XII Olimpiadas Regionales de Matemáticas Secundaria

INFORMES
olimpiadas@matematicas.uis.edu.co
Tel.: 6450301, 6344000 Ext.: 2316, 2583, 2581
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

ORM Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Grupo Educación Matemática UIS EDUMAT

SEA Sistema de apoyo a la excelencia académica

Instituto de Proyección Regional y Educación a Distancia IPRED Educación Interactiva y Abierta al Liderazgo

Vicerrectoría Académica
Universidad Industrial de Santander

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

Doudécimas Olimpiadas Regionales de Matemáticas Secundaria

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga

2020

Elaboración y edición

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas - 2020.

Directora

Adriana Alexandra Albarracín Mantilla

Coordinador

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Monitores

Álvaro Javier Andrade Durán

Álvaro Javier Riaño Blanco

Edson Jair Suárez Porras

Gabriel Moncada Santos

Johan Sebastián Cortés Villamizar

José Camilo Rueda Niño

Juan David Rueda Centeno

Juan Sebastian Blanco Silva

Leider Aldair Barajas

Natalia Isabel Pérez Niño

Nicolás Luna Chacón

Santiago Niño Campos

Yolanda Torrado Ascanio

Introducción

" (...) Escribí muchísimo durante los siguientes diez años, pero muy poco que tuviera alguna importancia; no hay más que cuatro o cinco artículos que puedo recordar con cierta satisfacción. Los auténticos momentos decisivos de mi carrera llegaron diez o doce años más tarde, en 1911, cuando empecé mi larga colaboración con Littlewood, y en 1913, cuando descubrí a Ramanujan. Desde entonces, todos mis mejores trabajos están unidos a ellos, y es obvio que estas asociaciones fueron los acontecimientos más decisivos de mi vida"

G.H. Hardy - Apología de un matemático.

La Universidad Industrial de Santander, como institución de educación superior del ámbito regional, forma ciudadanos como profesionales integrales, éticos, con sentido político e innovadores; apropia, utiliza, crea, transfiere y divulga el conocimiento por medio de la investigación, la innovación científica, tecnológica y social, la creación artística y la promoción de la cultura, buscando de este modo el fortalecimiento de una sociedad democrática, participativa, deliberativa y pluralista, con justicia y equidad social, comprometida con la preservación del medio ambiente y el buen vivir.

En el marco de esta misión institucional, la Escuela de Matemáticas ofrece a la sociedad santandereana y de la región de influencia de la Universidad, un escenario de alta calidad para el cultivo de las matemáticas, promoviendo entre los integrantes de la comunidad académica una actitud creativa y rigurosa, y construyendo un ambiente académico basado en la solidaridad, la empatía y el reconocimiento de los otros en su dignidad humana. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos

de pregrado y posgrado, sino también por su participación activa y crucial en la formación de los estudiantes de otros programas de la Universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a los diversos retos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las habilidades matemáticas en el nororiente colombiano, la Escuela de Matemáticas ha diseñado y ejecutado desde el 2009, el proyecto Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (ORM-UIS), para secundaria y primaria, a través del fortalecimiento de las competencias matemáticas de los estudiantes y la capacitación simultánea de los profesores que orientan dichos procesos. Incluso, en esta oportunidad, para el año 2020, haciendo esfuerzos logísticos y financieros, dio continuidad al proyecto, como una manera de contribuir a la "normalidad" que nos tocó a todos inventarnos, para no dejar de encontrarnos alrededor de nuestra pasión en común por los números.

Las ORM-UIS abordan cinco (5) áreas, a saber: i) teoría de números; ii) combinatoria; iii) álgebra, iv) lógica, y v) geometría. Por otra parte, las ORM-UIS se desarrollan en tres (3) niveles, según el grado de escolaridad de los participantes, tanto de la formación en básica primaria, como la media vocacional, del modo como se muestra en la siguiente tabla:

	Nivel Básico	Nivel Medio	Nivel Avanzado
Primaria	3°	4°	5°
Secundaria	6° y 7°	8° y 9°	10° y 11°

La cartilla que tiene en sus manos compendia los problemas matemáticos propuestos por el equipo de trabajo de las ORM-UIS en las distintas fases de la Duodécima versión del certamen, desarrollada durante el extraño año 2020, dirigido a estudiantes de educación media vocacional. En esta oportunidad se contó con la participación de 82 colegios, para un total de 4557 estudiantes en competencia, provenientes de 31 municipios de los departamentos de Santander, Norte de Santander y Cesar.

En esta versión las ORM-UIS, como siempre lo hace con alguien en especial, destacó la fugaz vida, pero, la asombrosa e intuitiva creatividad matemática del autodidacta Srinivasa Ramanujan $(1887 - 1920)$, quien, sin haber recibido educación formal, logró cautivar al mundo de los números de su época, no solo en su natal India, sino, también, en la lejana y fría Inglaterra, en donde incluso, fue elegido parte de la Royal Society por su aporte a la teoría de números y al estudio de las funciones elípticas. Era tan asombroso su trabajo que el profesor y colaborador de Ramanujan en Cambrigde, G.H. Hardy, lo comparaba con la grandeza de Euler o Jacobi, demostrando así que no hay límite alguno, ni económico, ni geográfico, ni religioso, ni de otro tipo, para quien ha sido "tocado" por la belleza detrás de un simple número, por ejemplo, el 1729.

Este documento consta de tres (3) capítulos, cada uno correspondiente a un nivel de la competencia: nivel básico, nivel medio y nivel avanzado. En cada uno de ellos el lector encontrará los problemas y la correspondiente solución, de las distintas soluciones que puede tener cada uno. Por esa razón, el equipo de trabajo de las ORM-UIS recomienda e incentiva a quien desee enfrentar nuevamente estos problemas, a descubrir y proponer, métodos alternativos de solución que se destaquen por su sencillez, ingenio y belleza matemática.

La Escuela de Matemáticas, a través del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la UIS (EDUMAT), reconoce la labor esencial del maestro en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las competencias matemáticas de los estudiantes, y por ello elabora esta cartilla para su utilización en el aula de clase, que incluye, también, la preparación y discusión creativa entre pares en los espacios de formación docente. Esperamos que los participantes de la educación básica secundaria y media vocacional, los profesores, y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, disfrute tanto como nosotros lo hicimos, el hermoso y milenario ejercicio del pensamiento matemático.

Las ORM-UIS no son una mera competencia, implican una puesta en escena colectiva para que los niños, niñas y adolescentes desplieguen sus capacidades, fortalezcan sus habilidades y se reconozcan como sujetos capaces de enfrentar problemas y solucionarlos. Esto psicológicamente fomenta la autopercepción como sujetos con comprensión de su entorno, y esa es la exigencia que hace hoy la humanidad. Creemos firmemente que allí debemos dirigir todos nuestros esfuerzos, al fortalecimiento de ciudadanías que, gracias al pensamiento crítico que se desarrolla desde el ejercicio matemático, puedan enfrentarse a la diversidad de problemáticas que enfrenta la sociedad actual y que requieren de una mirada no solo crítica, sino, además, creativa para ser solucionadas.

El proyecto ORM- UIS agradece y destaca al grupo de estudiantes de Santander y Norte de Santander, que participaron de esta versión, y que han demostrado ser capaces de asumir el reto de pensar y sentir problemas sencillos y bellos de matemáticas, con pasión y con rigor, a pesar de los innumerables desafíos que la pandemia por la COVID-19 trajo para todos nosotros en este año.

Índice general

1. Nivel Básico **1**

1.1. Prueba Clasificatoria 1

1.2. Prueba Selectiva 7

1.3. Prueba Final 14

2. Nivel Medio **19**

2.1. Prueba Clasificatoria 19

2.2. Prueba Selectiva 26

2.3. Prueba Final 34

3. Nivel Avanzado **41**

3.1. Prueba Clasificatoria 41

3.2. Prueba Selectiva 48

3.3. Prueba Final 55

A. Ejercicios propuestos **61**

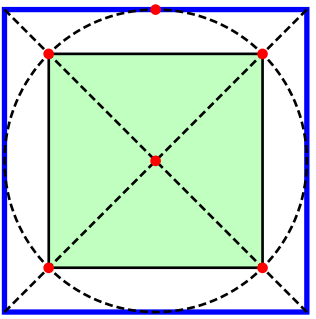
B. Cuadro de Honor **69**

Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

1. Sobre una hoja cuadrada se trazan sus diagonales y se dibuja un círculo colocando el compás fijo en el punto de intersección de las diagonales y el lápiz en el punto medio de uno de los lados de la hoja. Luego se unen los puntos de intersección de las diagonales con el círculo, como se muestra en la figura. Si el lado de la hoja mide $10\,cm$, ¿cuánto mide el área coloreada en verde?

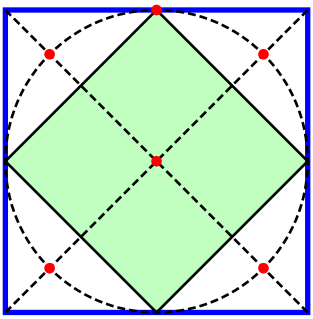


$(a)\ \dfrac{200}{3}\,cm^2$ $(b)\ 75\,cm^2$ $(c)\ 20\,cm^2$ $(d)\ 50\,cm^2$ (e) No sé

Solución: Girando el cuadrado verde en sentido antihorario, de manera que sus vértices coincidan con los puntos medios de los lados de la hoja, como se muestra en la siguiente figura, se observa que el área del cuadrado verde

A_V, coincide con la mitad del área de la hoja A_H, esto es

$$A_V = \frac{A_H}{2} = \frac{10 \times 10\, cm^2}{2} = 50\, cm^2.$$



2. Laura y Camilo tienen cierta cantidad de monedas de cien pesos ($100). Si cada uno tiene al menos una moneda y al sumar los cuadrados de la cantidad de monedas que tiene cada uno el resultado es 169, ¿cuánto dinero tienen en total Laura y Camilo?

(a) $1.700 (b) $1.300 (c) $800 (d) $1.000 (e) No sé

Solución: Sea x la cantidad de monedas que tiene Laura y y la cantidad de monedas que tiene Camilo, entonces $x^2 + y^2 = 169 = 13^2$, luego

$$x^2 = 13^2 - y^2,$$

de esta manera vemos que y debe ser un entero mayor que 0 y menor que 13. Veamos las posibilidades:

y	x^2	x
1	168	*no es entero*
2	165	*no es entero*
3	160	*no es entero*
4	153	*no es entero*
5	144	12
6	133	*no es entero*
⋮	⋮	⋮
12	25	5

De ahí que $y = 12$ y $x = 5$ (o viceversa), luego $x + y = 17$. Por lo tanto Laura y Camilo tienen 17 monedas de $100 en total, es decir $1.700.

Note que la tripla $(x, y, 13)$ *es una terna pitagórica, es decir una tripla de números enteros positivos que satisfacen el teorema de Pitágoras. Así, revisando en la lista de estas ternas se tiene que* $x = 12$ *y* $y = 5$ *o viceversa.*

3. En clase de matemáticas, cada estudiante debe dibujar un polígono y decir en voz alta el resultado de la suma del número de lados con el número de vértices. Juan dice: *¡trece!*, Natalia dice: *¡catorce!*, Pedro dice: *¡doce!* y Silvia dice: *¡veinte!* ¿Cuál de los estudiantes con seguridad no realizó correctamente el ejercicio?

(a) Natalia (b) Pedro (c) Silvia (d) Juan (e) No sé

Solución: En todo polígono el número de lados coincide con el número de vértices, por lo tanto la suma de estos dos números siempre es par. Pero Juan dice ¡trece!, que es impar. De ahí que, con seguridad, Juan no realizó correctamente el ejercicio.

4. ¿Cuántos números entre 1 y 1000 son divisibles simultáneamente por 3 y por 5, pero no por 7?

(a) 391 (b) 458 (c) 66 (d) 57 (e) No sé

Solución: Si un número es divisible simultáneamente por 3 *y por* 5 *son, entonces este número es múltiplo de* 15. *Note que, entre* 1 *y* 1000, *hay* 66 *múltiplos de* 15, *para hallar esta cantidad, note que el primer múltiplo de* 15 *es* 15 *y en adelante, cada* 15 *números aparece otro múltiplo de* 15, *luego la cantidad de estos números se puede hallar dividiendo* 1000 *entre* 15 *y tomando la parte entera de esta división.*

Ahora, debemos excluir de estos 66 *múltiplos de* 15, *los que también sean múltiplos de* 7, *es decir los múltiplos de* $15 \times 7 = 105$, *estos son* 9 *en total. Por lo tanto, la cantidad de números entre* 1 *y* 1000 *que son divisibles simultáneamente por* 3 *y por* 5, *pero no por* 7 *son* $66 - 9 = 57$ *en total.*

5. La contraseña del celular de Juan es un número de 4 cifras. Si la suma de todos los dígitos de la contraseña es 14, y además la cifra de las decenas es el doble de la cifra de las centenas y la cifra de las unidades es el triple

de la cifra de las unidades de mil, ¿cuál es el producto de las cifras de la contraseña de Juan?

(a) 96 (b) 18 (c) 56 (d) 48 (e) No sé

Solución: Sea abcd la contraseña del celular de Juan, entonces

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 14, \\ c &= 2d, \\ d &= 3a. \end{aligned}$$

De modo que,

$$\begin{aligned} a+b+2b+3a &= 14, \\ 4a+3b &= 14. \end{aligned}$$

Además, como a y b son dígitos, se concluye que $a = 2$ y $b = 2$. Así, la contraseña del celular de Juan es 2246 y el producto de sus cifras es $2 \times 2 \times 4 \times 6 = 96$.

6. Cuatro amigos planean un viaje para cuando acabe la pandemia. Para hacer el viaje disponen de un automóvil que tiene 5 asientos, incluido el del conductor. Si solo 2 de los amigos saben conducir, ¿de cuántas maneras diferentes pueden acomodarse para el viaje?

(a) 12 (b) 48 (c) 16 (d) 24 (e) No sé

Solución: Dado que el automóvil tiene 5 asientos, pero solo viajarán 4 personas, entonces un asiento quedará vacío (este asiento no puede ser el del conductor). Por otra parte, solo 2 personas saben conducir, por lo que el asiento del conductor puede ocuparse de 2 formas distintas. Ahora, habiendo escogido el conductor, el asiento $\textcircled{1}$ puede estar: vacío u ocupado por alguno de los tres amigos restantes, es decir puede ir de 4 formas; el asiento $\textcircled{2}$ puede ir vacío u ocupado por alguno de los dos amigos restantes, esto es, puede ir de 3 formas, y continuando de esta manera, el asiento $\textcircled{3}$ puede ir de 2 formas y el asiento $\textcircled{4}$ de 1 forma. De manera que los cuatro amigos pueden acomodarse de $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$ maneras diferentes para el viaje.

El procedimiento anterior se conoce como el principio multiplicativo, que se resume en:

$$\underbrace{2\ opc.}_{Conductor} \times \underbrace{4\ opc.}_{Asiento\ (1)} \times \underbrace{3\ opc.}_{Asiento\ (2)} \times \underbrace{2\ opc.}_{Asiento\ (3)} \times \underbrace{1\ opc.}_{Asiento\ (4)} = \underbrace{48.}_{formas}$$

7. ¿Cuántas cifras tiene el número $4^{1000} \times 25^{1001}$?

