como base de cada uno el correspondiente lado del triángulo ABC y note que la altura de los tres triángulos, respecto a tal base es r, el radio del incírculo. Finalmente, sume estas áreas para determinar el área del todo el triángulo.

si y solo si el número de sus divisores positivos $d(n)$ es impar. Veamos dos formas de hacerlo:

Forma 1. *Sea n un cuadrado perfecto positivo mayor que 1 y k un divisor positivo de n diferente de $|\sqrt{n}|$, para cada k existe n/k que también es divisor de n, por lo que al contar dichos divisores (que aparecen en parejas) el resultado es un número par, pero al contar el divisor $r = |\sqrt{n}|$, que solo se cuenta una vez, pues $r = n/r$, se tiene que la cantidad de divisores positivos de n es impar. De la misma manera, si n es un entero positivo que no es un cuadrado perfecto, entonces n tendrá una cantidad de divisores positivos par, pues para cada k positivo que divide a n, existe n/k, es decir todos sus divisores positivos aparecen en parejas. El caso de $n = 1$ puede hacerse por inspección, de hecho $d(1) = 1$ es impar.*

Forma 2. *Sea n un entero positivo mayor que 1 y sea*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n},$$

su descomposición en factores primos, esto es, cada p_i es primo, y $a_i \in \mathbb{Z}^+$. Sabemos que

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1).$$

De modo que si n es un cuadrado perfecto entonces todo α_i es par, por lo que $d(n)$ es impar, pues todos sus factores son números impares. Ahora bien, si n es un entero positivo que no es un cuadrado perfecto, entonces al menos algún α_i será impar, luego $d(n)$ tendrá al menos un factor par y en consecuencia $d(n)$ es par. El caso de $n = 1$ puede hacerse por inspección.

Volviendo al ejercicio, note además que como a y b son cuadrados perfectos, entonces ab es cuadrado perfecto. Por lo tanto, $d(ab)$ es impar, al igual que $d(a)$ y $d(b)$. Como $d(a) + d(b)$ es par, pero $d(ab) = d(a) + d(b) + d(c)$ es impar, necesariamente $d(c)$ es impar, de donde se concluye que c es un cuadrado perfecto por lo evidenciado anteriormente, porque además es positivo. De hecho, $d(ab) > d(a) + d(b)$, pues todo divisor positivo de a o de b divide a ab, el único que se cuenta dos veces en $d(a) + d(b)$ es 1, pues a y b son primos relativos, pero este se complementa con ab que también es divisor de ab, y considerando además que $|\sqrt{ab}|$ divide a ab, entonces $d(ab) > d(a) + d(b)$.

Problema 4.

Al expandir el polinomio $P(x) = (36x^2 + 50x + 14)^{2021}$ se obtiene una expresión de la forma $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{4042}x^{4042}$. Sea I la suma de los coeficientes con subíndice impar, esto es

$$I = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{4041}.$$

Determine el número de cifras que tiene I.

Solución: *Note que $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{4042}$ es la suma de todos los coeficientes del polinomio, mientras que $P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{4042}$ es la suma alternada de los coeficientes, en la que llevan signo negativo los coeficientes con subíndice impar. Así pues*

$$\begin{aligned}\frac{P(1) - P(-1)}{2} &= \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{4042} - (a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + a_{4042})}{2},\\ &= \frac{2a_1 + 2a_3 + 2a_5 + \cdots + 2a_{4041}}{2},\\ &= a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{4041}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, evaluando $P(1)$ y $P(-1)$ en la expresión inicial del enunciado, tenemos que

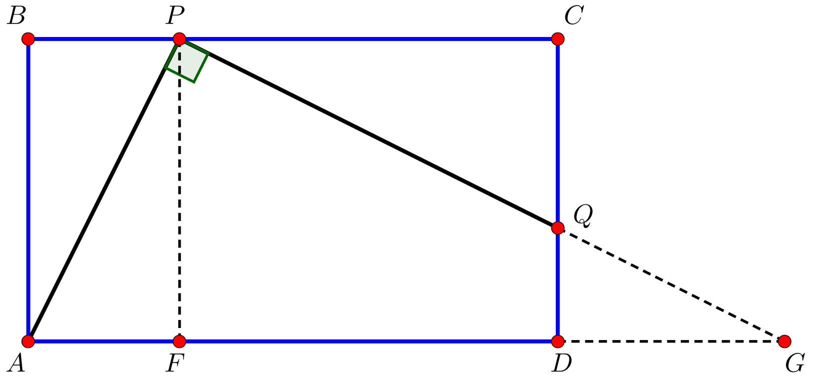
$$I = \frac{P(1) - P(-1)}{2} = \frac{100^{2021} - 0}{2} = 50 \times 100^{2020} = 5 \times 10^{4041}.$$

