Universidad Industrial de Santander

FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

Geometría fractal

Programa Círculos Matemáticos

27 de septiembre de 2023

Nombre:____ ID:_______________

Taller: Los números complejos[1]

(***. . . ¿Cuál es la raíz cuadrada de -1? . . .***)


L ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.
Nouamente posta in luce.
IN BOLOGNA
Nella stamperia di Giouanni Rossi
MDLXXII.
Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

Figura 1: L Algebra.

***Rafael Bombelli**, también escrito como Raffaele Bombelli (Bolonia, 1526 - Roma, 1572), fue un matemático e ingeniero hidráulico italiano. Su **Álgebra** fue uno de los textos matemáticos de referencia en Europa durante más de un siglo. En sus estudios algebraicos, de forma secundaria, dio con una de sus principales contribuciones a las matemáticas: la creación de los números complejos, que aparecen al resolver las ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones implican una raíz cuadrada de un número negativo. Aunque Bombelli se considera el inventor de los números complejos, el pionero fue el médico y matemático **Girolamo Cardano**, quien en 1545 había publicado **Ars magna** (el cual fue leído detalladamente por Bombelli). En los escritos de Cardano aparecían las raíces de números negativos, pero él consideraba que eran "tan sutiles que eran inútiles", por lo cual Cardano no investigó más sobre ellos.* (Tomado de Wikipedia).

Objetivo: El propósito central de esta actividad es ofrecerte una introducción concisa pero completa, permitiéndote identificar y manejar con solidez los fundamentos del sistema numérico denominado 'números complejos'. Este conocimiento es un prerrequisito esencial para abordar con éxito el tema de los conjuntos de Julia y el conjunto de Mandelbrot.

Actividades: Una familia muy importante, vistosa e ilustrativa de conjuntos **en el plano** que tienen estructura fractal la constituyen los llamados "conjuntos de Julia" y nada menos que el muy famoso "conjunto de Mandelbrot". Para entender cómo funcionan estas dinámicas e iteraciones en el plano, es indispensable que conozcas el conjunto de los números complejos.

1. Lee atentamente el siguiente texto (tomado del libro *El enigma de Fermat*, de Simon Singh):

> [. . .] Ya en el Renacimiento, los matemáticos asumieron que habían descubierto todos los números en el universo. Se podía pensar que todos los números estaban ubicados en una recta numérica, una línea infinitamente larga cuyo centro es el cero. La recta numérica sugería que la completud, aparentemente, se había logrado. Todos los números parecían en su lugar listos a responder a cualquier pregunta matemática. En cualquier caso, no había en la recta numérica campo para más números. Entonces, durante el siglo XVI, hubo nuevos estruendos de inquietud. El matemático italiano Rafaello Bombelli estaba estudiando las raíces cuadradas de varios números cuando se tropezó con una pregunta imposible contestar: ¿cuál es la raíz cuadrada de -1? El problema parece insoluble. La solución no puede ser $+1$ ni -1, pues el cuadrado de ambos es $+1$. Sin embargo, no hay otros candidatos obvios.

[1] Taller tomado del texto: Sonia M. Sabogal P., "Geometría fractal en secundaria".