(a) 1000 (b) 2000 (c) 2002 (d) 1002 (e) No sé

Solución: Usando propiedades de la potenciación tenemos:

$$\begin{aligned} 4^{1000} \times 25^{1001} &= \left(2^2\right)^{1000} \times \left(5^2\right)^{1001} \\ &= 2^{2000} \times 5^{2002} \\ &= 2^{2000} \times 5^{2000} \times 5^2 \\ &= 25 \times (2 \times 5)^{2000} \\ &= 25 \times 10^{2000}, \end{aligned}$$

y note que la representación decimal del número 25×10^{2000} *es un* 25 *seguido de* 2000 *ceros:*

$$25 \times 10^{2000} = 25\,\underbrace{000\ldots0}_{2000-ceros}.$$

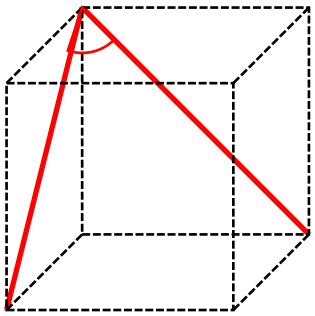
Por lo tanto el número $4^{1000} \times 25^{1001}$ *tiene* 2002 *cifras.*

8. Los padres de Óscar y su hermano mayor, preparan una fiesta sorpresa para óscar, con motivo de su cumpleaños. Para ello, deben transportar, desde la tienda hasta su casa, dos cajas del mismo peso. Si la distancia que hay de la tienda a la casa es de 720 metros, ¿qué distancia (en metros) debe recorrer cada uno, para que todos recorran la misma distancia cargando una caja?

(a) 240 (b) 480 (c) 120 (d) 80 (e) No sé

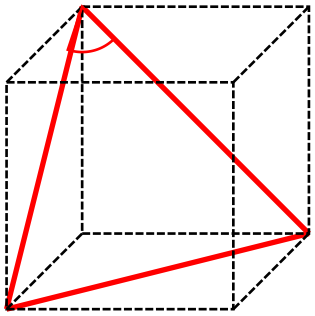
Solución: En total, las dos cajas deben recorrer $2 \times 720 = 1440\,m$. *Además, los padres de Óscar y su hermano son* 3 *personas, entonces para que todos recorrar la misma distancia cargando una caja, cada uno debe recorrer* $\dfrac{1440}{3} = 480\,m$.

9. En la siguiente figura se muestra punteado un cubo y en línea continua dos de las diagonales de sus caras. ¿Cuál es la medida (en grados) del ángulo entre estas dos diagonales?



(a) 45 (b) 70 (c) 90 (d) 60 (e) No sé

Solución: Considere la siguiente figura en la que se ha trazado la diagonal de la cara inferior del cubo en el dibujo del enunciado:



Note que el triángulo que se forma es equilátero, pues sus lados son diagonales de caras del cubo (cuadrados iguales). Por lo tanto, cada uno de los ángulos internos de este triángulo, en particular el ángulo pedido, miden $60°$.

1.2. Prueba Selectiva

1. La clave del teléfono de Karen es un número de cuatro cifras que al ser multiplicado por 99999 se obtiene un número cuyas últimas cuatro cifras son 3579. ¿Cuál es la suma de las cifras de la clave de Karen?

(a) 12 (b) 13 (c) 24 (d) 16 (e) No sé

Solución: Sea abcd la clave del teléfono de Karen. Note que:

$$\begin{aligned} abcd \times 99999 &= abcd \times (1000000 - 1) \\ &= abcd000000 - abcd \\ &= \cdots 3579. \end{aligned}$$

Reescribiendo la última igualdad en forma vertical tenemos:

$$\begin{array}{rr} & abcd000000 \\ - & \quad abcd \\ \hline & \cdots 3579 \end{array}$$

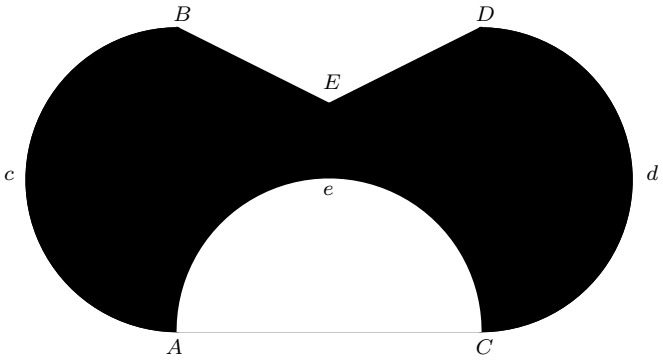
De donde podemos deducir facilmente que $abcd = 6421$. *Por lo tanto, la suma de las cifras de la clave de Karen es* 13.

2. En una tienda de zapatos, se depositan en una canasta los zapatos de un mismo estilo y talla. Si se depositaron 3 pares de zapatos rojos, 7 pares de zapatos azules y 8 pares de zapatos blancos, ¿cuál es la mínima cantidad de zapatos que se deben extraer al azar, para estar seguros de obtener un par del mismo color?

(a) 18 (b) 9 (c) 4 (d) 19 (e) No sé

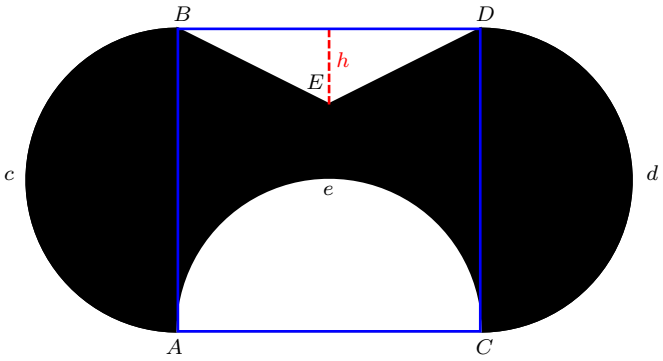
Solución: En el "peor de los casos"se pueden extraer 3 *zapatos rojos,* 7 *zapatos azules y* 8 *zapatos blancos, por lo habiendo extraído* 18 *zapatos, puede ocurrir que aún no tengamos un par del mismo color. Pero note que si extraemos uno más, con seguridad completaremos un par del mismo color. Así que, la mínima cantidad de zapatos que se deben extraer al azar, para estar seguros de obtener un par del mismo color es* 19.

3. Batman decidió cambiar su logo por el que se muestra en la figura. ¿Cuál es el área, en centímetros cuadrados, del nuevo logo sabiendo que c, d, e son cada una, media circunferencia de radio $3\,cm$, $BE = DE = \sqrt{10}\,cm$ y $ABCD$ es un cuadrado?



(a) $33 + 9\pi$ (b) $33 + \frac{27\pi}{2}$ (c) 9π (d) $33 + \frac{9\pi}{2}$ (e) No sé

Solución: Considere la siguiente figura:



Note el área del semicírculo c coincide con el área del semicírculo e, de manera que el área del nuevo logo de Batman está dada por: el área del cuadrado $ABCD$ menos el área del triángulo BED más el área del semicírculo d. Veamos:

- *Dado que el radio de cada semicircunferencia es $3\,cm$ entonces el lado del cuadrado $ABCD$ es $6\,cm$ de modo que su área es $6 \times 6 = 36\,cm^2$.*

- *El triángulo BED es isósceles y tiene base $BD = 6\,cm$ y altura h (ver el gráfico), donde*

$$h = \sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 - 3^2} = 1\,cm.$$

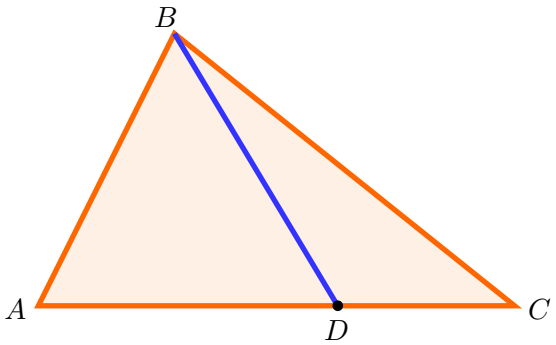
Luego su área está dada por: $\dfrac{6 \times 1}{2} = 3\,cm^2$.

- *El área del semicírculo d es:* $\dfrac{\pi(3)^2}{2} = \dfrac{9\pi}{2}\,cm^2$.

Por lo tanto, el área del logo está dada por:

$$36 - 3 + \frac{9\pi}{2} = 33 + \frac{9\pi}{2}\,cm^2.$$

4. Suponga que el área del triángulo ABC que se muestra en la siguiente figura es $36\,cm^2$ y que el área del triángulo ABD es $21\,cm^2$. Si $AC = 12\,cm$, ¿cuál es el valor numérico de $AD \times DC$?



(a) 27 (b) 35 (c) 36 (d) 32 (e) No sé

Solución: Sea h la altura del triángulo ABC respecto a la base $\overline{AC}$. Entonces h también es la altura de los triángulo ABD y DBC respecto a las bases $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, respectivamente. De esta manera, tenemos que:

$$\frac{AD \times h}{2} = 21 \qquad y \qquad \frac{DC \times h}{2} = 36 - 21 = 15.$$

De ahí que

$$\frac{\dfrac{AD \times h}{2}}{\dfrac{DC \times h}{2}} = \frac{AD}{DC} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}.$$

Luego $\frac{AD}{DC} = \frac{7}{5}$ *o equivalentemente* $AD = \frac{7}{5}DC$ *y también*

$$AC = AD + DC = 12,$$

de modo que:

$$\begin{aligned} \frac{7}{5}DC + DC &= 12, \\ \frac{12}{5}DC &= 12, \\ DC &= 5, \end{aligned}$$

y así, $AD = 12 - 5 = 7$. *Por lo tanto,* $AD \times DC = 7 \times 5 = 35$.

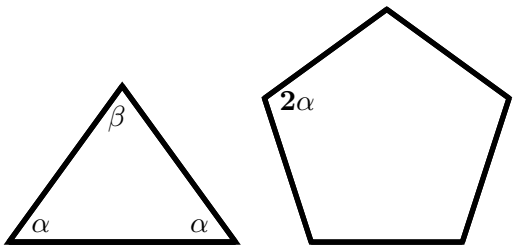
5. ¿Cuántos divisores positivos impares tiene el número 540?

(a) 24 (b) 16 (c) 6 (d) 8 (e) No sé

Solución: Dado que $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$, *entonces sus divisores positivos impares tienen la forma* $d = 3^a \times 5^b$, *donde* $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ *y* $b \in \{0, 1\}$. *Por lo tanto,* 540 *tiene* $4 \times 2 = 8$ *divisores positivos impares, a saber:*

$$\begin{aligned} 3^0 \times 5^0 &= 1, & 3^0 \times 5^1 &= 5, \\ 3^1 \times 5^0 &= 3, & 3^1 \times 5^1 &= 15, \\ 3^2 \times 5^0 &= 9, & 3^2 \times 5^1 &= 45, \\ 3^3 \times 5^0 &= 27, & 3^3 \times 5^1 &= 135. \end{aligned}$$

6. En la siguiente figura se encuentra un triángulo isósceles y un pentágono regular. ¿Cuál es el valor de $\beta - \alpha$?



(a) $18°$ (b) $20°$ (c) $36°$ (d) $54°$ (e) No sé

Solución: Recuerde que la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono está dada por $180(n-2)$, *donde* n *es el número de lados. Por lo tanto, la medida de cada ángulo interno del pentágono regular mide*

$$\frac{180(5-2)}{5} = 108^\circ,$$

de ahí que $2\alpha = 108^\circ$, *luego* $\alpha = 54^\circ$. *Además, la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es* 180°, *esto implica que*

$$\begin{aligned} \beta + 2\alpha = \beta + 108^\circ &= 180^\circ, \\ \beta &= 72^\circ, \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\beta - \alpha = 72^\circ - 54^\circ = 18^\circ$.

7. Un tanque se llena con dos líquidos diferentes que se vierten a través de dos llaves. La llave 1 vierte el líguido A y la llave 2 vierte el líquido B. Al abrir solo la llave 1, el tanque se llena en 3 horas, y si se abre solo la llave 2, se llena en 4 horas. Si se abren las dos llaves al tiempo, ¿qué fracción del contenido total del tanque representa el líquido B justo cuando el tanque se llena?

$(a)\ \frac{3}{7}$ $(b)\ \frac{7}{12}$ $(c)\ \frac{5}{12}$ $(d)\ \frac{4}{7}$ (e) No sé

Solución: Note que la llave 1 *llena* $\frac{1}{3}$ *del tanque en una hora, mientras que la lleve* 2 *llena* $\frac{1}{4}$ *del tanque en una hora. Así, si se abren las dos llaves al tiempo, en una hora se habrá llenado* $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$, *del tanque. Luego, si en* 1 *hora se llena* $\frac{7}{12}$ *del tanque, ¿en cuánto tiempo se llena completamente? usando regla de tres simple, tenemos:*

Tiempo(horas)		*Llenado*
1	$\longrightarrow$	$7/12$
t	$\longrightarrow$	$12/12$

$$t = \frac{1}{7/12} = \frac{12}{7},$$

esto es, en $\frac{12}{7}$ *de hora se llena completamente el tanque.*

Ahora, en este tiempo ¿cuánto líquido B cayó al tanque? Nuevamente, usando regla de tres simple tenemos:

Tiempo(horas)		*Líquido B*
1	$\longrightarrow$	$1/4$
$12/7$	$\longrightarrow$	x

$$x = \frac{12}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{7}.$$

De ahí que la fracción del contenido total del tanque que representa el liquído B justo cuando el tanque se llena es $\frac{3}{7}$.

8. Carlos está corriendo sobre una pista atlética de $400\,m$. Andrés es su compañero de ejercicio, pero llegó tarde, cuando Carlos ya había dado 3 vueltas a la pista. Si por cada vuelta que da Carlos, Andrés recorre $500\,m$, ¿cuántas vueltas alcanza a recorrer Carlos, luego de la llegada de Andrés, antes de que Andrés iguale el total de la distancia recorrida por Carlos?

(a) 8 (b) 3 (c) 12 (d) 4 (e) No sé

Solución: Cuando llegó Andrés, Carlos ya había recorrido $3 \times 400 = 1200\,m$. *Ahora, por cada* $400\,m$ *que recorre Carlos, Andrés recorre* $500\,m$, *esto es, por cada vuelta Andrés recorre* $100\,m$ *más que Carlos, de modo que, para que las distancias recorridas por Carlos y Andrés sean iguales, los atletas deben recorrer* 12 *vueltas.*

9. Determine la suma de las cifras del mayor entero que al ser dividido por 40, su residuo es el triple que el respectivo cociente.

(a) 13 (b) 7 (c) 19 (d) tal entero no existe (e) No sé

Solución: Sea n *un número entero que al ser dividido por* 40 *deja como un residuo el triple del respectivo cociente. Entonces, por el algoritmo de la división se tiene que:*

$$n = 40q + r,$$

donde q *y* r *son enteros tales que* $0 \leq r < 40$ *y* $r = 3q$. *De lo anterior, tenemos:*

$$n = 40q + 3q = 43q,$$

donde $0 \leq 3q < 40$. *De modo que el mayor valor que puede tomar* n *se obtiene cuando* $q = 13$. *Así, el mayor entero* n *que cumple el requisito del enunciado es* $n = 43 \times 13 = 559$, *de ahí que la suma de sus cifras es* 19.

1.3. Prueba Final

1. Se hizo una encuesta a 2000 estudiantes de ciertos colegios de Santander y se obtuvo que:

(i) 1400 estudiantes quieren estudiar Matemáticas.

(ii) 1000 estudiantes quieren estudiar Física.

(iii) 200 estudiantes no quieren estudiar Física ni Matemáticas.

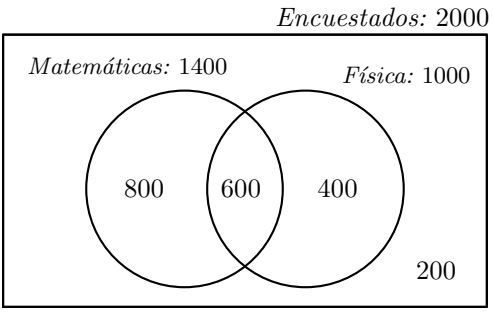
¿Cuántos de los estudiantes encuestados quieren estudiar Matemáticas y Física?

