**Problemas de Divisibilidad**

1. Pruebe que le producto de tres números naturales consecutivos es divisible por 6.

2. Dado un número primo $p$, encuentre cuántos números naturales son:

    *a*) Menores que $p$ y primos relativos con $p$.

    *b*) Menores que $p^2$ y primos relativos con $p$.

3. Encuentre el menor número natural $n$ talque $n!$ es divisible por 990.

4. ¿Cuántos ceros existen al final de la representación decimal del número $100!$?

5. Para algún número $n$, el número $n!$ puede tener exactamente 5 ceros al final de su representación decimal.

6. Pruebe que todo número con un número impar de divisores es un cuadrado perfecto.

7. Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^2 - y^2 = 31$.

8. Encuentre las raices enteras de la ecuación $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$

9. Si $a$ y $b$ son números naturales, Conjeture cual es el valor de $\gcd(a,b)\mathrm{lcm}(a,b)$.

**Problemas de Residuos**

1. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n^5 + 4n$ es divisible por 5.

2. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n^2 + 1$ NO es divisible por 3.

3. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n^3 + 2$ NO es divisible por 9.

4. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ impar , se tiene que $n^3 - n$ es divisible por 24.

5. Pruebe que para todo primo $p > 3$, se tiene que $p^2 - 1$ es divisible por 24.

6. Pruebe que para $p, q > 3$ primos, se tiene que $p^2 - q^2$ es divisible por 24.

7. Los números naturales $x,\ y, z$ satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. Pruebe que por lo menos uno de ellos es divisible por 3.

8. Dados dos números naturales $a$ y $b$ tales que $a^2 + b^2$ es divisible por 21, pruebe que $a^2 + b^2$ es divisible por 441.