Al mismo tiempo, la completud exige que seamos capaces de contestar la pregunta. La solución de Bombelli fue crear un número nuevo "i" llamado número imaginario, que simplemente se definía como la solución a la pregunta: ¿cuál es la raíz cuadrada del negativo de -1? Esta puede parecer una manera cobarde de resolver el problema, pero no es diferente de la manera como fueron introducidos los números negativos. Enfrentados a una pregunta que de otra manera no tenía respuesta, los hindúes simplemente definieron a -1 como la respuesta a la pregunta ¿cuánto es cero menos uno? Es más fácil aceptar el concepto de -1 sólo porque conocemos el concepto análogo de "deuda", mientras no hay nada en el mundo real que respalde el concepto de número imaginario. El matemático alemán del siglo XVII Gottfried Leibniz describió en forma elegante la extraña naturaleza del número imaginario: "El número imaginario es un magnífico y maravilloso recurso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser". Aunque las raíces cuadradas de los números negativos se conocen como números imaginarios, los matemáticos no consideran que i sea más abstracto que un número negativo o un número entero. Además, los físicos descubrieron que los números imaginarios son el mejor lenguaje para describir algunos fenómenos del mundo real. Con algunas manipulaciones menores los números imaginarios resultan ser la manera ideal para analizar el movimiento natural de balanceo de objetos como el péndulo. Este movimiento, técnicamente conocido como "oscilación sinusoidal", se encuentra con frecuencia en la naturaleza, así que los números imaginarios se han vuelto parte integral de muchos cálculos físicos. Actualmente, los ingenieros eléctricos invocan a 'i' para analizar corrientes eléctricas oscilantes y los físicos teóricos calculan las consecuencias de las funciones de onda mecánicas de los cuantos acudiendo al poder de los números imaginarios [...]

Punto de discusión: De acuerdo con la lectura anterior y en tu opinión, ¿es apropiado el nombre "número imaginario"?, ¿por qué? Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

2. En adelante asumiremos que el símbolo i representa un número (imaginario) que cumple $i^2 = -1$, y consideramos entonces el conjunto de todos los números de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales, es decir:

$$\mathbb{C} =: \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

que llamaremos el **conjunto de los números complejos**.

▷ Escribe al menos tres ejemplos de números complejos.

3. Si $z = a+bi$ es un número complejo, a se llama la **parte real** de z, b la **parte imaginaria** y se suele notar como $\mathrm{Re}(z) = a$ y $\mathrm{Im}(z) = b$. Un complejo cuya parte real es cero y la parte imaginaria es diferente de cero, es decir, de la forma $z = bi$, con $b \neq 0$ se dice un **imaginario puro**. Si la parte imaginaria es cero, el complejo es de la forma $z = a$, siendo a un número real.

▷ Escribe al menos tres ejemplos de números imaginarios puros.

4. Analiza la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes afirmaciones:

   (a) Todo número real es complejo.
   (b) Todo número complejo es real.
   (c) El conjunto de los números reales es subconjunto del conjunto de los números complejos.
   (d) El número complejo $2 + 7i$ es igual al número complejo $7 + 2i$.

   Justifica tus respuestas, comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

5. **Observa**: cada complejo está determinado por una pareja ordenada de números reales, es decir, a $z = a + bi$ lo podemos identificar con la pareja ordenada (a, b), y de esta manera una definición alternativa del conjunto $\mathbb{C}$ sería:

$$\mathbb{C} =: \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

   Escribe al menos tres ejemplos de números complejos (podrían ser los mismos que diste en la actividad 3), pero ahora en forma de pareja ordenada. Haz lo mismo para los siguientes complejos: $2 + 7i$, $-\frac{1}{3} + \sqrt{2}i$, $1 + i$, πi, i, 0. Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

6. **Recuerda**: ¿Cómo se representa geométricamente una pareja ordenada (a, b) de números reales? Por lo tanto, ¿cómo se representaría gráficamente el sistema numérico de los números complejos? Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

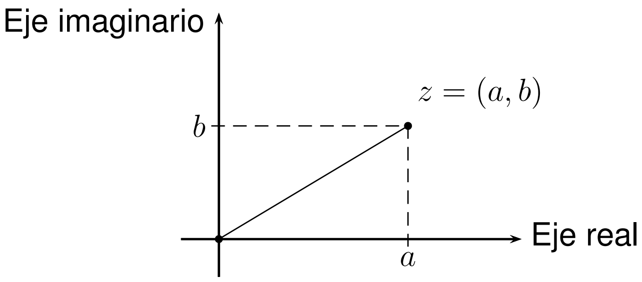

Figura 2: Representación del número complejo $a + bi$.