Solución: Dado que el total de estudiantes encuestados es 2000 *y de ellos* 200 *no quieren estudiar Física ni Matemáticas, entonces* 1800 *son los que manifestaron querer estudiar alguna de las dos carreras o las dos. Ahora, dado que* 1400 *estudiantes quieren estudiar Matemáticas y* 1000 *quieren estudiar Física entonces los que quieren estudiar Física y Matemáticas son:*

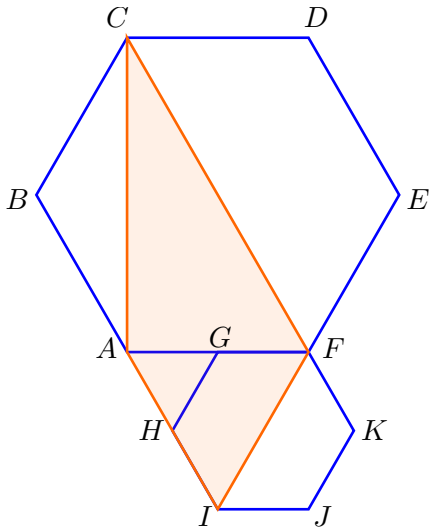
$$1400 + 1000 - 1800 = 600.$$

En notación de conjuntos, sea M el conjunto de los estudiantes encuestados que quieren estudiar Matemáticas y F el conjunto de los que quieren estudiar Física, entonces $M \cap F$ es el conjunto de los que quieren estudiar Física y Matemáticas, mientras que $M \cup F$ es el conjunto de los que quieren estudiar Física o Matemáticas. Así:

$$\begin{aligned} \#(M \cup F) &= \#M + \#F - \#(M \cap F) \\ 1800 &= 1400 + 1000 - \#(M \cap F) \\ \#(M \cap F) &= 600. \end{aligned}$$



2. En la siguiente figura los hexágonos $ABCDEF$ y $FGHIJK$ son regulares. Si G es el punto medio de $\overline{AF}$ y $AF = 2\,cm$, determine el área de la región sombreada en naranja.



Solución: Note que el área sombreada corresponde al área del triángulo ACF más el área del triángulo AFI. El triángulo ACF es rectángulo A, y la longitud de su hipotenusa $\overline{CF}$ es el doble de la longitud de un lado del hexágono $ABCDEF$, esto es $CF = 2AF = 2 \times 2 = 4\,cm$. Así, por el Teorema de Pitágoras tenemos que:

$$AC = \sqrt{CF^2 + AF^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}\,cm.$$

Luego el área del triángulo ACF es:

$$\frac{AF \times AC}{2} = \frac{2 \times 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\,cm^2.$$

Por otra parte, note que el triángulo AFI es equilátero y cada uno de sus lados mide $2\,cm$. Además, por el Teorema de Pitágoras,

$$IG = \sqrt{AI^2 - AG^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}\,cm,$$

de ahí que el área de este triángulo es:

$$\frac{AF \times IG}{2} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,cm^2.$$

Finalmente, tenemos que el área sombreada está dada por:

$$2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}\,cm^2.$$

3. Para cada entero positivo n, sea $s(n)$ la suma de los dígitos de n, cada uno elevado a la posición que tiene de derecha a izquierda. Por ejemplo, $s(147)=1^3+4^2+7$. ¿Cuántos enteros positivos cumplen que $s(n)=n$?

Solución: Sea n un entero positivo, entonces

$$n=a_n\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_3\cdot 10^2+a_2\cdot 10+a_1,$$

donde los dígitos a_i son las cifras de n en su representación decimal, esto es $0\leq a_i\leq 9$, para cada $i\in\{1,2,\cdots,n\}$. De este modo,

$$s(n)=a_n^n+\cdots+a_3^3+a_2^2+a_1,$$

y término a término encontramos que $n\geq s(n)$ y que la igualdad solo se tiene para los números de una cifra.

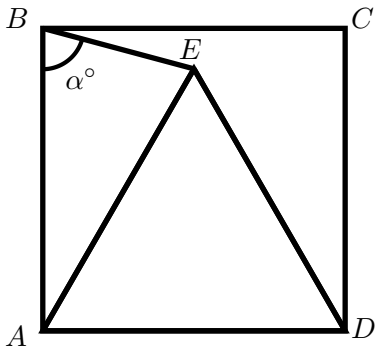
4. El promedio de 30 números naturales consecutivos es $\frac{2021}{2}$. Determine el mayor de estos números.

Solución: Sean $n,n+1,n+2,\ldots,n+29$ los 30 números naturales consecutivos. Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+29)}{30}&=\frac{2021}{2},\\
n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+29)&=30315,\\
30n+(0+1+2+3+\cdots+29)&=30315,\\
30n+\frac{29(30)}{2}&=30315,\\
30n&=30315-435,\\
n&=996.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el mayor de los números es $n+29=1025$.

5. En la siguiente figura $ABCD$ y DAE son polígonos regulares. ¿Cuál es el valor de α?



Solución: Dado que el triángulo ADE es regular, es decir es equilátero, entonces $\measuredangle DAE = 60°$. Además, el polígono $ABCD$ es un cuadrado de modo que $\measuredangle DAB = 90°$ luego

$$\measuredangle EAB = \measuredangle DAB - \measuredangle DAE = 90° - 60° = 30°.$$

Por otra parte, note que $AB = AE$, luego el triángulo EAB es isósceles en A, así que $\alpha° = \measuredangle ABE = \measuredangle BEA$ y como la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, entonces:

$$\begin{aligned} 180° &= \measuredangle EAB + \measuredangle ABE + \measuredangle BEA, \\ 180° &= 30° + \alpha° + \alpha°, \\ 150° &= 2\alpha°, \\ 75° &= \alpha°. \end{aligned}$$

6. La maestra de matemáticas, le pide a Lucía construir un polígono regular con cierto número de lados y contar sus diagonales. Pero Lucía no leyó bien las instrucciones y construyó un polígono regular con un lado menos de lo indicado por la maestra. Si el número de diagonales del polígono que construyó Lucía difiere en 7 del número de diagonales del polígono que solicitaba la maestra, ¿de cuántos lados era el polígono regular debía construir Lucía?

Solución: Sea k el número de lados del polígono que debía construir Lucía. Teniendo en cuenta que el número de diagonales de un polígono regular de n lados está dado por $\frac{n(n-3)}{2}$, entonces el número de diagonales del polígono que debía construir es:

$$\frac{k(k-3)}{2},$$

pero el número de digonales del polígono que realmente construyó (con $k-1$ lados) es:

$$\frac{(k-1)((k-1)-3)}{2} = \frac{(k-1)(k-4)}{2}.$$

Y se sabe que

$$\frac{k(k-3)}{2} - \frac{(k-1)(k-4)}{2} = 7,$$

Luego,

$$\begin{aligned} k(k-3) - (k-1)(k-4) &= 14, \\ k^2 - 3k - (k^2 - 4k - k + 4) &= 14, \\ 2k - 4 &= 14, \\ k &= 9. \end{aligned}$$

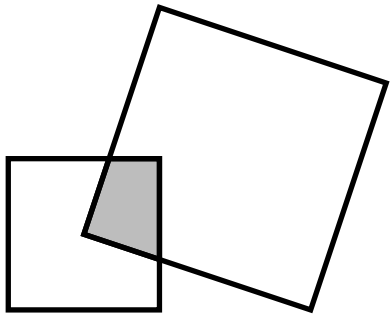
Por lo tanto, el polígono regular que debía construir Lucía era de 9 lados.

Capítulo 2

Nivel Medio

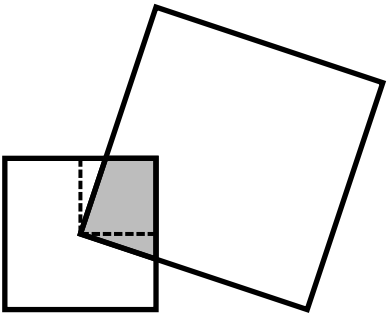
2.1. Prueba Clasificatoria

1. En la siguiente figura, el cuadrado grande tiene un vértice en el centro del cuadrado pequeño y sus perímetros están en relación 3 a 1. Si el área sombreada es $3\,cm^2$, ¿cuál es el área del cuadrado grande?



(a) $144\,cm^2$ (b) $108\,cm^2$ (c) $36\,cm^2$ (d) $72\,cm^2$ (e) No sé

Solución: Considere la siguiente figura, en la que los segmentos punteados se trazaron desde el centro del cuadrado, perpendiculares a sus lados.



Note que los $3\,cm^2$ *del área sombreada, corresponden a* $\frac{1}{4}$ *del área del cuadrado más pequeño, luego el área de este cuadrado es* $3 \times 4 = 12\,cm^2$, *y de ahí que cada uno de sus lados mide* $2\sqrt{3}\,cm$. *Ahora, como los perímetros de los cuadrados están en relación* 3 *a* 1, *las longitudes de sus lados guardan esta misma relación, de modo que el lado del cuadrado más grande mide* $3 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\,cm$ *y por lo tanto su área es* $\left(6\sqrt{3}\,cm\right)^2 = 108\,cm^2$.

2. Un turno de un enfermero que combate el $COVID-19$ es de 13 horas. Si el enfermero inicia su turno justo en el instante en el que el tiempo que falta para acabar el día, excede en 5 horas al tiempo transcurrido del día, ¿a qué hora terminará su turno?

(a) $6:00$ a.m. del día siguiente.
(b) $7:00$ p.m.
(c) $10:30$ p.m.
(d) $9:30$ a.m.
(e) No sé

Solución: Tome las horas del día desde 0 *hasta* 24. *Sea* x *la hora del día en la que inicia el turno del enfermero. Del enunciado, tenemos que el tiempo que falta para acabar el día, excede en* 5 *horas al tiempo transcurrido del día, esto es* $24 - x = 5 + x$, *de donde* $x = 9{,}5$; *luego el turno del enfermero inicia a las* $9:30$ *a.m. y, dado que el turno es de* 13 *horas, entonces el enfermero terminará su turno a las* $22:30$ *esto es, a las* $10:30$ *p.m.*

3. Si $x + y = 8$ y $xy = 3$, entonces el valor de $|x - y|$ es

(a) $2\sqrt{13}$ (b) $\sqrt{58}$ (c) 52 (d) $2\sqrt{19}$ (e) No sé

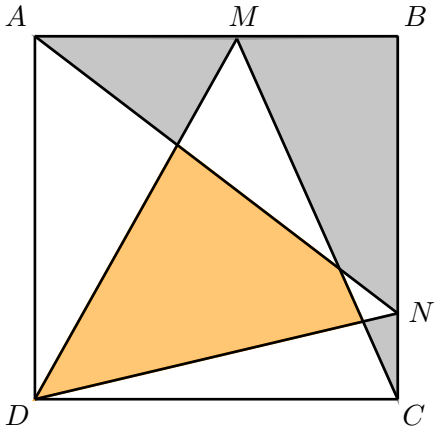
Solución: Observe que

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \\ 8^2 &= x^2 + y^2 + 2(3) \\ 58 &= x^2 + y^2.\end{aligned}$$

De ahí que $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 58 - 2(3) = 52$, *y por lo tanto*

$$|x - y| = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

4. En la siguiente figura $ABCD$ es un cuadrado con $\triangle MCD$ y $\triangle NDA$ inscritos en él. Si el área de la región naranja es $30\,cm^2$, ¿cuál es el área de la región gris?



(a) $25\,cm^2$

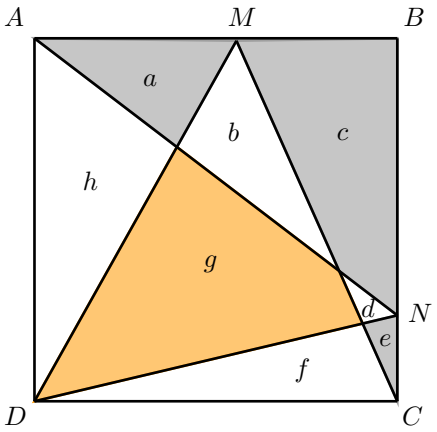
(b) $20\,cm^2$

(c) $30\,cm^2$

(d) No se puede determinar

(e) No sé

Solución: Considere la siguiente figura, en la que cada letra representa el área de la respectiva región.



Sea L el lado del cuadrado $ABCD$. Note que el área del triángulo DMC es la mitad del área del cuadrado $ABCD$, pues una de sus bases es $DC = L$ y la altura correspondiente a esta base es L, así su área es $\frac{L^2}{2}$. Por lo anterior, se tiene que

$$g + b + f = h + a + c + d + e. \tag{2.1}$$

Análogamente, el área del triángulo AND es la mitad del área del cuadrado $ABCD$, luego

$$h + g + d = a + b + c + e + f \tag{2.2}$$

Sumando las ecuaciones (2.1) y (2.2) se tiene que:

$$\begin{aligned} 2g + b + f + h + d &= h + 2a + 2c + d + 2e + b + f \\ 2g &= 2a + 2c + 2e \\ g &= a + c + e \end{aligned}$$

Luego el área de la región naranja es igual al área de la región gris. De ahí que el área de la región gris es $30\,cm^2$.

5. ¿Cuántos cuadriláteros se pueden construir con sus vértices en los vértices de un hexágono regular?

(a) 15 (b) 10 (c) 6 (d) 24 (e) No sé

Solución: Se trata de escoger 4 *puntos diferentes de un conjunto con* 6 *puntos diferentes, esto es*

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \times (6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!} \times 2!} = \frac{30}{2} = 15.$$

6. Al dividir 337 entre el número natural $n > 10$ el resto es 1. Entonces el resto que se obtiene al dividir 2020 entre n es:

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) No sé

Solución: Por el Algoritmo de la división se tiene que $337 = nq + 1$, *donde* q *es el cociente de la división de* 337 *entre* n. *Ahora, note que*

$$\begin{aligned} 2020 &= 337 \times 5 + 335, \\ &= (nq+1) \times 5 + 335, \\ &= 5nq + 5 + 335, \\ &= 5nq + \mathbf{337} + 3, \\ &= 5nq + nq + 1 + 3, \\ &= n(6q) + 4, \end{aligned}$$

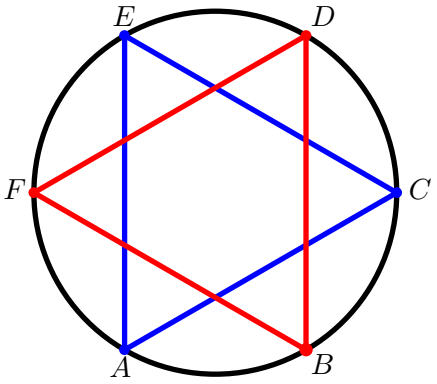
de ahí que el resto que se obtiene al dividir 2020 *entre* n *es* 4.

7. Marcos tardó 30 minutos en lavar la casa de sus padres, mientras que su hermano y su amigo, cada uno, lo hacen el doble de rápido. Si los tres lavaran la casa juntos, ¿cuánto tiempo, en minutos, gastarían?

(a) 6 (b) 15 (c) 12 (d) 10 (e) No sé

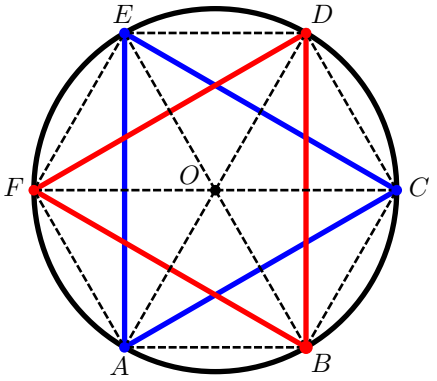
Solución: Marcos lava $\frac{1}{30}$ *de la casa en un minuto, mientras que su hermano y su amigo, cada uno, lava* $\frac{1}{15}$ *de la casa en un minuto. De modo que, si los tres lavaran la casa juntos, en un minuto lavarían* $\frac{1}{30} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$, *de la casa. Por lo tanto, para lavar la casa completa juntos, gastarían* 6 *minutos.*

8. En la siguiente figura, los triángulos $\triangle AEC$ y $\triangle BFD$ son equiláteros y tienen sus vértices sobre la circunferencia. Si área que encierra la circunferencia es $16\pi\, cm^2$ y el segmento $\overline{DF}$ es paralelo a $\overline{AC}$, determine la distancia del punto F al punto A.



