Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
XIII Olimpiadas Regionales de Matemáticas.
SECUNDARIA
SOLUCIONARIO DEL RETO 2.

"Todo problema profana un misterio; a su vez, todo problema es profanado por la solución."
-Cioran.

Maratón Olímpica

¡Prepárate para las Olimpiadas!

Nivel Básico

Problema 1.

Tomado de Olimpiada Matemática Argentina, Problemas Semanales:
https://www.oma.org.ar/problemas/index.php

Julián tenía un tablero de 3×3 con un 0 escrito en cada casilla y le aplicó repetidas veces la siguiente operación: cada vez, eligió un cuadrado de 2×2 que cubriera exactamente cuatro casillas adyacentes del tablero y le sumó 1 a cada uno de los cuatro números de las cuatro casillas. Al cabo de 100 operaciones obtuvo el tablero:

15	a	29
b	c	d
40	e	f

Dar los valores de a, b, c, d, e, f.

Solución: Veamos que solo hay cuatro cuadrados que cubren exactamente cuatro casillas adyacentes, estos son:

$$C_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 15 & a \\ \hline b & c \\ \hline\end{array} \qquad C_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline a & 29 \\ \hline c & d \\ \hline\end{array} \qquad C_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline b & c \\ \hline 40 & e \\ \hline\end{array} \qquad C_4 = \begin{array}{|c|c|}\hline c & d \\ \hline e & f \\ \hline\end{array}$$

Por las esquinas vemos que a C_1 se le aplicó la operación 15 veces, a C_2 29 veces, a C_3 40 veces, luego como el tablero final se obtuvo después de 100 operaciones, entonces a C_4 se le aplicó la operación

$$100 - (15 + 29 + 40) = 16 \text{ veces.}$$

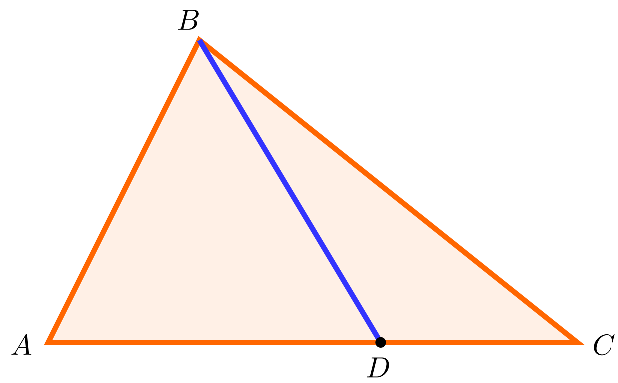
Por lo anterior,

$$\begin{aligned} a &= 15 + 29 = 44, \\ b &= 15 + 40 = 55, \\ c &= 15 + 29 + 40 + 16 = 100, \\ d &= 29 + 16 = 45, \\ e &= 40 + 16 = 56, \\ f &= 16. \end{aligned}$$

Scan me
Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

Problema 2.

Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS, Pruebas anteriores:
http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas-secundaria
Suponga que el área del triángulo ABC que se muestra en la siguiente figura es $36\,cm^2$ y que el área del triángulo ABD es $21\,cm^2$. Si $AC = 12\,cm$, ¿cuál es el valor numérico de $AD \times DC$?



Solución: Sea h la altura del triángulo ABC respecto a la base $\overline{AC}$. Entonces h también es la altura de los triángulo ABD y DBC respecto a las bases $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, respectivamente. De esta manera, tenemos que:

$$\frac{AD \times h}{2} = 21 \qquad y \qquad \frac{DC \times h}{2} = 36 - 21 = 15.$$

De ahí que

$$\frac{\frac{AD \times h}{2}}{\frac{DC \times h}{2}} = \frac{AD}{DC} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}.$$

Luego $\frac{AD}{DC} = \frac{7}{5}$ *o equivalentemente* $AD = \frac{7}{5}DC$ *y también*

$$AC = AD + DC = 12,$$

de modo que:

$$\begin{aligned} \frac{7}{5}DC + DC &= 12, \\ \frac{12}{5}DC &= 12, \\ DC &= 5, \end{aligned}$$

y así, $AD = 12 - 5 = 7$. *Por lo tanto,* $AD \times DC = 7 \times 5 = 35$.

Problema 3.