7. Cuando se identifica cada punto (a, b) del plano con el número complejo $a+bi$ (así como se identifica cada punto de una línea recta con un número real), se obtiene lo que se conoce con el nombre de **plano complejo**, llamando entonces al eje horizontal, el **eje real** y al eje vertical, el **eje imaginario** (ver ilustración 2). Observa que esto no es otra cosa que "renombrar" el plano cartesiano, el eje x y el eje y, ya por ti bien conocidos.

8. Grafica en un plano (complejo) todos los ejemplos de números complejos que se han dado en las actividades anteriores.

9. La expresión $a + bi$ se llama la **forma binómica** del complejo (¿por qué piensas que recibe ése nombre?), mientras que (a, b) se llama la **forma rectangular** o **cartesiana**; más adelante veremos otra forma muy útil de escribir un número complejo.

10. Si $z = a+bi$, un complejo asociado a z que resulta muy útil se llama el **conjugado** de z, se nota $\bar{z}$ y está dado por $\bar{z} = a - bi$. Describe en palabras cómo se obtiene el conjugado de un número complejo. Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

    (a) Escribe y grafica el conjugado de cada uno de los números complejos que graficaste en la actividad 9.

    (b) ¿Qué relación geométrica hay entre z y $\bar{z}$?

    Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

11. Definiremos ahora dos operaciones importantes en el conjunto $\mathbb{C}$, **suma** y **multiplicación**, las cuales le dan a los números complejos cierta estructura especial y permiten hacer "aritmética" en $\mathbb{C}$. Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son números complejos, se define la suma de z_1 y z_2 por:

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i}$$

y la multiplicación de z_1 y z_2 por:

$$\boxed{z_1\, z_2 = (ac - bd) + (ad + cb)i}$$

Observa atentamente las dos definiciones anteriores. Se puede apreciar a simple vista que la suma se define de manera natural, lo que no está claro es el caso del producto, aunque es fácil verificar que este se obtiene multiplicando común y corriente los binomios $a+bi$ y $c+di$ y recordando que $i^2 = -1$ (verifícalo).

12. Escribe al menos tres ejemplos de suma de complejos y tres ejemplos de multiplicación. Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

13. Vamos ahora a estudiar otra forma de denotar un complejo $z = a+bi$, que resulta muy útil a la hora de hacer ciertas operaciones, se trata de: la **forma polar**. Sea P el punto del plano cartesiano (de origen $O = (0, 0)$) correspondiente al complejo z. Llamemos r la longitud del segmento OP y θ el ángulo que forma dicho segmento con la parte positiva del eje real y tal que $0 \leq \theta < 2\pi$ (ver ilustración 3).

    Entonces z queda completamente determinado si conocemos r y θ. La longitud r se llama **módulo** o **norma** de z, se nota $r = |z|$; θ se llama el **argumento** (principal) de z y se nota $\mathrm{Arg}(z)$ (el argumento se suele expresar en radianes). Observa que cualquier ángulo coterminal con θ sirve para determinar a z (¿por qué?), es decir, en realidad existen muchos argumentos; sin embargo, con la condición $0 \leq \theta < 2\pi$ estamos escogiendo solo uno (a veces llamado argumento principal).

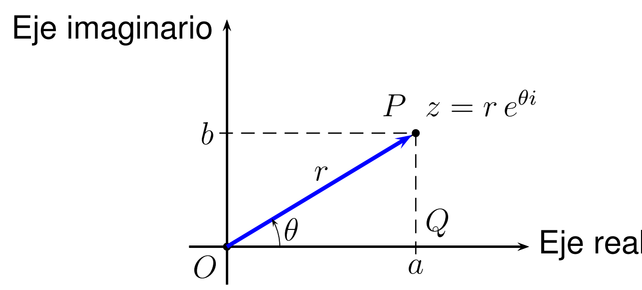

Figura 3: Representación en la forma polar del número complejo $z = re^{\theta i}$.