(a) $2\,cm$ (b) $16\,cm$ (c) $8\,cm$ (d) $4\,cm$ (e) No sé

Solución: Considere la siguiente figura, en la que O es el centro del círculo.



Note que cada uno de los triángulos cuyos vértices son O y dos puntos consecutivos de los que están sobre la circunferencia, es equilátero.

Ahora, dado que el área que encierra la circunferencia es $16\pi = (4)^2\pi\, cm^2$, entonces el radio de la circunferencia es $4\,cm$.

Por lo anterior, $FO = 4\,cm$ y dado que el triángulo OFA es equilátero, entonces la distancia del punto F al punto A es $FA = FO = 4\,cm$.

9. Samir tiene 2001 canicas y quiere guardarlas en bolsas, de tal manera que en cada bolsa haya la misma cantidad de canicas, y esta cantidad sea un número primo. ¿Cuál es la menor cantidad de bolsas que Samir debe comprar para guardar sus canicas?

(a) 3 (b) 69 (c) 23 (d) 29 (e) No sé

Solución: La factorización prima del número de canicas es:

$$2001 = 3 \times 23 \times 29.$$

Para usar la menor cantidad de bolsas, Samir debería guardar en cada bolsa la mayor cantidad de canicas, y dadas las condiciones del problema, esta cantidad es el mayor divisor primo de 2001, *esto es* $3 \times 23 = 69$ *bolsas, cada una con* 29 *canicas. De modo que la menor cantidad de bolsas que Samir debe comprar para guardar sus canicas es* 69.

2.2. Prueba Selectiva

1. Sean a y b dos números reales positivos tales que $a+b=90$. ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar $a \times b$?

(a) 2025 (b) 900 (c) 8100 (d) 45 (e) No sé

Solución: El valor máximo de $a \times b$ *se da cuando* $a = b = \dfrac{90}{2} = 45$, *luego este valor máximo es* $a \times b = 45 \times 45 = 2025$.

2. De los divisores de $3^4 \times 5^6$, ¿cuántos son cuadrados perfectos?

(a) 11 (b) 12 (c) 7 (d) 6 (e) No sé

Solución: Observe que

$$3^4 \times 5^6 = \left(3^2\right)^2 \times \left(5^2\right)^3,$$

de manera que los divisores de $3^4 \times 5^6$, *que son cuadrados perfectos, son* $(2+1)(3+1) = 12$, *a saber:*

$$\begin{aligned}
&\left(3^2\right)^0 \times \left(5^2\right)^0 = 1\\
&\left(3^2\right)^0 \times \left(5^2\right)^1 = 5^2\\
&\left(3^2\right)^0 \times \left(5^2\right)^2 = 25^2\\
&\left(3^2\right)^0 \times \left(5^2\right)^3 = \left(5^3\right)^2\\
&\left(3^2\right)^1 \times \left(5^2\right)^0 = 3^2\\
&\left(3^2\right)^1 \times \left(5^2\right)^1 = (3\times 5)^2\\
&\left(3^2\right)^1 \times \left(5^2\right)^2 = \left(3\times 5^2\right)^2\\
&\left(3^2\right)^1 \times \left(5^2\right)^3 = \left(3\times 5^3\right)^2\\
&\left(3^2\right)^2 \times \left(5^2\right)^0 = 9^2\\
&\left(3^2\right)^2 \times \left(5^2\right)^1 = \left(3^2\times 5\right)^2\\
&\left(3^2\right)^2 \times \left(5^2\right)^2 = \left(3^2\times 5^2\right)^2\\
&\left(3^2\right)^2 \times \left(5^2\right)^3 = \left(3^2\times 5^3\right)^2.
\end{aligned}$$

3. Para cada número entero n definimos $\boxed{n}$ así:

$$\boxed{n} = (n-100)^{n+1}.$$

Por ejemplo:

$$\boxed{1} = (1-100)^{1+1} = 99^2,$$
$$\boxed{2} = (2-100)^{2+1} = -98^3,$$

Determine el valor de

$$\boxed{1} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times \cdots \times \boxed{2020}$$

(a) $(2020!)^{\frac{(2021)(2022)}{2}-1}$ (b) 1 (c) 0 (d) $(2020!)^{2020!}$ (e) No sé

Solución: Note que $\boxed{100} = (100-100)^{2+1} = 0$, *por lo tanto*

$$\boxed{1} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times \cdots \times \boxed{100} \times \cdots \times \boxed{2020} = 0.$$

4. María, Juan y Duvan se inscribieron a una academia de música. Juan comenzó clases el primer día del curso, tomando un plan con clases cada 7 días. María, que comenzó al siguiente día, tomó un plan con clases cada 5 días. Duvan, en cambio, comenzó al tercer día del curso, tomando clases dos días seguidos con 7 días de por medio. Si el curso dura 5 años (1826 días), ¿cuántas veces se encuentran los tres en clase durante todo el curso?

(a) 10 veces (b) 22 veces (c) 83 veces (d) 12 veces (e) No sé

Solución 1*: Si tenemos un grupo de amigos que asisten periódicamente a clase, y además conocemos el primer día en que se encuentran, entonces podemos obtener el siguiente encuentro al sumar el mínimo común múltiplo de los periodos con que asiste cada integrante.*
Así, vamos a determinar cuál es el número del primer día en que se encuentran los tres. Para eso consideramos el plan de Duvan en dos casos: en el que asiste el día 3 *con* 7 *días de por medio y en el que asiste el día* 4 *con* 7 *días de por medio.*

Caso 1. *Primero observamos los días en los que asisten Juan y Duvan. Haciendo una prueba de casos, encontramos que el primer día es* 12, *pues* $12 = 2 + 5 \times 2$ *y* $12 = 3 + 9 \times 1$. *Así, dado que el mínimo*

común múltiplo de 9 *y* 5 *es* 45*, los dos compañeros se encuentran los días:* $12, 12+45\times 1, 12+45\times 2, \ldots$. *Al realizar la prueba de casos, encontramos que el primer día de la lista en el que también asiste María es el* $12+45\times 1 = 57$.

Caso 2. *Los días en los que asiste Duvan son:* $4+9\times 1, 4+9\times 2, 4+9\times 3, \ldots$ *Además, note que* $22 = 1+7\times 3$ *y que* $22 = 2+5\times 4$*, por lo que el día* 22 *también asisten María y Juan; este es el primer día en que ocurre el encuentro de los* 3.

Finalmente, dado que el mínimo común múltiplo de $7, 5$ *y* 9 *es* $7\times 5\times 9 = 315$*, podemos hallar los encuentros en cada caso durante todo el curso, a saber: para el caso* 1 *los tres coinciden los días:*

$$57,\ 57+315,\ 57+315\times 2,\ 57+315\times 3,\ 57+315\times 4,\ 57+315\times 5.$$

Mientras que en el caso 2 *los tres coinciden los días:*

$$22,\ 337,\ 652,\ 967,\ 1282,\ 1597.$$

Así, María, Juan y Duvan se encuentran 12 *veces en total durante todo el curso.*

Solución 2*: Teniendo en cuenta que los días en los que asiste María son de la forma* $5k+2$*, los días en los que asiste Juan son de la forma* $7k+1$ *y los días en los que asiste Duvan son de la forma* $9k+4$ *o* $9k+3$ *entonces los días en los que asisten los tres están dados por los siguientes dos casos: Sea* x *un día en el que asisten los tres, entonces*

Caso 1. x *es de la forma* $5k+2$, $7k+1$ *y* $9k+4$*, en notación de congruencias:*

$$\left.\begin{array}{ll} x \equiv 2 & \text{mód } 5 \\ x \equiv 1 & \text{mód } 7 \\ x \equiv 4 & \text{mód } 9 \end{array}\right\}$$

Usando el Teorema Chino del residuo se obtiene que $x = 57+315k$*, con* k *un entero, pero* $x = 57+315k \leq 1826$*, entonces* $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$*. Por lo tanto en este caso tenemos* 6 *días en los que coinciden los tres amigos.*

Caso 2. *x es de la forma $5k+2$, $7k+1$ y $9k+3$, en notación de congruencias:*

$$\left.\begin{array}{ll} x \equiv 2 & \text{mód } 5 \\ x \equiv 1 & \text{mód } 7 \\ x \equiv 3 & \text{mód } 9 \end{array}\right\}$$

Usando el Teorema Chino del residuo se obtiene que $x = 22 + 315k$, con k un entero, pero $x = 22 + 315k \leq 1826$, entonces $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Por lo tanto en este caso tenemos otros 6 días en los que coinciden los tres amigos. Por lo tanto, los tres se encuentran 12 veces en clase durante todo el curso.

5. ¿De cuántas maneras pueden dormir seis palomas en 3 palomares, si en cada palomar caben como máximo 2 palomas?

(a) 60 (b) 180 (c) 90 (d) 30 (e) No sé

Solución: Claramente en cada palomar deben dormir exactamente 2 palomas. Veamos de cuántas maneras se pueden organizar. Para el primer palomar, debemos escoger 2 de las 6 palomas, note que no importa el orden, luego esta escogencia la podemos hacer de

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \times (6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4!}}{2! \times \cancel{4!}} = 15,$$

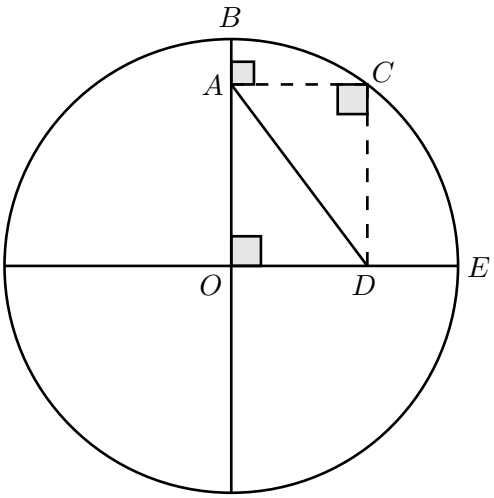
formas diferentes. Ahora, para el segundo palomar debemos escoger debemos escoger 2 de las 4 palomas que quedan, no importa el orden, luego esta escogencia la podemos hacer de

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times (4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{2! \times \cancel{2!}} = 6,$$

formas diferentes; finalmente, en el tercer palomar irán las dos palomas restantes (una sola forma de escogerlas). Así, por el principio multiplicativo, el número de formas distintas en que pueden dormir las palomas en estos palomares es:

$$\underbrace{15 \text{ opc.}}_{\text{Palomar } (1)} \times \underbrace{6 \text{ opc.}}_{\text{Palomar } (2)} \times \underbrace{1 \text{ opc.}}_{\text{Palomar } (3)} = \underbrace{90.}_{\text{formas}}$$

6. En la siguiente figura O es el centro del círculo, $\overline{AD} = 25\,cm$ y $\overline{AB} = 5\,cm$. ¿Cuál es el valor de $\overline{DE}$?



(a) $8\,cm$ (b) $10\,cm$ (c) $15\,cm$ (d) $9\,cm$ (e) No sé

Solución: Note que $OC = AD = 25\,cm$ *y que* $\overline{OC}$ *es un radio del círculo, luego*

$$\begin{aligned} 25\,cm = OC = OB &= OA + AB \\ 25\,cm &= OA + 5\,cm, \end{aligned}$$

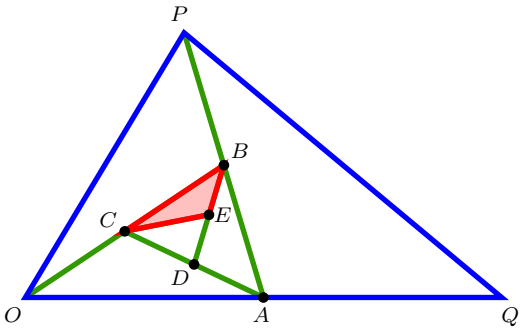
esto es $OA = 20\,cm$. *Ahora, por el Teorema de Pitágoras:*

$$\begin{aligned} AD^2 &= OA^2 + OD^2 \\ 25^2 &= 20^2 + OD^2 \\ \sqrt{625 - 400} &= OD \\ 15\,cm &= OD. \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} 25\,cm = OC = OE &= OD + DE, \\ 25\,cm &= 15\,cm + DE, \\ 10\,cm &= DE. \end{aligned}$$

7. En la siguiente figura A, B, C, D y E son los puntos medios de los correspondientes segmentos. Si el área roja es $2\,cm^2$, ¿cuál es el área del triángulo azul?

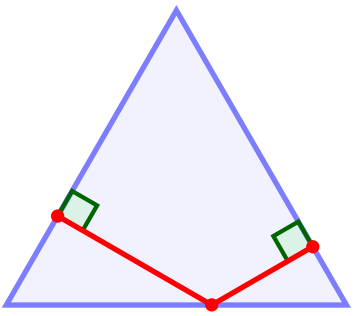


(a) $128\,cm^2$ (b) $42\,cm^2$ (c) $64\,cm^2$ (d) $32\,cm^2$ (e) No sé

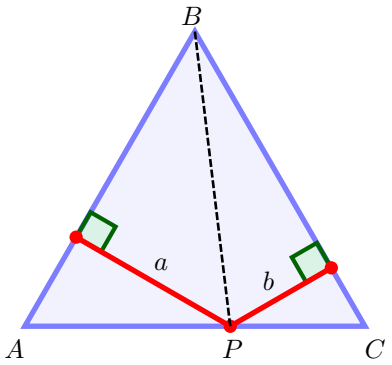
Solución: Teniendo en cuenta que cada mediana de un triángulo, divide a dicho triángulo en dos triángulos con igual área, note que el área del triángulo BCD es el doble del área del triángulo BCE, pues $\overline{CE}$ es una mediana del triángulo BCD. De esta manera el área del triángulo BCD es $2\times 2 = 4\,cm^2$ Análogamente, se tiene que el área del triángulo ABC es $2\times 4 = 8\,cm^2$, el área del triángulo ABO es $2\times 8 = 16\,cm^2$, el área del triángulo AOP es $2\times 16 = 32\,cm^2$ y finalmente, el área del triángulo OPQ (azul) es $2\times 32 = 64\,cm^2$.

8. En la siguiente figura el triángulo azul es equilátero y tiene $25\sqrt{3}\,cm^2$ de área. Si los segmentos rojos son perpendiculares a dos de los lados del triángulo, como se muestra en la figura, ¿cuál es la suma de las longitudes de estos segmentos?

(a) $5\sqrt{3}\,cm$
(b) $10\,cm$
(c) $4\sqrt{3}\,cm$
(d) $9\,cm$
(e) No sé



Solución: Considere la siguiente figura:



Sea L la longitud de un lado del triángulo ABC y, a, b las longitudes de los segmentos rojos. Note que el área del triángulo ABC está dada por:

$$\frac{L \times a}{2} + \frac{L \times b}{2} = \frac{L}{2}(a+b) = 25\sqrt{3}. \tag{2.3}$$

Por otra parte, sabemos que en un triángulo equilátero todas sus alturas tienen la misma longitud y por el teorema de Pitágoras sabemos que esa longitud es:

$$H = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}L,$$

Así, el área del triángulo ABC también está dada por:

$$\frac{L \times H}{2} = \frac{L \times \frac{\sqrt{3}}{2}L}{2} = \frac{\sqrt{3}L^2}{4} = 25\sqrt{3},$$

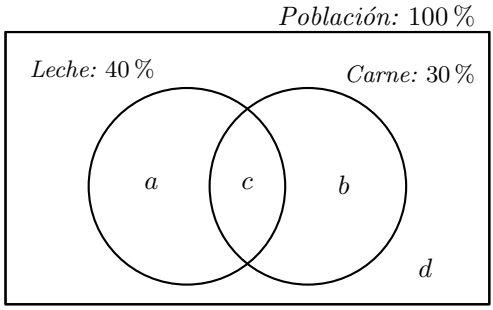
de ahí que $L = 10\,cm$, y reemplazando este valor en la ecuación (2.3) tenemos que:

$$\frac{10}{2}(a+b) = 25\sqrt{3}.$$
$$a + b = 5\sqrt{3}\,cm.$$

9. En una población el $40\,\%$ toma leche y el $30\,\%$ come carne, además los que solo comen carne o solo toman leche son el $42\,\%$. ¿Cuál es el porcentaje de los que no toman leche ni comen carne?

