Métodos de conteo

Círculos Matemáticos de la UIS
Profesores: Carlos Uzcátegui, Natali Delgado y Yasmin Cote.

15 de Septiembre de 2023

1 ¿De cuántas maneras podemos ordenar?

Supongamos que tenemos 3 libros en un estante, que los llamaremos A, B, C. Los podemos ordenar de la siguiente manera

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.$$

- ¿De cuántas maneras podemos ordenar 4 libros?
- ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en una fila un grupo de 4 personas?
- Y si son 100 libros ¿qué hacemos?
- El **factorial** de un número:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n$$

- Cálculo de algunos factoriales.

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5.040
8	40.320
9	362.880
10	3.628.800
11	39.916.800
12	479.001.600

2 Contando parejas

Ahora queremos contar cuantas parejas de personas se pueden formar en un grupo de 4 personas. Digamos que las personas se llaman A, B, C y D. Entonces las posibilidades son:

$$AB, AC, AD, BC, BD, CD.$$

- ¿Cuántas parejas se pueden formar entre 5 personas?
- En una heladería ofrecen 10 sabores diferentes. ¿De cuántas maneras puedes escoger dos sabores diferentes?
- Y si son 50 sabores de helados o 100 personas ¿Qué hacemos?
- ¿Qué podemos decir en general? ¿Cuántas parejas se pueden formar en un grupo de n personas?
$$C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}.$$
- ¿Qué podemos decir si queremos formar grupos de 3 personas?
- La fórmula general para contar el número de grupos de k personas escogidas entre un grupo de n personas es:
$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3 Contando alternativas

- En una bolsa tenemos 3 tarjetas de tres colores diferentes, que las llamaremos a, b y c. Sacamos una tarjeta a la vez y lo hacemos 4 veces seguidas. ¿De cuántas maneras podemos sacar las tarjetas?

$$aaaa, aaab, aaac, aaba, aabb, aabc, aaca, aacb, aacc, \cdots etcétera$$

- ¿Qué podemos decir si en la bolsa hay 4 tarjetas a, b, c y d?
- El **principio multiplicativo**. Si tenemos k letras disponibles, se pueden formar k^n palabras con n de esas letras.
- ¿Cuántas placas de carro son posibles?
- Si tenemos n personas y escogemos 2 de ellas (una despues de la otra), tendremos $n(n-1)$ alternativas. Pero estamos contando 2 veces cada grupo de 2 personas: Si escogimos a Juan de primero y a Sofía de segundo; volvemos a contar esa pareja si escogemos a Sofía de primera y a Juan de segundo. Por eso, el número de parejas que podemos formar en un grupo de n personas es
$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

4 ¿Cuántos subgrupos podemos formar?

- Queremos formar grupos formados por las personas presentes en este salon. Digamos que somos 40 personas ¿Cuántos grupos diferentes se pueden formar?
- Quizás es mejor comenzar con un problema mas fácil. Digamos que tenemos solo 3 personas que llamaremos A, B y C. ¿Cuántos grupos se pueden formar?

$$A, B, C, AB, AC, BC, ABC$$

- La notación para los conjuntos

$$\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}.$$

  ¿Incluimos la alternativa donde el grupo es vacío?

- La fórmula general. Si tenemos n personas, se puden formar 2^n grupos entre ellas (incluyendo el grupo vacío).

5 El principio del palomar

A veces podemos saber que algo ocurre sin tener que verlo.

- Si llegan 101 palomas a un palomar que tiene solo 100 casillas y todas las palomas entran, entonces en alguna casilla debe haber al menos dos palomas.
- En una tienda de zapatos exiben 30 pares al público y solo hay 29 lugares para ponerlos. Necesariamente en algún lugar hay que ubicar al menos dos pares de zapatos.
- En una gaveta del armario se guardan las medias (calcetines) revueltos. Solo hay de 3 colores. ¿Cuántos hay que escoger (sin mirar) para estar seguros que tendremos dos del mismo color?
- ¿Cuántos pelos tiene en la cabeza una persona? En promedio, 150.000 (google dixit). ¿Habrán dos personas en Bucaramanga que tengan exactamente el mismo número de pelos en la cabeza?
- ¿Habrán dos personas en este salón cuyos nombres comiencen por la misma letra? (Como Arturo y Abel) Y dos cuyos nombres también terminen con la misma letra? (como Arturo y Abelardo).

6 Números gigantes

- No existe el número mas grande. Pero ¿cuál es el mas grande que Ud. puede imaginar? ¿cómo lo puede describir?

Mega	10^6	M	1000000
Giga	10^9	G	1000000000
Tera	10^{12}	T	1000000000000
Peta	10^{15}	P	1000000000000000
Exa	10^{18}	E	1000000000000000000
Zetta	10^{21}	Z	1000000000000000000000
Yotta	10^{24}	Y	1000000000000000000000000
Ronna	10^{27}	R	1000000000000000000000000000
Quetta	10^{30}	Q	1000000000000000000000000000000
Gúgol	10^{100}		
Gúgolplex	$10^{10^{100}}$		

Se estima que hay 10^{80} átomos en el universo conocido. El número 70! tiene 101 cifras, es un poco mayor que un gúgol:

1197857166996989179607278372168909873645893814254642585755536286462800958278984531968000000000000000

Como vimos antes, 70! es el número de posibles maneras en que un grupo de 70 personas se pueden colocar en fila.

- El número de subgrupos posibles que se pueden formar con los estudiantes en este salon, ¿es mayor que un mega, o un giga, o un quetta? ¿Qué podemos decir del número de parejas que se pueden formar?

7 Contando el infinito

- El gúgolplex es sin duda un número enorme, pero es finito. Por otra parte, la colección de todos los enteros es infinita:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, \ldots$$

- Los conjuntos infinitos tienen propiedades sorprendentes.
- El hotel de Hilbert.