Luego I es un 5 seguido de 4041 ceros, ergo, tiene 4042 cifras.

Problema 5.

Sobre los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ de un rectángulo $ABCD$ se marcan los puntos P y Q, respectivamente, de modo que $\measuredangle APQ = 90^\circ$. Si $CD = 6\,cm$ y $CQ = 3 \times QD$, determinar el valor numérico de $BP \times PC$.

Solución: *Considere la siguiente figura en la que se ha hecho un bosquejo de la situación, se han prolongado los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{AD}$ y se ha trazado $\overline{PF}$ perpendicular a $\overline{AD}$.*



Sea G al punto de intersección entre $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{AD}$. Note que los triángulos PCQ y GDQ son semejantes, y dado que $CQ = 3 \times QD$, entonces $PC = 3 \times GD$. Además, $PCDF$ es un rectángulo luego $FD = PC = 3 \times GD$. Usando el Teorema de la Media Geométrica[10] *aplicado al triángulo APG, tenemos que*

$$PF^2 = AF \times (FD + DG) = AF \times (3GD + GD) = AF \times 4GD$$

$$\frac{PF^2}{4} = AF \times GD.$$

Pero, $PF = CD = 6\,cm$, $AF = BP$ y $PC = 3GD$, entonces

$$\frac{6^2}{4} = BP \times \frac{PC}{3},$$

de donde el valor numérico de $BP \times PC$ es 27.

PROBLEMA 6.

Una sucesión de números enteros es *radiactiva* si cada término, después del primero se obtiene al dividir el término anterior entre el menor de sus divisores primos. ¿Cuántas sucesiones *radiactivas* tienen su decimotercer término igual a 715?

Solución: *Note que cada sucesión queda definida a partir de su término inicial,*

[10] *Si h denota la altura de un triángulo rectángulo perpendicular a la hipotenusa, y p y q las longitudes de los segmentos en los que divide a la hipotenusa, entonces $h^2 = pq$.* Este resultado puede probarse usando semejanza de triángulos. Sea ABC un triángulo rectángulo en C y D el punto intersección entre la hipotenusa y la altura perpendicular a esta. Entonces los triángulos ACD y CBD son semejantes, de ahí que $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{DB}{CD}$, esto es $CD^2 = AD \times DB$.

luego habrán tantas sucesiones como posibilidades hay para el término inicial. Contemos las posibilidades para el término inicial de una sucesión con las características del enunciado.

Dado que $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$, *entonces el término inicial será de la forma*

$$2^a \cdot 3^b \cdot 5^{c+1} \cdot 11 \cdot 13,$$

donde a, b *y* c *son enteros no negativos y* $a+b+c = 12$, *pues hasta el término* 13 *se ha dividido este término* 12 *veces por alguno de sus divisores primos (como se indica en el enunciado) es decir, la suma de los exponentes de sus divisores primos han disminuido* 12 *unidades.*

Así las cosas, se trata de mirar de cuántas formas se puede escribir al 12 *como suma de tres números enteros no negativos, esto lo podemos hacer de la siguiente forma:*

Representemos al 12 *con* 12 *puntitos:*

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

y usaremos dos símbolos $+$ *para separar los puntos, quedando* 3 *grupos de puntos que representan cada uno, un número. Por ejemplo, la suma* $1 + 3 + 8 = 12$ *se representa así:*

$$\bullet + \bullet\bullet\bullet + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

Otras posibles sumas son:

$$+\bullet\bullet\bullet\bullet+\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \longrightarrow 0 + 4 + 8 = 12,$$

$$\bullet\bullet\bullet\bullet++\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \longrightarrow 4 + 0 + 8 = 12,$$

$$\bullet\bullet+\bullet\bullet\bullet\bullet+\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \longrightarrow 2 + 4 + 6 = 12.$$