(a) 44 (b) 28 (c) 30 (d) 56 (e) No sé

Solución: Considere el siguiente diagrama de Venn:



Del enunciado sabemos que:

$$\begin{aligned} a+b &= 42\,\% \\ (a+c)+(b+c) &= 40\,\%+30\,\% \\ a+b+2c &= 70\,\%, \end{aligned}$$

de ahí que $c = 14\,\%$. *Luego,*

$$d = 100\,\% - (a+b+c) = 100\,\% - 42\,\% - 14\,\% = 44\,\%.$$

Por lo tanto, el porcentaje de los que no toman leche ni comen carne es $44\,\%$.

Solución 2*: Del enunciado y el diagrama de Venn se tiene que:*

$$\begin{array}{rcl} a+c & = & 40\,\% \\ b+c & = & 30\,\% \\ a+b & = & 42\,\% \\ \hline 2a+2b+2c & = & 112\,\% \\ a+b+c & = & 56\,\%, \end{array}$$

donde la cuarta ecuación se obtiene al sumar las tres primeras. Por lo tanto

$$d = 100\,\% - (a+b+c) = 100\,\% - 56\,\% = 44\,\%.$$

2.3. Prueba Final

1. Halle el coeficiente principal y el grado del polinomio:

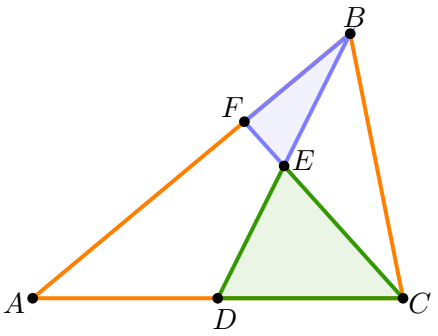
$$\prod_{n=1}^{1000} (1+2x)^n = (1+2x)\,(1+2x)^2\,(1+2x)^3 \cdots (1+2x)^{1000}\,.$$

Solución: Note que el término principal de este polinomio está dado por:

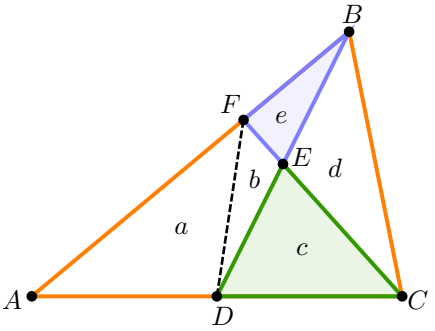
$$\begin{aligned}(2x)(2x)^2(2x)^3\cdots(2x)^{1000} &= 2^{1+2+3+\cdots+1000}x^{1+2+3+\cdots+1000}\\ &= 2^{\frac{1000\times1001}{2}}x^{\frac{1000\times1001}{2}}\\ &= 2^{500500}x^{500500}.\end{aligned}$$

De esta manera, concluimos que el coeficiente principal es 2^{500500} *y el grado de este polinomio es* 500500.

2. Determine la razón entre el área verde y el área azul en la siguiente figura, sabiendo que D y E son los puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, respectivamente.



Solución: Considere la siguiente figura:



Dado que E y D son los puntos medios de los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$, respectivamente; entonces $\overline{FE}$, $\overline{CE}$, $\overline{FD}$ y $\overline{BD}$ son medianas de los triángulos DFB, DCB, AFC y ABC, respectivamente. De manera que, si a, b, c, d, e son las áreas de los respectivos triángulos, como se muestra en la figura, entonces, sabiendo que en un triángulo cualquiera cada mediana lo divide en dos triángulos con igual área, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} b &= e \\ c &= d \\ a &= b + c \\ a + b + e &= c + d. \end{aligned}$$

Reemplazando las tres primeras ecuaciones en la cuarta tenemos:

$$\begin{aligned} (b + c) + e + e &= c + c \\ e + c + e + e &= 2c \\ 3e &= c. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la razón entre el área del triángulo EDC (verde) y el área del triángulo EBF (azul) es $\dfrac{c}{e} = \dfrac{3e}{e} = 3$.

3. Demuestre que entre 5 enteros positivos tales que sus divisores primos están en el conjunto $\{2, 3\}$ siempre hay dos cuyo producto es un cuadrado perfecto.

Solución: Un número entero positivo cuyos divisores primos están en el conjunto $\{2, 3\}$ tiene la forma:

$$2^a \times 3^b,$$

donde a y b son enteros positivos. Ahora, los números a y b pueden ser pares o impares, entonces clasificamos a los cinco enteros en los siguientes cajones:

	a	b
Cajón (1)	*par*	*par*
Cajón (2)	*par*	*impar*
Cajón (3)	*impar*	*par*
Cajón (4)	*impar*	*impar*

Note que al ser 5 *enteros, siempre habrá un cajón en el que queden al menos dos de los números.*

Para finalizar la prueba veamos que el producto de dos enteros que estén en el mismo cajón es un cuadrado perfecto. En efecto, note que la suma de dos números pares es par y la suma de dos impares también es par. Así, al multiplicar dos números del mismo cajón tendremos que la potencia de 2 *en el producto de estos números, es par, al igual que la potencia de* 3*, ya que el producto de potencias de igual base es igual a la misma base elevada a la suma de los exponentes; es decir el producto de dichos números es de la forma* $2^{2k} \times 3^{2t} = (2^k \times 3^t)^2$*, un cuadrado perfecto. A continuación se desarrolla formalmente esta idea:*

Cajón (1): *Sean* $m = 2^{2k}3^{2t}$ *y* $n = 2^{2u}3^{2s}$ *dos números que están en el cajón* (1)*, entonces*

$$m \times n = 2^{2k}3^{2t} \times 2^{2u}3^{2s} = 2^{2(k+u)} \times 3^{2(t+s)} = (2^{k+u} \times 3^{t+s})^2.$$

Luego $m \times n$ *es un cuadrado perfecto.*

Cajón (2): *Sean* $m = 2^{2k}3^{2t+1}$ *y* $n = 2^{2u}3^{2s+1}$ *dos números que están en el cajón* (2)*, entonces*

$$m \times n = 2^{2k}3^{2t+1} \times 2^{2u}3^{2s+1} = 2^{2(k+u)} \times 3^{2(t+s+1)} = (2^{k+u} \times 3^{t+s+1})^2.$$

Luego $m \times n$ *es un cuadrado perfecto.*

Los casos (3) *y* (4) *se dejan como ejercicio al lector.*

4. Sara escogió dos números reales positivos y le dijo a Laura las siguientes características sobre estos números:

- La suma de la parte entera de cada uno de los números es 2020.
- La parte entera del doble de uno de los números, menos la parte entera de sumarle al otro número un medio es 2020.

¿Cúal es la parte entera del mayor número que Sara escogió?

Nota: La parte entera de un número real es el número que se encuentra antes de la coma. Por ejemplo para el número $4,56$ *se tiene que* 4 *es su parte entera.*

Solución: La parte entera de un número c se denota por $[c]$. Llamaremos parte decimal de un número c al resultado de $c-[c]$, por ejemplo si $c = 4{,}56$, entonces $[c] = 4$ y la parte decimal de c es $0{,}56$.
Sean a y b los números escogidos por Sara, con la información dada obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} [a] + [b] &= 2020, \\ [2a] - \left[b + \frac{1}{2}\right] &= 2020. \end{aligned}$$

Analicemos los siguientes cuatro casos posibles:

Caso 1. *Si la parte decimal de a y b es mayor o igual a $0{,}5$, entonces:*

$$[2a] = 2[a] + 1, \qquad \left[b + \frac{1}{2}\right] = [b] + 1,$$

Así, el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{aligned} [a] + [b] &= 2020, \\ 2[a] + 1 - [b] - 1 &= 2020. \end{aligned}$$

y sumando las dos ecuaciones obtenemos que $3[a] = 4040$, lo cual es imposible porque $[a]$ es un entero.

Caso 2. *Si la parte decimal de a y b es menor a $0{,}5$, entonces*

$$[2a] = 2[a], \qquad \left[b + \frac{1}{2}\right] = [b],$$

luego el sistema de ecuaciones queda igual que en el caso anterior y por lo tanto no tiene solución para $[a]$ y $[b]$ enteros.

Caso 3. *Si la parte decimal de a es mayor o igual a $0{,}5$ y la parte decimal de b es menor a $0{,}5$, entonces*

$$[2a] = 2[a] + 1, \qquad \left[b + \frac{1}{2}\right] = [b],$$

Luego, el sistema de ecuaciones queda:

$$[a] + [b] = 2020,$$
$$2[a] + 1 - [b] = 2020.$$

y sumando las dos ecuaciones, obtenemos que $3[a] = 4039$, *lo cual es imposible porque* $[a]$ *es un entero.*

Caso 4. *Si la parte decimal de* a *es menor a* $0{,}5$ *y la parte decimal de* b *es mayor o igual a* $0{,}5$, *entonces*

$$[2a] = 2[a], \qquad \left[b + \frac{1}{2}\right] = [b] + 1,$$

de ahí que el sistema de ecuaciones queda:

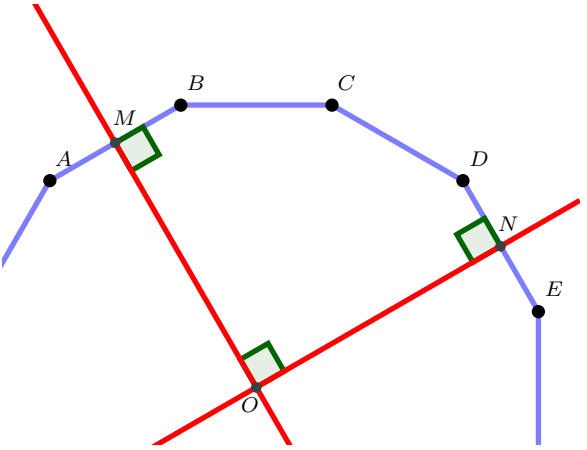
$$[a] + [b] = 2020,$$
$$2[a] - [b] - 1 = 2020.$$

y al sumar las dos ecuaciones obtenemos que $3[a] = 4041$, *esto es* $[a] = 1347$ *y por lo tanto* $[b] = 673$.

Por lo anterior la parte entera del mayor número que escogió Sara es 1347.

5. Los puntos A, B, C, D, y E son vértices consecutivos de un polígono regular de n lados. Si las mediatrices de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ de este polígono se cortan perpendicularmente, ¿cuál es el valor de n?

Solución: Considere la siguiente figura:



Sea n el número de lados del polígono regular. Sabemos que la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono con n lados es $180(n-2)$ luego, la suma de los ángulos internos del polígono $OMBCDN$ (con 6 lados) es:

$$90 + 90 + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D + 90 = 180(6-2) \tag{2.4}$$

Por otra parte, como el polígono del enunciado es regular y tiene n lados, cada uno de sus ángulos internos mide

$$\frac{180(n-2)}{n},$$

en particular,

$$\measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle D = \frac{180(n-2)}{n}, \tag{2.5}$$

De esta manera, reemplazando (2.5) en (2.4) se tiene que:

$$\begin{aligned} 3 \times 90 + 3 \times \frac{180(n-2)}{n} &= 180 \times 4, \\ \frac{540(n-2)}{n} &= 450, \\ 540n - 1080 &= 450n, \\ 90n &= 1080, \end{aligned}$$

de donde se concluye que $n = 12$.

6. Si n es un número de dos cifras que tiene exactamente 12 divisores positivos y su cuadrado tiene exactamente 33 divisores positivos, ¿cuál es el número n?

Solución: Observe que $33 = 3 \times 11 = (2+1)(10+1)$, entonces $n^2 = p^2 q^{10}$, de donde $n = p \times q^5$, con p y q números primos diferentes. Note que n tiene $(1+1)(5+1) = 12$ divisores, como además tiene que ser de dos cifras, entonces $p = 3$ y $q = 2$. Así, $n = 3 \times 2^5 = 96$.

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

1. ¿Cuál es el menor entero positivo n tal que $n!$ (el factorial de n) es divisible por 1540?

Recuerde que para cada entero positivo n, el factorial de n es el número $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

(a) 13 (b) 17 (c) 11 (d) 19 (e) No sé

Solución: Observe que $1540 = 2^2 \times 5 \times 7 \times 11$. *Como el mayor primo que divide a* 1540 *es* 11, *entonces* $n = 11$ *es el menor entero positivo tal que* $11! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10 \times 11$ *es divisible por* 1540.

2. Dados 8 puntos en el plano tales que tres cualesquiera de ellos no están alineados, ¿cuántos triángulos se pueden dibujar con sus vértices en dichos puntos?

(a) 24 (b) 56 (c) 2 (d) 120 (e) No sé

Solución: Se trata de seleccionar 3 *puntos diferentes de un conjunto con* 8 *puntos, como no importa el orden en que se seleccionan los puntos, esto se puede hacer de* 56 *formas diferentes:*

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times (8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{3! \times \cancel{5!}} = 56.$$

3. La suma de 50 enteros positivos consecutivos es 1775. ¿Cuál es la suma de los siguientes 100 enteros consecutivos?

(a) 11211 (b) 11312 (c) 10989 (d) 11050 (e) No sé

Solución: Sean $n+1, n+2, n+3, \ldots, n+50$ *los* 50 *enteros positivos consecutivos cuya suma es* 1775, *entonces*

$$\begin{aligned}(n+1)+(n+2)+(n+3)\cdots+(n+50) &= 1775,\\ 50n+(1+2+3+\cdots+50) &= 1775,\\ 50n+\frac{50\times 51}{2} &= 1775,\\ 50n &= 500,\\ n &= 10.\end{aligned}$$

Luego el mayor de los números es $n+50 = 10+50 = 60$. *Ahora sumemos los siguientes* 100 *enteros consecutivos, esto es:*

$$\begin{aligned}(60+1)+(60+2)+\cdots+(60+100) &= 100\times 60+(1+2+\cdots+100),\\ &= 6000+\frac{100\times 101}{2},\\ &= 11050.\end{aligned}$$

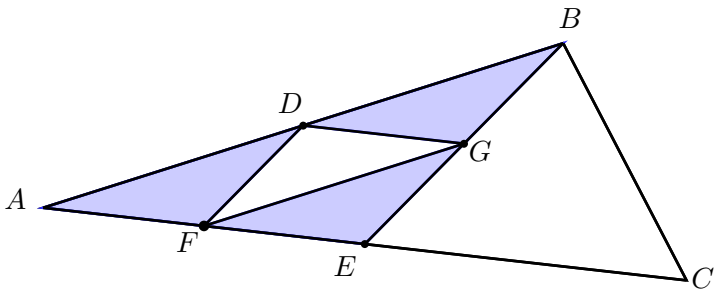
4. ¿Cuántas cifras tiene el mayor número primo que es capicúa y tiene un número de cifras par?

Nota: Un número se llama capicúa, si se lee igual de izquierda a derecha, que de derecha a izquierda.

(a) 2 (b) No se puede determinar (c) 11 (d) 10 (e) No sé

Solución: Note que en todo número capicúa con número de cifras par, la suma alternada de sus cifras es 0, *luego todos estos números son múltiplos de* 11 *(ver criterio de divisibilidad del* 11*). De modo que, el único número capicúa con número de cifras par que es primo es el* 11 *el cual tiene* 2 *cifras.*

5. En la siguiente figura, D, E, F y G son los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AE}$ y $\overline{BE}$, respectivamente. Si el área del triángulo ABC es $32\ cm^2$, ¿cuál es el área de la región coloreada en azul?