Tomado de Olimpiadas Regionales de la Universidad del Valle.
https://orm.univalle.edu.co/index.php/olimpiadas-anteriores

Se dice que un cuadrado mágico multiplicativo tiene *característica* k si el producto de los tres números que conforman las filas, las columnas y las diagonales dan el mismo número k. Todos los números son números naturales y distintos entre sí. Sandra es experta haciendo este tipo de cuadrados y un día decide hacer uno con los siguientes números iniciales:

1	21	

¿Cuál es la característica del cuadrado de Sandra?

Solución: *Considere el siguiente etiquetado de las casillas del cuadrado mágico de Sandra:*

a	b	c
1	21	d
e	f	g

Como la característica del cuadrado mágico de Sandra es k*, tenemos que* $1 \cdot 21 \cdot d = k$ *y* $c \cdot d \cdot g = k$. *Además, los números deben ser naturales distintos y* $21 = 1 \cdot 3 \cdot 7$*, entonces* $c = 7$ *y* $g = 3$ *(o* $c = 3$ *y* $g = 7$*). Suponiendo que tenemos ese orden obtenemos el siguiente arreglo en el cuadrado mágico multiplicativo:*

a	b	7
1	21	d
e	f	3

Ahora consideramos una de las diagonales, para la cual se cumple que $7 \cdot 21 \cdot e = 3 \cdot e \cdot f$. *De donde,* $f = 49$*, obteniendo el siguiente arreglo:*

a	b	7
1	21	d
e	49	3

Finalmente, como $7 \cdot a \cdot b = 3 \cdot 21 \cdot a$*, tenemos que* $b = 3 \cdot 3 = 9$. *No haría falta completar el cuadrado pues ya tenemos tres dígitos de una columna, como muestra el arreglo:*

a	9	7
1	21	d
e	49	3

Por lo tanto, la característica del cuadrado de Sandra es $9 \cdot 21 \cdot 49 = 9261$.

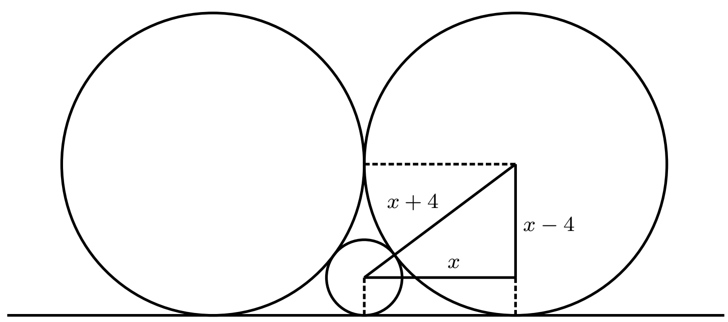
Nivel Medio

Problema 1.

Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico, Biblioteca.
http://om.pr/

En el mismo lado de una recta se dibujan tres círculos de la siguiente forma: dos círculos iguales, con radio mayor de $4\,cm$, tangentes el uno al otro y a la recta; el tercer círculo, es de radio $4\,cm$ y es tangente a los otros dos círculos y a la recta. ¿Cuál es el radio de los círculos que son iguales?

Solución: En la siguiente figura se bosqueja la situación del enunciado. En ella también se ha construido un triángulo rectángulo utilizando los radios de los círculos. Sea x la longitud del radio del círculo grande, entonces la longitud de la hipotenusa es $x + 4$ y la de los catetos es x y $x - 4$.



Luego, por el Teorema de Pitágoras

$$
\begin{aligned}
x^2 + (x-4)^2 &= (x+4)^2,\\
x^2 + x^2 - 8x + 16 &= x^2 + 8x + 16,\\
x^2 &= 16x,\\
x &= 16.
\end{aligned}
$$

Por lo que el radio de los círculos grandes es $16\,cm$.

Problema 2.

Tomado de COMATEQ-2021, Solucionarios:
https://webwork-test.uprm.edu/index.php/solucionarios

¿Cuál es el residuo que deja el número $\underbrace{111\ldots11}_{333\ unos}$ cuando se divide entre 15?

Solución: Note que

$$\underbrace{111\ldots11}_{333\ unos} = \underbrace{111\ldots11}_{331\ unos}05 + 6$$

y el número $\underbrace{111\ldots11}_{331\ unos}05$ es múltiplo de 15, ya que es múltiplo de 5 (pues termina en 5), y es múltiplo de 3 (pues la suma de sus cifras es $331 + 5 = 336$ que es múltiplo de 3). Por lo tanto,

$$\underbrace{111\ldots11}_{333\ unos} = 15q + 6,$$

donde q es el cociente y 6 el residuo que se obtiene al dividir $\underbrace{111\ldots11}_{333\ unos}$ entre 15.