Note que en total hay 14 *objetos (*12 *puntos y* 2 *símbolos* $+$*) y cada caso diferente está determinado por la posición de los* $+$, *luego nuestro problema se reduce a determinar de cuántas formas podemos ubicar los* 2 *símbolos* $+$ *en las* 14 *posiciones que determinan los objetos, y esto se puede hacer de*

$$\binom{14}{2} = 91$$

formas diferentes.[11] *Por lo tanto, existen* 91 *sucesiones diferentes con las características del enunciado.*

[11] En general, el número de formas en que se pueden separar n objetos en k categorías está dado por:

$$\binom{\text{objetos} \ + \ \text{categorías} \ -1}{\text{categorías} \ -1} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

a este método se le conoce como Técnica de separadores.

Apéndice A

Cuadro de Honor

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la Decimotercera versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Secundaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 7334 participantes del certamen, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

NIVEL BÁSICO

Puesto	Medalla	Participante
1.º		*Daniela Meza Quintero* *Colegio Nuestra Señora del Rosario, Floridablanca*
2.º		*David Santiago Pinto Flórez* *Jorge Ardila Duarte, Bucaramanga.*
3.º		*Bellorosme Nhajais Mogollón Padilla* *Institución Educativa Oriente Miraflores, Bucaramanga.*
4.º		*Juan Pablo Leal Rojas* *Esc. Normal Superior Francisco Paula Santander, Málaga.*
5.º		*Kevin Mojica Castellanos* *Colegio Nuestra Señora de Fátima, Onzaga*

NIVEL MEDIO

PUESTO	MEDALLA	PARTICIPANTE
1.º		*Robert Julián Pérez Ramírez* *Instituto San José de La Salle, Bucaramanga.*
2.º		*Simón Dante Salamanca Galvis* *Jorge Ardila Duarte, Bucaramanga.*
3.º		*Margi Alejandra García Gamboa* *Colegio Integrado Camacho Carreño, Suratá.*
4.º		*Ana María Fernández Zapata* *Col. Técnico Nuestra Señora de La Presentación, San Gil.*
5.º		*Juan David Navarro Jerez* *Colegio de La Presentación, Bucaramanga.*

NIVEL AVANZADO

PUESTO	MEDALLA	PARTICIPANTE
1.º		*Camilo Andrés Rodríguez Forero* *Escuela Normal Superior de Bucaramanga.*
2.º		*David Alfonso Pérez Rojas* *Colegio Cooperativo Comfenalco, Bucaramanga.*
3.º		*Daniel Eduardo Naranjo Garzón* *Colegio Integrado Lucas Caballero, Suaita.*
4.º		*Diego Alejandro Lozano Duarte* *Colegio Campestre Celestín Freinet, Piedecuesta.*
5.º		*María Fernanda Herrera Herrera* *Col. Integrado Nuestra Señora de Las Mercedes, Lebrija.*

Bibliografía

[1] BOLAÑOS W. *Problemas y Soluciones Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas Universitaria 1998-2019.* Universidad Antonio Nariño y Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[2] BROCHERO F. Y RESTREPO J. *Un recorrido por la Teoría de Números.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[3] GÓMEZ J., VALDEZ R. Y VÁZQUEZ R. *Principio de las Casillas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2011.

[4] HEMMERLING E. *Geometría Elemental.* Bakersfield College. Limusa, México, 2009.

[5] JIMÉNEZ L., GORDILLO J. Y RUBIANO G. *Teoría de números para principiantes.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.

[6] MADROÑERO J Y CONTRERAS I. *Un recorrido por el Álgebra.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[7] SOBERÓN P. *Combinatoria para olimpiadas* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2010.

[8] RESTREPO P. *Un recorrido por la Combinatoria I.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

[9] VALDERRAMA A. Y GONZÁLEZ E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Nivel Intermedio 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010

[10] VALDERRAMA A. Y GONZÁLEZ E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Primer Nivel 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010.

Vicerrectoría Administrativa
Vicerrectoría de Investigación y Extensión

Vicerrectoría Académica

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"