(a) $12\,cm^2$ (b) $10\,cm^2$ (c) $13\,cm^2$ (d) $11\,cm^2$ (e) No sé

Solución: Dado que E es el punto medio de $\overline{AC}$, entonces $\overline{AE}$ es una mediana del triángulo ABC, de ahí que el área del triángulo ABE es $\frac{32}{2} = 16\,cm^2$, la mitad del área del triángulo ABC, pues cada mediana divide al triángulo en dos triángulos con igual área.
Ahora, como D y G son los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BE}$, respectivamente, por el Teorema de Tales, el triángulo BDG es semejante al triángulo ABE con razón de semejanza $r = \frac{1}{2}$, así la razón entre sus área es $r^2 = \frac{1}{4}$, por lo tanto el área del triángulo BDG es $\frac{16}{4} = 4\,cm^2$. Análogamente, se tiene que el área de cada uno de los triángulos ADF y EFG es $4\,cm^2$. Por lo tanto, el área sombreada de azul es $3 \times 4 = 12\,cm^2$.

6. En un salón de 30 estudiantes, en donde todos van pasando al menos una de estas tres materias: Inglés, Química y Matemáticas, se cumple que:

(i) los que van pasando Inglés y Química son 12.

(ii) los que van pasando Inglés y Matemáticas son 5.

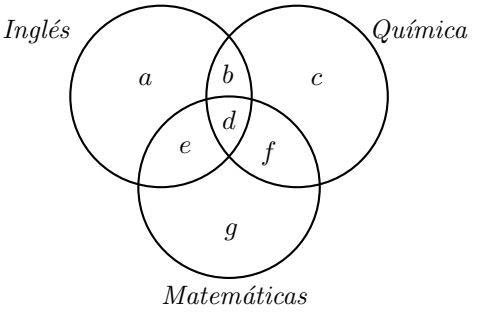
(ii) los que van pasando Matemáticas y Química son 13.

(iv) los que van pasando solamente una materia son 6.

¿Cuántos van pasando las tres materias?

(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 4 (e) No sé

Solución: Considere el siguiente diagrama de Venn:



Del enunciado tenemos que:

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e+f+g &= 30, \\ b+d &= 12 \quad \longrightarrow \quad b = 12-d \\ e+d &= 5 \quad \longrightarrow \quad e = 5-d \\ d+f &= 13 \quad \longrightarrow \quad f = 13-d \\ a+c+g &= 6. \end{aligned}$$

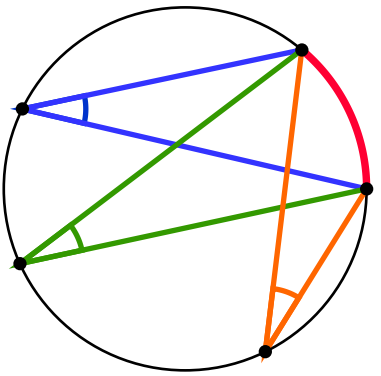
Al reemplazar los valores de b, e, f y $a+c+g$ en la primera ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} (a+c+g)+b+d+e+f &= 30, \\ 6+(12-d)+d+(5-d)+(13-d) &= 30, \\ 36-2d &= 30, \\ 3 &= d, \end{aligned}$$

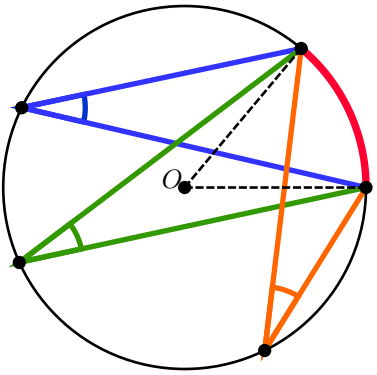
De ahí que, exactemente 3 estudiantes van pasando las tres materias.

7. Determine la suma de las medidas (en grados) de los ángulos marcados en la siguiente figura, sabiendo que la longitud del arco rojo, corresponde a $\frac{1}{9}$ de la longitud total de la circunferencia.

(a) 50 (b) 75 (c) 60 (d) 120 (e) No sé



Solución: Considere la siguiente figura en la que O es el centro del círculo:



Dado que el arco rojo corresponde a $\frac{1}{9}$ de la longitud de la circunferencia, entonces el ángulo central O mide $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$. Ahora, note que los otros tres ángulos subtienden el mismo arco y están inscritos en la circunferencia. Sabiendo que la medida de un ángulo central que subtiende el mismo arco de un ángulo inscrito, es el doble de la medida del ángulo inscrito; se tiene que cada uno de los tres ángulos marcados mide 20°, y por lo tanto la suma de las medidas de dichos ángulos es 60°.

8. Sea p un polinomio tal que la suma de sus coeficientes es 10 y el coeficiente independiente (constante) es -2. Si además $p(x-3) = p(x-4) + 2a$, ¿cuál es el valor de a?

(a) 8 (b) 12 (c) 4 (d) 6 (e) No sé

Solución: Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ un polinomio. Note que la suma de sus coeficientes, se obtiene evaluando el polinomio en $x = 1$,

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

mientras que el coeficiente constante a_0 se obtiene al evaluar el polinomio en $x = 0$, pues $p(0) = a_0$. Dicho esto, del enunciado tenemos que:

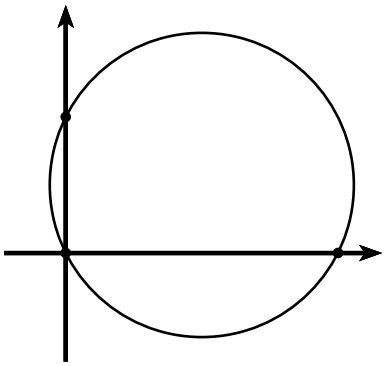
$$p(1) = 10,$$
$$p(0) = -2.$$

Además, reemplazando $x = 4$ en la ecuación $p(x-3) = p(x-4) + 2a$, se tiene:

$$\begin{aligned} p(4-3) &= p(4-4) + 2a, \\ p(1) &= p(0) + 2a \\ 10 &= -2 + 2a \\ 12 &= 2a, \end{aligned}$$

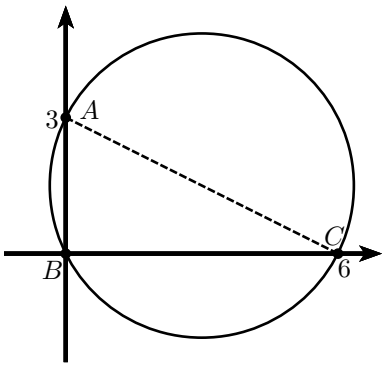
de donde $a = 6$.

9. Se ha trazado una circunferencia que pasa por los puntos $(0,0)$, $(6,0)$ y $(0,3)$ del plano cartesiano. ¿Cuál es el área que encierra esta circunferencia?



(a) 45π (b) $\frac{45}{4}\pi$ (c) $6\sqrt{5}\pi$ (d) $3\sqrt{5}\pi$ (e) No sé

Solución: Considere la siguiente figura en la que $A = (0,3)$, $B = (0,0)$ y $C = (6,0)$.



Note que el triángulo ABC es rectángulo en B y está inscrito en la circunferencia, por lo tanto su hipotenusa $\overline{AC}$ es un diámetro de la circunferencia. Por el Teorema de Pitágoras, tenemos que

$$AC = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5},$$

luego el radio de la circunferencia es $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ *y por lo tanto el área que encierra está dada por:*

$$\pi \left(\frac{3\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{45}{4}\pi.$$

3.2. Prueba Selectiva

1. En una pizarra hay 2020 círculos en fila, María marca 18 de los círculos que no están en los extremos, de tal manera que no haya dos círculos marcados continuos. Además se sabe que la diferencia entre la mayor cantidad de círculos continuos sin marcar y la menor cantidad de círculos continuos sin marcar es 1. ¿Cuál es la mayor cantidad de círculos continuos sin marcar?

(a) 106 (b) 112 (c) 117 (d) 111 (e) No sé

Solución: Dado que de los 2020 *círculos,* 18 *están marcados, entonces quedan* 2002 *círculos sin marcar. Además, los* 18 *círculos marcados no están en los extremos ni están seguidos, luego ellos generan* 19 *"cadenas" de círculos sin marcar. Así que vamos a repartir los* 2002 *círculos sin marcar en estas* 19 *cadenas. Note que se alcanzan a repartir* 105 *círculos para cada una de las* 19 *cadenas y sobran* 7*, pero como el número de círculos que tiene la cadena más larga, menos el número de círculos que tiene la cadena más corta es* 1*, estos* 7 *círculos restantes deben agregarse a cadenas diferentes, de manera que habran algunas cadenas con* 106 *círculos y otras con* 105 *círculos, cumpliendose que* $106-105=1$*. Note que no pueden haber cadenas con más de* 106 *círculos sin marcar, ya que si así fuera, la diferencia entre la mayor cantidad de círculos sin marcar y la menor cantidad de círculos sin marcar sería mayor que* 1*. Así, la mayor cantidad de círculos continuos sin marcar es* 106*.*

2. Determine el valor de la siguiente expresión:

$$\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{999}\right).$$

Recuerde que $\log(a)=\log_{10}(a)$.

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) 3 (e) No sé

Solución: Note que la expresión del enunciado puede escribirse como

$$\log(2) + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \log\left(\frac{1000}{999}\right)$$

Además, por la propiedad de los logaritmos: $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(a)$, *se tiene que nuestra expresión puede equivale a:*

$$\cancel{\log(2)} + \cancel{\log(3)} - \cancel{\log(2)} + \cancel{\log(4)} - \cancel{\log(3)} + \cdots + \log(1000) - \cancel{\log(999)},$$

de ahí que el valor de esta expresión es simplemente $\log(1000) = 3$.

3. Para cada número entero n definimos $\boxed{n}$ así:

$$\boxed{n} = (n - 100)^{n+1}.$$

Por ejemplo:

$$\boxed{1} = (1 - 100)^{1+1} = 99^2,$$
$$\boxed{2} = (2 - 100)^{2+1} = -98^3,$$

Determine el valor de

$$\left(\left(\left(2^{\boxed{3}}\right)^{\boxed{4}}\right)^{\cdots}\right)^{\boxed{2020}}$$

(a) -1 (b) $2^{2020!}$ (c) 1 (d) 0 (e) No sé

Solución: Note que $\boxed{100} = (100 - 100)^{2+1} = 0$, *por lo tanto*

$$\left(\left(\left(2^{\boxed{3}}\right)^{\boxed{4}}\right)^{\cdots}\right)^{\boxed{2020}} = \left(-98^3\right)^{\left(97^2\right)^{\left(-96^4\right)^{\cdots^{0^{\cdots}}}}} = (-98)^0 = 1.$$

4. ¿Cuántos triángulos incongruentes, con área no nula y todos sus lados de longitud entera, hay tales que uno de sus lados mide 2020 y la suma de las longitudes de los restantes es 2050?

(a) 2035 (b) 1010 (c) 2049 (d) 1017 (e) No sé

Solución: Sean a y b las longitudes los lados restantes del triángulo. Entonces $a+b=2050$ y además se debe cumplir la desigualdad triángular, esto es:

$$a+2020>b$$
$$b+2020>a.$$

Basta considerar los posibles valores a, pues para cada valor de a, el valor de b queda determinado por $b=2050-a$. Entonces

$$a+2020>2050-a$$
$$2a>30$$
$$a>15.$$

Por otra parte, como los triángulos deben ser incongruentes, entonces $a\leq \frac{2050}{2}=1025$, de modo que $15<a\leq 1025$, como a es un entero, entonces a puede tomar $1025-15=1010$ valores, por lo tanto existen 1010 triángulos que cumplen las condiciones del enunciado.

5. ¿Cuál es la menor cantidad de números naturales que se deben escoger aleatoriamente para garantizar que la diferencia de dos de ellos sea múltiplo de 8?

(a) 10 (b) 9 (c) 8 (d) 7 (e) No sé

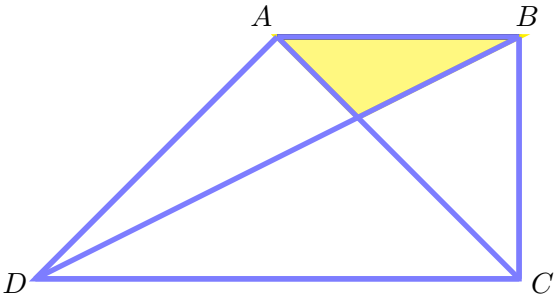
Solución: Por el algoritmo de la división, tenemos que todo número entero al dividirse entre 8 deja como residuo un número del conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. Veamos que si dos números dejan el mismo residuo al dividirse entre 8 entonces su diferencia es múltiplo de 8. En efecto, sean $a=8q+r$ y $b=8t+r$ dos números que dejan el mismo residuo al dividirse entre 8, entonces

$$a-b=8q+r-(8t+r)=8(q-t)$$

de ahí que $a-b$ es múltiplo de 8. Con lo anterior, tenemos que si se escogen

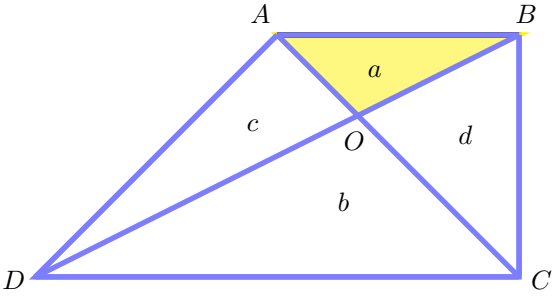
aleatoriamente 9 *números enteros, al menos dos de ellos dejarán el mismo residuo al dividirse entre* 8 *y en tal caso su diferencia es múltiplo de* 8. *Note que con menos números no se puede garantizar que la diferencia de dos de ellos sea múltiplo de* 8, *tome por ejemplo los números* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *y compruebe que la diferencia de dos cualesquiera no es múltiplo de* 8. *Por lo tanto,* 9 *es la menor cantidad de números naturales que se deben escoger aleatoriamente para garantizar que la diferencia de dos de ellos sea múltiplo de* 8.

6. En la siguiente figura, los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son paralelos. Si el área del triángulo amarillo es $1\,cm^2$ y $DC = 3AB$, ¿cuál es el área del trapecio $ABCD$?



(a) $20\,cm^2$ (b) $16\,cm^2$ (c) $8\,cm^2$ (d) $18\,cm^2$ (e) No sé

Solución: Considere la siguiente figura, en la que a, b, c, d *son las área de los respectivos triangulos y* O *es la intersección de las diagonales* $\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$.



Note que los triángulos COD y AOBson semejantes, pues sus ángulos correspondientes iguales. Además, la razón de semejanza es

$$r = \frac{DC}{AB} = \frac{3AB}{AB} = 3,$$

luego la razón entre sus áreas es $r^2 = 9$. Así como el área del triángulo AOB es $a = 1\,cm^2$ entonces el área del triángulo COD es $b = 9\,cm^2$.