Scan me

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

Problema 3.

Tomado de Olimpiada Matemática Española
http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimprab.htm

Ana y Bernardo juegan al siguiente juego. Se empieza con una bolsa que contiene $n \geq 1$ piedras. En turnos sucesivos y empezando por Ana, cada jugador puede hacer los siguientes movimientos: si el número de piedras en la bolsa es par, el jugador puede coger una sola piedra o la mitad de las piedras. Si el número de piedras en la bolsa es impar, tiene que coger una sola piedra. El objetivo del juego es coger la última piedra. Determinar para qué valores de n Ana tiene una estrategia ganadora.

Solución: Ana tiene una estrategia ganadora para $n = 1, 3$, *y para todos los números pares mayores que* 3. *En primer lugar, observamos que en los casos* $n = 1, 2, 3$ *todos los movimientos están determinados y Ana gana cuando* $n = 1$ *o* $n = 3$. *Si el número inicial de piedras es par y mayor que* 4, *Ana puede coger una sola piedra, lo cual obliga a Bernardo a coger solamente otra. De esta manera, Ana puede forzar a que se llegue a una situación con* 4 *piedras en la bolsa en el momento de su turno. En este caso, Ana coge* 2 *piedras, lo cual deja a Bernardo en una posición perdedora y por lo tanto Ana gana el juego.*
De forma análoga, si el juego empieza con un número impar y mayor que 4 de piedras, Ana tiene que coger necesariamente una sola piedra, lo cual deja a Bernardo en una posición ganadora, pues él puede controlar el rumbo del juego. Por consiguiente, Ana únicamente puede ganar si $n = 1, 3$ *o* n *es par y mayor que* 3.

Nivel Avanzado

Problema 1.

Tomado de Olimpiadas Matemáticas de la Universidad de Antioquia.
https://www.olimpiadasudea.co/matematicas/talleres.html

Supongamos que $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{2019}$ es cualquier reordenación de los números $1, 2, 3, \ldots, 2019$. Justificar que

$$(m_1 - 1)(m_2 - 2)(m_3 - 3) \cdots (m_{2019} - 2019)$$

es un número par.
¿Sucede lo mismo si se consideran los números $1, 2, 3, \ldots, 2020$?

Solución 1:Observe que al sumar todos los factores de la expresión se obtiene:

$$(m_1 - 1) + (m_2 - 2) + \cdots + (m_{2019} - 2019) = (m_1 + m_2 + \cdots + m_{2019}) - (1 + 2 + \cdots + 2019) = 0$$

pues los números $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{2019}$ son los mismos $1, 2, 3, \ldots, 2019$, con algún orden. De modo que la suma de todos los factores de la expresión $(m_1 - 1)(m_2 - 2)(m_3 - 3) \cdots (m_{2019} - 2019)$ es un número par, pero allí hay 2019 números, luego al menos uno de ellos debe ser par, pues si todos son impares, la suma sería impar. Finalmente, como al menos un factor es par, entonces el producto es par.

Solución 2: Tenga en cuenta que

$$\begin{aligned} par - par &= par, \\ par - impar &= impar, \\ impar - par &= impar, \\ impar - impar &= par. \end{aligned}$$

Esto es, un factor $(m_k - k)$ es impar si y solo si m_k y k tienen paridad distinta. Pero entre los números $1, 2, 3, \ldots, 2019$ hay 1009 pares y 1010 impares, luego no es posible que todos los factores sean impares, esto es, al menos uno es par y por lo tanto el producto es par.

Nota: Si se consideran los números $1, 2, 3, \ldots, 2020$ no ese puede garantizar que el producto $(m_1 - 1)(m_2 - 2)(m_3 - 3) \cdots (m_{2020} - 2020)$ sea par, para cualquier reordenación de los números, pues tomando la reordenación $m_1 = 2020, m_2 = 2019, m_3 = 2018, \ldots, m_{2020} = 1$ se obtiene que

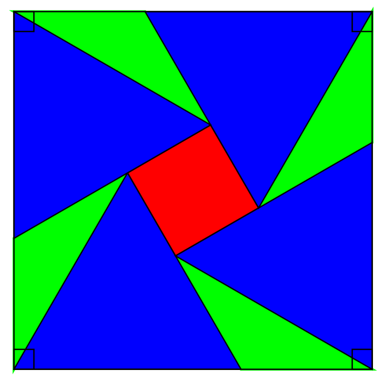
$$(2020 - 1)(2019 - 2)(2018 - 3) \cdots (1 - 2020),$$

es impar ya que todos sus factores son impares.