14. Observa atentamente el triángulo $\triangle OPQ$ en la ilustración 3.

    (a) Verifica las coordenadas de cada vértice: $O = (0, 0)$, $P = (a, b)$ y $Q = (a, 0)$.

    (b) ¿Qué clase de triángulo es $\triangle OPQ$ (observa su ángulo con vértice en Q).

    (c) Recordando y usando el teorema de Pitágoras, así como las funciones trigonométricas seno y coseno (si no recuerdas estas fórmulas, investiga o consulta con tu profesor), en el triángulo observado, completa para a y b en términos de r y θ:

$$a = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \text{y} \qquad b = \underline{\hspace{2cm}}$$

Y ahora completa para r y θ en términos de a y b:

$r =$ __________ y $\tan\theta =$ __________

15. De acuerdo con tus respuestas (si están correctas), de la actividad anterior podemos escribir:

$$z = a + bi = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

y aceptamos sin demostración (por estar fuera de los alcances de este texto), que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \qquad (1)$$

con lo cual

$$z = re^{i\theta},$$

expresión que llamaremos la **forma polar** de z; donde e es la llamada **constante de Euler**, en honor al gran matemático suizo Leonhard Euler[2], es un número irracional cuyo valor aproximado es 2,71828.

16. Verifica la siguiente fórmula o ecuación (usa por supuesto la igualdad (1) y recuerda los valores de $\cos\pi$ y $\operatorname{sen}\pi$):

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

La anterior es considerada una de las más bellas fórmulas de la matemática por su sencillez y, a la vez, por involucrar las distinguidas constantes e, i, π, 1 y 0.

17. La forma polar es útil, por ejemplo, para hacer productos y cocientes de complejos, así como para encontrar potencias n-ésimas y raíces n-ésimas de un complejo. Para efectos de lo que necesitaremos, sólo abordaremos la multiplicación y la potenciación.

Sean $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ dos números complejos escritos en forma polar. **Justifica** con tus palabras **cada paso** en el proceso que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2}) \\ &= (r_1r_2)(e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}) \\ &= r_1r_2e^{i\theta_1+i\theta_2} \\ &= r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

18. De esta manera se puede deducir que la norma de un producto de complejos es el producto de sus normas, y el argumento del producto es la suma de los argumentos. Esto nos da una “receta” muy sencilla y útil para multiplicar complejos en forma polar:

> Para multiplicar complejos se multiplican sus normas y se suman sus argumentos.

▷ Toma por ejemplo $z_1 = 3e^{i45^\circ}$ y $z_2 = \frac{1}{2}e^{i100^\circ}$ y calcula el producto z_1z_2 usando la “receta” anterior. Dibuja z_1, z_2 y z_1z_2 en el plano complejo. Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

19. Ahora de nuevo justifica cada uno de los pasos en el siguiente proceso: Dados un complejo $z = re^{i\theta}$ y un número natural n, se tiene:

$$\begin{aligned} z^n &= (re^{i\theta})^n \\ &= r^n(e^{i\theta})^n \\ &= r^ne^{in\theta} \end{aligned}$$

20. De acuerdo con la actividad anterior, escribe una “receta” (al estilo de la que se escribió para la multiplicación) para elevar un complejo a una potencia n. Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

21. Toma por ejemplo $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i90^\circ}$ y calcula z^2, usando la receta que diste. Dibuja z y z^2 en el plano complejo. Escribe al menos dos ejemplos más de potenciación en $\mathbb{C}$. Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

[2]**Leonhard Paul Euler**, Basilea, Suiza, 1707 – San Petersburgo, Imperio ruso, 1783, conocido como **Leonhard Euler**, fue un matemático, físico y filósofo suizo. Se trata del principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos, muy conocido por el número de Euler (e), número que aparece en muchas fórmulas de cálculo y física.