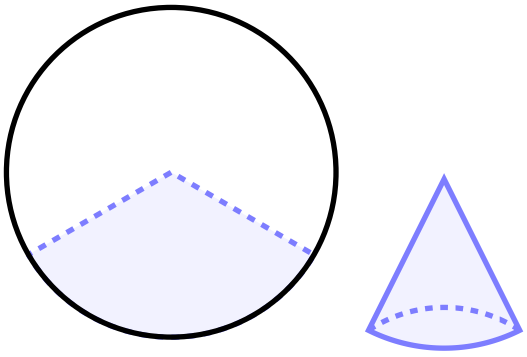
Por otra parte, sabemos que en un trapecio se cumple que al trazar sus diagonales las áreas de los triángulos que se forman con los lados no paralelos tienen igual área y además el producto de estas áreas coicide con el producto de las áreas de los otros dos triángulos que se forman con los lados paralelos, esto es:

$$c = d$$
$$ab = cd.$$

De este modo, $ab = 1 \times 9 = 9 = cd$, de ahí que $c = 3$ y $d = 3$. Por lo tanto, el área del trapecio es:

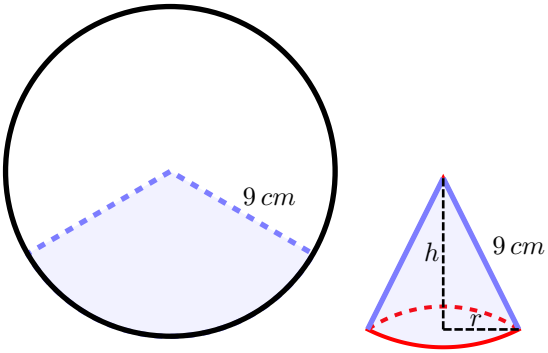
$$a + b + c + d = 1 + 9 + 3 + 3 = 16\,cm^2.$$

7. Se recorta un sector circular correspondiente a un $\frac{1}{3}$ de un círculo de radio $9\,cm$, para formar un cono, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la altura de este cono?



(a) $6\sqrt{2}\,cm$ (b) $9\,cm$ (c) $5\sqrt{2}\,cm$ (d) $8\,cm$ (e) No sé

Solución: Considere la siguiente figura:



Note que el perímetro de la base del cono corresponde al arco barrido por sector circular recortado, y dado que este corresponde a $\frac{1}{3}$ *del círculo, entonces el ángulo barrido, en radianes, es* $\frac{2\pi}{3}$ *y como el radio es* $9\,cm$*, entonces la longitud de la circunferencia de la base del cono es* $9\times\frac{2\pi}{3}=6\pi$*, de ahí que el radio de la base del cono es* $r=3\,cm$*. Finalmente, por el teorema de Pitágoras, tenemos que la altura del cono está dada por:* $h=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}\,cm$*.*

8. Si el número $abab$ tiene exactamente 14 divisores positivos, ¿cuál es el valor de $2a+b$?

(a) 10 (b) 14 (c) 16 (d) 20 (e) No sé

Solución: Note que $14=2\times 7=(1+1)(6+1)$ *y además,*

$$abab=ab\times 100+ab=101\times ab.$$

Dado que 101 *es primo, entonces* $ab=p^6$*, con* p *un número primo, además* ab *es un número de dos cifras, luego* $p=2$*, de ahí que* $ab=2^6=64$*.*

Por lo tanto $2a+b=2(6)+4=16$*.*

9. ¿Cuál es el número de las unidades de:

$$\sum_{i=1}^{2023} i^{2020}=1^{2020}+2^{2020}+3^{2020}+\cdots+2023^{2020}?$$

(a) 6 (b) 3 (c) 1 (d) 4 (e) No sé

Solución: Tenga en cuenta que, la cifra de las unidades de un producto depende únicamente de las cifras de las unidades de los factores, y la cifra de las unidades de una suma, depende unicamente de las cifras de las unidades de los sumandos. dicho esto, note que la cifra de las unidades de un número entero n es la misma cifra de las unidades de n^5, en efecto en la siguiente tabla consideramos los posibles casos:

n	$\ldots 0$	$\ldots 1$	$\ldots 2$	$\ldots 3$	$\ldots 4$	$\ldots 5$	$\ldots 6$	$\ldots 7$	$\ldots 8$	$\ldots 9$
n^2	$\ldots 0$	$\ldots 1$	$\ldots 4$	$\ldots 9$	$\ldots 6$	$\ldots 5$	$\ldots 6$	$\ldots 9$	$\ldots 4$	$\ldots 1$
n^3	$\ldots 0$	$\ldots 1$	$\ldots 8$	$\ldots 7$	$\ldots 4$	$\ldots 5$	$\ldots 6$	$\ldots 3$	$\ldots 2$	$\ldots 9$
n^4	$\ldots 0$	$\ldots 1$	$\ldots 6$	$\ldots 1$	$\ldots 6$	$\ldots 5$	$\ldots 6$	$\ldots 1$	$\ldots 6$	$\ldots 1$
n^5	$\ldots 0$	$\ldots 1$	$\ldots 2$	$\ldots 3$	$\ldots 4$	$\ldots 5$	$\ldots 6$	$\ldots 7$	$\ldots 8$	$\ldots 9$

Además, $n^{2020} = (n^5)^{404}$ de ahí que n^{2020} tiene la misma cifra en las unidades que n^{404}. Ahora,

$$n^{404} = n^{400+4} = \left(n^5\right)^{80} \times n^4,$$

luego la cifra de las unidades de n^{404} es la misma cifra de las unidades de $n^{80} \times n^4$, pero

$$n^{80} \times n^4 = \left(n^5\right)^{16} \times n^4,$$

entonces la cifra de la unidades de $n^{80} \times n^4$, es la misma cifra de las unidades de $n^{16} \times n^4 = n^{20}$ y dado que $n^{20} = \left(n^5\right)^2$, entonces la cifra de las unidades de $n^{16} \times n^4$ es la misma cifra de las unidades de n^4.

Por lo anterior la cifra de las unidades de

$$1^{2020} + 2^{2020} + 3^{2020} + \cdots + 2023^{2020},$$

es la misma cifra de las unidades de

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + 2023^4, \tag{3.1}$$

y teniendo en cuenta la tabla del inicio, la última cifra del número (3.1) *es la misma cifra de la unidades del número:*

$$202 \times (1 + 6 + 1 + 6 + 5 + 6 + 1 + 6 + 1 + 0) + 1 + 6 + 1 = 6674,$$

es decir, 4.

3.3. Prueba Final

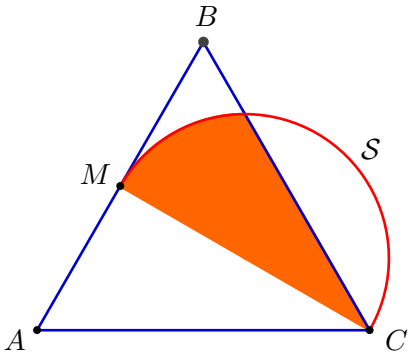
1. Carlos y Daniel juegan al juego *"Voy por el* 100*"*. El juego consiste en que uno de los dos debe decir un número del 1 al 7, luego, el otro participante debe sumarle a ese número un número del 1 al 7, y decir el resultado; nuevamente, el primer participante, debe sumarle un número del 1 al 7 al número dicho por el segundo participante, y decir el resultado; y así sucesivamente. Si gana quien diga el número 100, determine una estrategia ganadora para el participante que inicia el juego.

Solución: Note que 96 *es el múltiplo de* 8 *más cercano a* 100*, y* $100-96=4$*, así, una estrategia ganadora para el participante* (1) *es la siguiente: el participante* (1) *dice el número* 4*, luego el participante* (2) *sumará un número de* 1 *a* 7 *y en seguida el participante* (1) *sumará el número que falta para completar* 8 *con el número que dijo el participante* (2)*, en el siguiente turno, el partipante* (2) *sumará otro número del* 1 *al* 7 *y en seguida el participante* (1) *sumará el número de* 1 *a* 7 *que falta para completar* 8 *con el número que dijo el participante* (2)*, y así sucesivamente, note que los números que dice el participante* (1) *son los siguientes:*

$$4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100.$$

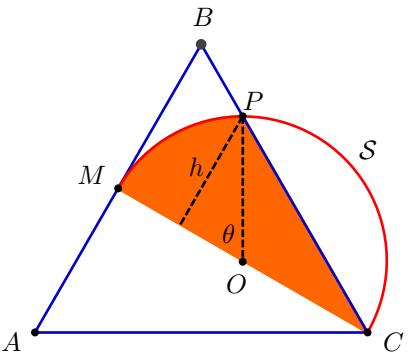
Luego en su turno número 13 *el participante* (1) *ganará. Además, note que el participante* (2) *no puede ganar con esta estrategia, porque en su turno* 12 *debe sumar a* 92 *un número del* 1 *al* 7*, por lo que no alcanzará a llegar a* 100*.*

2. En la siguiente figura, el triángulo ABC es equilátero, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\mathcal{S}$ es una semicircunferencia con diámetro $\overline{CM}$. Si el lado del triángulo equilátero mide L, determine el área de la región sombreada en naranja.



Solución: Considere la siguiente figura, en la O es el centro de la semicircunferencia.

Note que el área sombreada corresponde al área del sector circular POM más el área del triángulo POC. Calculemos estas áreas.
Dado que el triángulo ABC es equilátero y M es el punto medio del lado $\overline{AB}$, entonces $\overline{CM}$ es bisectriz y altura de este triángulo, luego $\measuredangle PCM = \frac{\pi}{6} rad$ y, por el Teorema de Pitágoras,



$$CM = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}L.$$

Ahora, el ángulo central POM subtiene el mismo arco del ángulo inscrito PCM, por lo tanto $\measuredangle POM = 2\measuredangle PCM = \frac{\pi}{3} rad$, además, note que $OP = CO = \frac{\sqrt{3}L/2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}L$ por ser radios de la semicircunferencia, y la altura del triángulo POC respecto a la base CO, está dada por:

$$h = OP \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}L \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8}L.$$

Por lo anterior, el área del sector circular POM está dada por:

$$\frac{\theta \times OP}{2} = \frac{\frac{\pi}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}L}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{24}L,$$

y el área del triángulo POC está dada por:

$$\frac{CO \times h}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}L \times \frac{3}{8}L}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{64}L,$$

Luego el área sombreada es:

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{24}L + \frac{3\sqrt{3}}{64}L = \frac{\sqrt{3}L}{8}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3}{8}\right).$$

3. Sea n un entero positivo. Pruebe que si $(2^n)! = (x)(2^{2^n-1})$, entonces x es impar.

Solución: Despejando x tenemos que

$$x = \frac{(2^n)!}{2^{2^n-1}},$$

Observe que el exponente de 2 en la factorización prima de $(2^n)!$ está dado por:

$$\begin{aligned}\frac{2^n}{2} + \frac{2^n}{2^2} + \frac{2^n}{2^3} + \cdots + \frac{2^n}{2^{n-1}} + \frac{2^n}{2^n} &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^1 + 2^0, \\ &= \frac{2^n - 1}{2 - 1}, \\ &= 2^n - 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{(2^n)!}{2^{2^n-1}} = \frac{2^{2^n-1} \times impar}{2^{2^n-1}} = impar.$$

4. Sea f una función cuyo dominio son los enteros positivos y codominio los números reales, tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$, para todo par de enteros positivos x, y. Si $f(2048) = 33$, ¿cuál es el valor de $f(16)$?

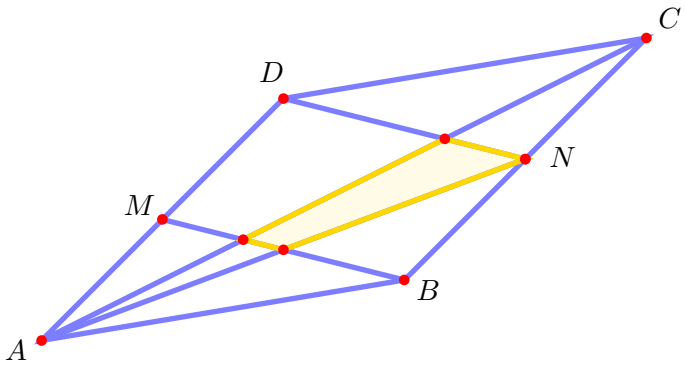
Solución: Observe que $2048 = 2^{11}$, luego

$$\begin{aligned}f\left(2^{11}\right) &= f(\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{11 \ veces \ 2}) \\ &= \underbrace{f(2) + f(2) + \cdots + f(2)}_{11 \ veces \ f(2)} \\ &= 11 \times f(2) = 33,\end{aligned}$$

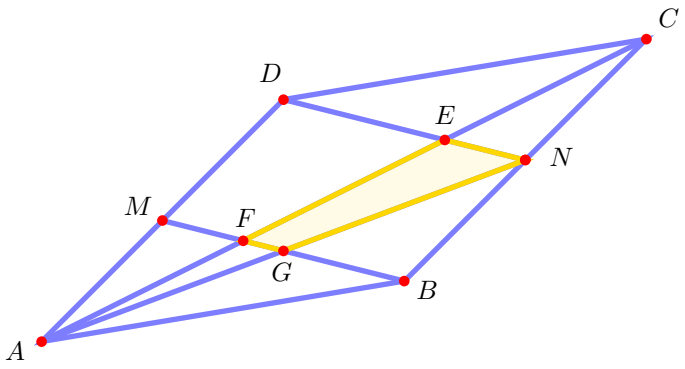
de ahí que $f(2) = 3$. Ahora, $16 = 2^4$, luego

$$\begin{aligned}f(16) = f(2^4) &= f(2 \times 2 \times 2 \times 2) \\ &= f(2) + f(2) + f(2) + f(2) \\ &= 4 \times f(2) \\ &= 4 \times 3 = 12.\end{aligned}$$

5. En la siguiente figura, M y N son los puntos medios de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. ¿Cuál es el área, en centímetros cuadrados, del paralelogramo $ABCD$, si el área sombreada de amarillo mide $1\,cm^2$? Dé su respuesta sin unidades.



Solución: Considere la siguiente figura en la que se han nombrado ciertos puntos:



Veamos qué fracción del área total del paralelogramo representa el área sombreada. Sea A_P el área del paralelogramo. Note que el área del triángulo ADC es $a(ADC) = \frac{1}{2}A_P$, el área de cada uno de los triángulos CEN y AFM es $a(CEN) = a(AFM) = \frac{1}{12}A_P$, el área del triángulo AMB es $a(AMB) = \frac{1}{4}A_P$ y, el área del triángulo BGN es $a(BGN) = \frac{1}{8}A_P$.
Por otra parte, el área sombreada A_S está dada por:

$$A_S = A_P - a(ADC) - a(CEN) - a(BGN) - a(AFB),$$

pero $a(AFB) = a(AMB) - a(AFM) = \frac{1}{4}A_P - \frac{1}{12}A_P = \frac{1}{6}A_P$. *Así, el área sombreada está dada por:*

$$A_S = A_P - \frac{1}{2}A_P - \frac{1}{12}A_P - \frac{1}{8}A_P - \frac{1}{6}A_P,$$
$$A_S = \frac{1}{8}A_P.$$

Y dado que en el enunciado se da que $A_S = 1\,cm^2$, *entonces* $A_P = 8\,cm^2$.

6. Sea $A = (a_n)$ una progresión geométrica cuya razón es un número primo que no divide al entero a_1, $B = (b_n)$ una sucesión tal que b_n, es el número de divisores positivos de a_n y $C = (c_n)$ una sucesión tal que $c_n = a_n + b_n$. Si $b_{2020} = 6060$ y $c_5 = 159$ ¿Cuál es el valor de a_1?

Nota: Una progresión geométrica es una sucesión en la que cada término, salvo el primero a_1, se obtiene multiplicando al anterior una cantidad fija r, llamada razón. De modo que el término general es de la forma $a_n = a_1 \times r^{n-1}$.

Solución: Sea p *un primo que no divide a* a_1, *entonces* $a_n = p^{n-1}a_1$, *de este modo* $b_n = n \times (\#$ *divisores de* $a_1)$. *Ahora, sabemos que*

$$b_{2020} = 6060 = 2020 \times 3,$$

de ahí que el número de divisores de a_1 *es* 3, *por lo tanto* $b_n = 3n$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} 159 = c_5 &= a_5 + b_5, \\ 159 &= p^4 \times a_1 + 3 \times 5, \\ 144 &= p^4 \times a_1, \\ 2^4 \times 3^2 &= p^4 \times a_1; \end{aligned}$$

Luego $p = 2$ *y* $a_1 = 9$.

Apéndice A

Ejercicios propuestos

Nivel Básico

1. Determinar la altura y el área de un triángulo equilátero de lado L.

2. ¿De cuántas formas diferentes se pueden distribuir 5 bolas distintas en 8 cajas distintas si en cada caja puede haber como mucho una bola?