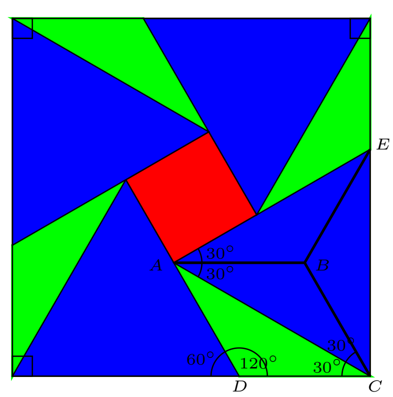
Problema 2.

Tomado del canal de Youtube: Academia Internet.
https://www.youtube.com/watch?v=REDqQbYzB7Y
En la siguiente figura los triángulos azules son equiláteros. Calcular

$$\frac{\text{Área azul}}{\text{Área verde}} = ?$$



Ideas de solución: Considere la siguiente figura en la que se han trazado las bisectrices de uno de los triángulos equiláteros y se han marcado ciertos ángulos.



Note que

$$\begin{aligned}
\measuredangle CDA &= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,\\
\measuredangle ACD &= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,\\
\measuredangle DAC &= 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ,\\
\measuredangle ABC &= 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ.
\end{aligned}$$

Luego los triángulos ADC y ABC son congruentes. Análogamente se prueba que los triángulos ABC, EBC y EBA también son congruentes, de modo que el área de cada triángulo azul equivale al triple del área de un triángulo verde. Por lo tanto:

$$\frac{\text{Área azul}}{\text{Área verde}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Scan me

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

Problema 3.

Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS, Pruebas anteriores:
http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas-secundaria

La suma de 50 enteros positivos consecutivos es 1775. ¿Cuál es la suma de los siguientes 100 enteros consecutivos?

Solución: Sean $n+1, n+2, n+3, \ldots, n+50$ los 50 enteros positivos consecutivos cuya suma es 1775, entonces

$$\begin{aligned}
(n+1)+(n+2)+(n+3)\cdots+(n+50) &= 1775, \\
50n+(1+2+3+\cdots+50) &= 1775, \\
50n+\frac{50\times 51}{2} &= 1775, \\
50n &= 500, \\
n &= 10.
\end{aligned}$$

Luego el mayor de los números es $n+50=10+50=60$. Ahora sumemos los siguientes 100 enteros consecutivos, esto es:

$$\begin{aligned}
(60+1)+(60+2)+\cdots+(60+100) &= 100\times 60+(1+2+\cdots+100), \\
&= 6000+\frac{100\times 101}{2}, \\
&= 11050.
\end{aligned}$$

Otros enlaces en los que puedes descargar material para entrenamiento:

1. Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS
   Pruebas anteriores: http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas-secundaria
   Talleres de capacitación: https://n9.cl/ormuisrepositorio
   Página de facebook: https://web.facebook.com/OlimpiadasRegionalesDeMatematicasUis
2. Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño:
   https://orm.udenar.edu.co/?page_id=1612
3. Olimpiada Mexicana de Matemáticas
   https://www.ommenlinea.org/
4. Olimpiada Matemática Argentina
   https://www.oma.org.ar/
5. Olimpiada Panameña de Matemáticas
   https://opm.org.pa/recursos/
6. Olimpíadas Portuguesas de Matemática
   http://olimpiadas.spm.pt/index.php?id=69&tipo=1
7. Olimpíada Brasileira de Matemática
   https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/
8. CanadaMath, canal de youtube
   https://www.youtube.com/channel/UCPjak7r62HVJ6rvgsu2xoFA
9. Página de Facebook: Oscar Habla Mate
   https://web.facebook.com/OscarHablaMate
10. International Mathematical Olympiad (IMO)
    http://www.imo-official.org/problems.aspx?&column=year&order=desc&language=en
11. Olimpiadas de Matemáticas, página de preparación y problemas
    http://wpd.ugr.es/~jmmanzano/preparacion/problemas.php

12. Olimpíada Brasileira de matemática das escolas públicas
    http://www.obmep.org.br/banco.htm
13. Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Baja California
    http://ommbc.org/sitio/#/entrenate
14. Toomates Coolección
    http://www.toomates.net/