3. En cierto semestre de una carrera se imparten 6 asignaturas, con dos posibles calificaciones cada una: Aprobado y Reprobado. ¿Cuántos alumnos se deben escoger para asegurar que 3 de ellos tienen las mismas calificaciones en las 5 asignaturas?

4. Las medidas de los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética. Si a es la medida del cateto más largo, determine el perímetro y el área del triángulo en términos de a.

5. En una bolsa hay 6 balotas con el número 2, 9 balotas con el número 3, 15 balotas con el número 7 y 36 balotas con el número 8. Pedro afirma que al extraer cierto número de balotas de la bolsa y colocarlas en fila, formó un número que es cuadrado perfecto, ¿esto es posible?

6. Si m y n son enteros positivos tales que $m^2 - n^2 = 13$, determine el valor de $m \times n$.

7. Determine los valores de x que satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones, sabiendo que x es un número real.

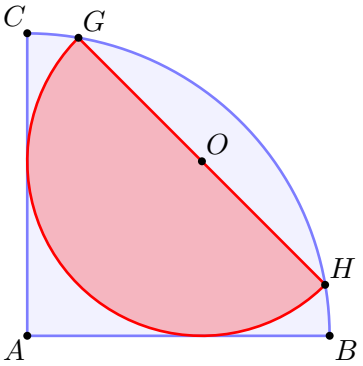
   (a) $1^x + 2^x = 4^x$

   (b) $9^x + 15^x = 25^x$

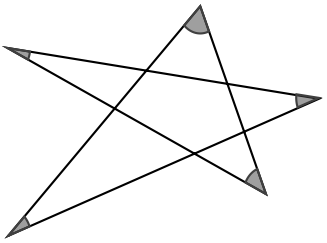
   (c) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

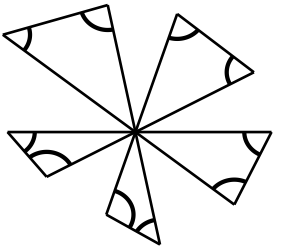
8. Sabiendo que $x + \dfrac{1}{x} = -1$, halle el valor de $x^{2020} + \dfrac{1}{x^{2020}}$

9. Determine la razón entre las áreas del cuarto de círculo CAB y el semicírculo inscrito en él, con centro en O y diámetro $\overline{GH}$.



10. En cada caso hallar la suma de las medidas de los ángulos marcados.





Nivel Medio

1. Sea n un número natural tal que su factorización prima es $n = p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times \cdots \times p_k^{n_k}$, esto es, los p_i son números primos distintos y los n_i son números enteros positivos.

   (a) Pruebe que la cantidad de divisores positivos de n está dada por $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1)$.

   (b) Determine el número de divisores positivos de cada uno de los siguientes números:

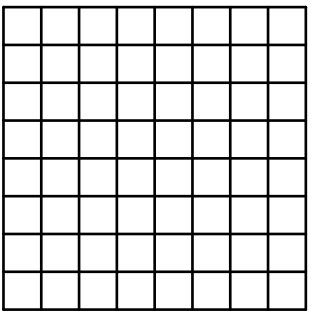
   - 2^5
   - 831.600
   - 2020^{2019}
   - 432
   - 10^{1000}
   - $20!$

2. (a) Pruebe que la suma de los primeros n enteros positivos es $\dfrac{n(n+1)}{2}$, esto es:

   $$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   (b) Demuestre que si n es impar, la suma de n enteros consecutivos es múltiplo de n. ¿Sucede lo mismo si n es par?

3. ¿Cuántos rectángulos hay en la siguiente cuadrícula de 8×8?



   Y si la cuadrícula es de $n \times n$, ¿cuántos rectángulos hay?

4. Sea S un conjunto con n números naturales. Pruebe que existe algún subconjunto no vacío de S tal que la suma de sus elementos es múltiplo de n.

5. ¿De cuántas maneras distintas se pueden extraer k números del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ de forma que no hayan dos consecutivos?

6. En un rectángulo de dimensiones 4×3 se marcan siete puntos. Las dimensiones se miden en cm. Compruebe que hay dos puntos que distan entre sí no más de $\sqrt{5}\, cm$.

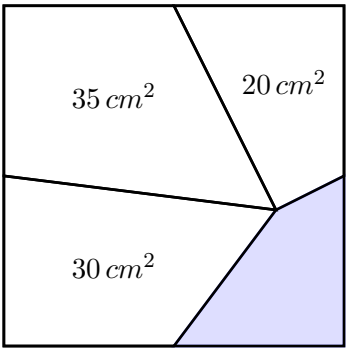
7. Una **mediana** de un triángulo es un segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto a dicho lado. Es conocido que las tres medianas de un triángulo concurren en un punto llamando **baricentro**.

   (a) Pruebe que al trazar una de las medianas de un triángulo, éste queda dividido en dos triángulos de igual área.

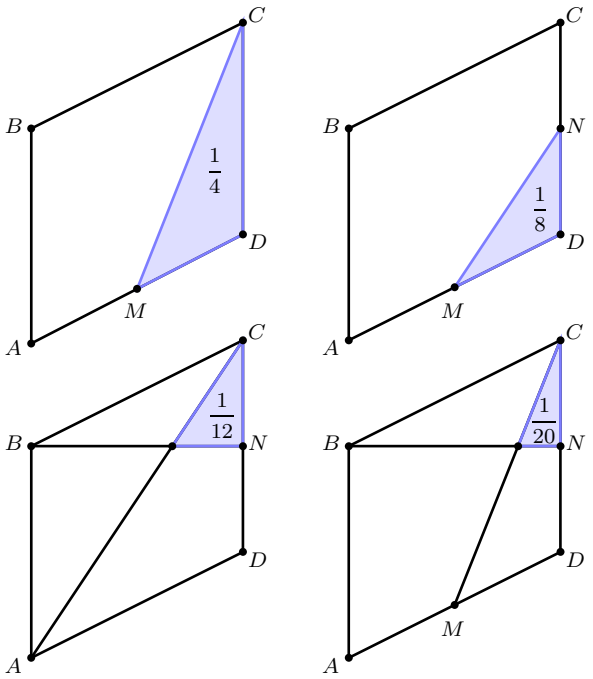
   (b) Demuestre que al trazar las medianas de un triángulo, este queda dividido en seis triángulos que tienen la misma área.

   (c) Demuestre que el baricentro divide a cada mediana en dos segmentos; el segmento que une el baricentro con el vértice mide el doble que el segmento que une baricentro con el punto medio del lado opuesto.

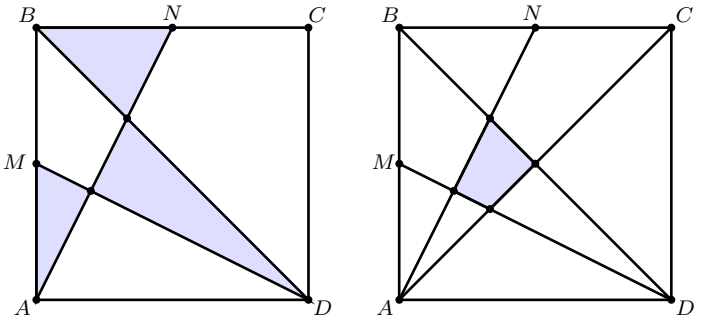
8. Determine el área de la región sombreada en la siguiente figura, sabiendo que las áreas de las demás regiones interiores al cuadrado son las que se indican en la figura.



9. En cada una de las siguientes figuras se tiene que $ABCD$ es un paralelogramo con M y N los puntos medios de los correspondientes lados. Muestre que la fracción del área total del paralelogramo, correspondiente al área sombreada en cada figura es la que se indica.

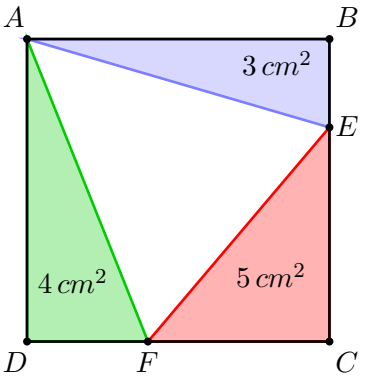


10. En cada una de las siguientes figuras, calcule el área de la región sombreada, sabiendo que $ABCD$ es un cuadrado de lado $l\,cm$, y, M y N son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.



Nivel Avanzado

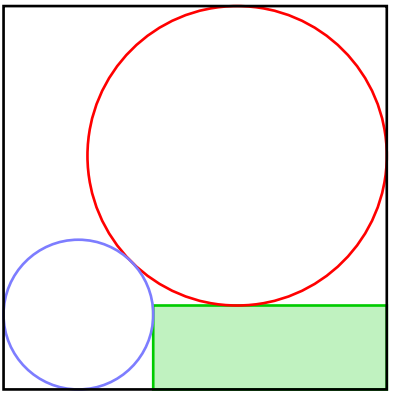
1. En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado y los puntos E y F están sobre los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Si las áreas de los tres triángulos coloreados son las que se indican en la figura, determine el área del triángulo AEF.



2. En la siguiente figura se muestra un cuadrado, en cuyo interior hay un rectángulo coloreado y dos circunferencias que son tangentes entre sí, al cuadrado y al rectángulo. Si las áreas, en cm^2, que encierran la circunferencia mayor y la menor son 8π y 2π, respectivamente, calcule:

   (a) el área del cuadrado.

   (b) el área del rectángulo coloreado.



3. Demuestre que para cada entero $n \geq 0$, se tiene que

   (a) $10^{2n} = 11t + 1$, con $t \in \mathbb{Z}$.

   (b) $10^{2n+1} = 11s - 1$, con $s \in \mathbb{Z}$.

   Use estos resultados para demostrar el siguiente criterio de divisibilidad del 11: *"Un número entero es divisible por* 11 *si y solo si la suma alternada de sus cifras es múltiplo de* 11*."*

4. (a) Sea n un entero positivo, muestre que

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

   (b) Demuestre que para cada entero positivo n y $a \neq 1$ se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

   En particular, muestre que:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

5. (a) Sea n un entero positivo. Establezca un algoritmo o fórmula para hallar el exponente de un primo p en la factorización prima de $n!$

   (b) Halle el exponente de 3 en la factorización prima de $1000!$

   (c) Determine en cuántos ceros termina la representación decimal del número $2020!$

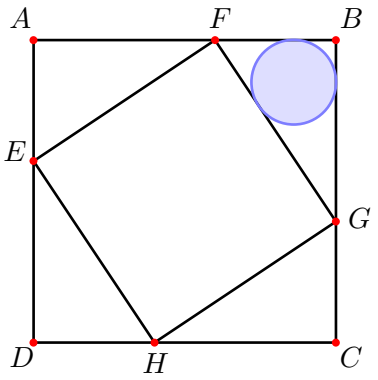
6. Dado un trapecio $ABCD$ con $\overline{AB}$ paralelo a DC. Si O es punto de intersección de sus diagonales, muestre que

   (a) Los triángulos AOB y COD son semejantes.

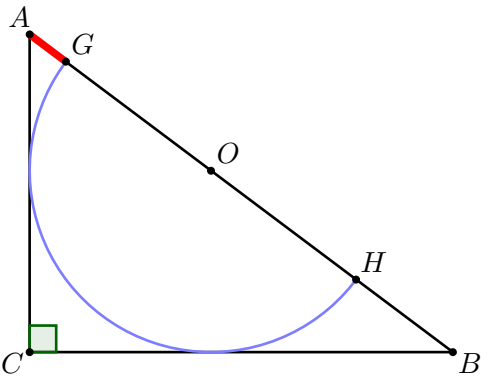
   (b) Las áreas de los triángulos AOD y BOC son iguales.

   (c) El producto de las áreas de los triángulos AOB y COD coincide con el producto de las áreas de los triángulos AOD y BOC.

7. En la siguiente figura $ABCD$ y $EFGH$ son cuadrados. Si el área del cuadrado $EFGH$ es $100\,cm^2$ y el área del triángulo EDH es $24\,cm^2$, determine el área del círculo coloreado, inscrito en el triángulo FBG.



8. En la siguiente figura, la semicircunferencia con centro en O y diámetro $\overline{GH}$ está inscrita en el triángulo rectángulo ABC. Si $AC = 3\,cm$ y $BC = 4\,cm$, determine la longitud de $\overline{AG}$.



9. Demuestre que no existen enteros x, y, z tales que $x^4+y^4+z^4 = 2020$.

10. (IMO-1985) Dado un conjunto $\mathcal{M}$ con 1985 enteros positivos distintos, ninguno de cuyos factores primos es mayor que 26, demuestre que $\mathcal{M}$ siempre tendrá cuatro elementos distintos cuyo producto es una cuarta potencia.

Apéndice B

Cuadro de Honor

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la Doudécima versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Secundaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 4557 participantes del certamen, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

NIVEL BÁSICO

Puesto	Medalla	Participante
1.º	Oro	*Deily Astrid Quiñonez Olarte* *Col. Técnico Nuestra Señora de La Presentación, San Gil.*
2.º	Plata	*Ana Sofía Agudelo Azuero* *Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.*
3.º	Bronce	*Blass Esteban Murillo Castro* *Col. Técnico Nuestra Señora de La Presentación, San Gil.*
4.º		*Mariana Martínez Valencia* *Colegio Nuestra Señora del Rosario, Floridablanca.*
5.º		*Angie Lorena Arengas Acosta* *Colegio de Santander, Bucaramanga.*

NIVEL MEDIO

Puesto	Medalla	Participante
1.º	Oro	*Naya Alexandra Coy Samacá* *Colegio Cooperativo, Barbosa.*
2.º	Plata	*Anna María Naranjo Durán* *Colegio Cooperativo, Barbosa.*
3.º	Bronce	*Carlos Andrés Mejía Siza* *Fundación Colegio UIS, Piedecuesta.*
4.º		*Ariana Bernal Castilla* *Institución Educativa Jose Eusebio Caro, Ocaña.*
5.º		*Juan Felipe Hoyos Muñoz* *Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.*

NIVEL AVANZADO

Puesto	Medalla	Participante
1.º	Oro	*Ludwing Daniel León* *Oriente Miraflores, Bucaramanga.*
2.º	Plata	*José David Cárdenas Canchón* *Col. Técnico Nuestra Señora de La Presentación, San Gil.*
3.º	Bronce	*Joan Jafet Forero Castillo* *Inst. Tecnológico Salesiano Eloy Valenzuela, Bucaramanga.*
4.º		*Juan David Paipa Jaimes* *Colegio Reggio Amelia, Bucaramanga.*
5.º		*Kevin Jaimes Rojas* *I.E. Técnico Dámaso Zapata, Bucaramanga.*

Bibliografía

[1] Bolaños W. *Problemas y Soluciones Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas Universitaria 1998-2019.* Universidad Antonio Nariño y Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[2] Brochero F. y Restrepo J. *Un recorrido por la Teoría de Números.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[3] Gómez J., Valdez R. y Vázquez R. *Principio de las Casillas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2011.

[4] Hemmerling E. *Geometría Elemental.* Bakersfield College. Limusa, México, 2009.

[5] Jiménez L., Gordillo J. y Rubiano G. *Teoría de números para principiantes.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.

[6] Madroñero J y Contreras I. *Un recorrido por el Álgebra.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[7] Soberón P. *Combinatoria para olimpiadas* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2010.

[8] Restrepo P. *Un recorrido por la Combinatoria I.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

[9] Valderrama A. y González E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Nivel Intermedio 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010

[10] Valderrama A. y González E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Primer Nivel 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010.

Vicerrectoría Administrativa
Vicerrectoría de Investigación y Extensión

ORM Olimpiadas Regionales de Matemáticas
EDUMAT
SEA Sistema de apoyo a la excelencia académica
IPRED Educación Interactiva y Abierta al Liderazgo
Vicerrectoría Académica
Universidad Industrial de Santander

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"