Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
XIII Olimpiadas Regionales de Matemáticas.
SECUNDARIA
SOLUCIONARIO DEL RETO 1.

"Todo problema profana un misterio; a su vez, todo problema es profanado por la solución."
-Cioran.

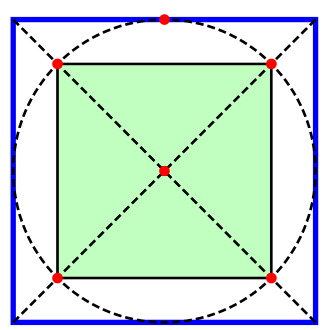
MARATÓN OLÍMPICA

¡Prepárate para las Olimpiadas!

NIVEL BÁSICO

Problema 1.

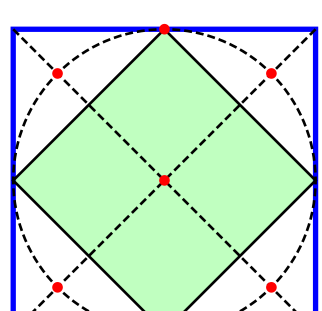
Sobre una hoja cuadrada se trazan sus diagonales y se dibuja un círculo colocando el compás fijo en el punto de intersección de las diagonales y el lápiz en el punto medio de uno de los lados de la hoja. Luego se unen los puntos de intersección de las diagonales con el círculo, como se muestra en la figura. Si el lado de la hoja mide $10\,cm$, ¿cuánto mide el área coloreada en verde?



(a) $\dfrac{200}{3}\,cm^2$ (b) $75\,cm^2$ (c) $20\,cm^2$ (d) $50\,cm^2$

Solución: Girando el cuadrado verde en sentido antihorario, de manera que sus vértices coincidan con los puntos medios de los lados de la hoja, como se muestra en la siguiente figura, se observa que el área del cuadrado verde A_V, coincide con la mitad del área de la hoja A_H, esto es

$$A_V = \frac{A_H}{2} = \frac{10 \times 10\,cm^2}{2} = 50\,cm^2.$$



Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

Problema 2.

La contraseña del celular de Juan es un número de 4 cifras. Si la suma de todos los dígitos de la contraseña es 14, y además la cifra de las decenas es el doble de la cifra de las centenas y la cifra de las unidades es el triple de la cifra de las unidades de mil, ¿cuál es el producto de las cifras de la contraseña de Juan?

(a) 96 (b) 18 (c) 56 (d) 48 (e) No sé

Solución: Sea $abcd$ la contraseña del celular de Juan, entonces

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 14, \\ c &= 2d, \\ d &= 3a. \end{aligned}$$

De modo que,

$$\begin{aligned} a+b+2b+3a &= 14, \\ 4a+3b &= 14. \end{aligned}$$

Además, como a y b son dígitos, se concluye que $a=2$ y $b=2$. Así, la contraseña del celular de Juan es 2246 y el producto de sus cifras es $2\times 2\times 4\times 6=96$.

Problema 3.

Cuatro amigos planean un viaje para cuando acabe la pandemia. Para hacer el viaje disponen de un automóvil que tiene 5 asientos, incluido el del conductor. Si solo 2 de los amigos saben conducir, ¿de cuántas maneras diferentes pueden acomodarse para el viaje?

(a) 12 (b) 48 (c) 16 (d) 24

Solución: Dado que el automóvil tiene 5 asientos, pero solo viajarán 4 personas, entonces un asiento quedará vacío (este asiento no puede ser el del conductor). Por otra parte, solo 2 personas saben conducir, por lo que el asiento del conductor puede ocuparse de 2 formas distintas. Ahora, habiendo escogido el conductor, el asiento 1 puede estar: vacío u ocupado por alguno de los tres amigos restantes, es decir puede ir de 4 formas; el asiento 2 puede ir vacío u ocupado por alguno de los dos amigos restantes, esto es, puede ir de 3 formas, y continuando de esta manera, el asiento 3 puede ir de 2 formas y el asiento 4 de 1 forma. De manera que los cuatro amigos pueden acomodarse de $2\times 4\times 3\times 2\times 1=48$ maneras diferentes para el viaje.
El procedimiento anterior se conoce como el principio multiplicativo, que se resume en:

$$\underbrace{2 \text{ opc.}}_{\text{Conductor}} \times \underbrace{4 \text{ opc.}}_{\text{Asiento } 1} \times \underbrace{3 \text{ opc.}}_{\text{Asiento } 2} \times \underbrace{2 \text{ opc.}}_{\text{Asiento } 3} \times \underbrace{1 \text{ opc.}}_{\text{Asiento } 4} = \underbrace{48.}_{\text{formas}}$$

Nivel Medio

Problema 1.

Para cada número entero n definimos $\textcircled{n}$ así:

$$\textcircled{n} = (n-100)^{n+1}.$$

Por ejemplo:

$$\textcircled{1} = (1-100)^{1+1} = 99^2,$$
$$\textcircled{2} = (2-100)^{2+1} = -98^3,$$

Determine el valor de

$$\textcircled{1} \times \textcircled{2} \times \textcircled{3} \times \cdots \times \textcircled{2020}$$

(a) $(2020!)^{\frac{(2021)(2022)}{2}-1}$ (b) 1 (c) 0 (d) $(2020!)^{2020!}$

Solución: Note que $\textcircled{100} = (100-100)^{2+1} = 0$, *por lo tanto*

$$\textcircled{1} \times \textcircled{2} \times \textcircled{3} \times \cdots \times \textcircled{100} \times \cdots \times \textcircled{2020} = 0.$$

Problema 2.

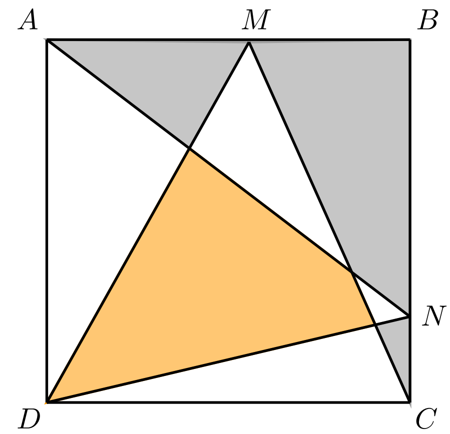
En la siguiente figura $ABCD$ es un cuadrado con $\triangle MCD$ y $\triangle NDA$ inscritos en él. Si el área de la región naranja es $30\,cm^2$, ¿cuál es el área de la región gris?

(a) $25\,cm^2$

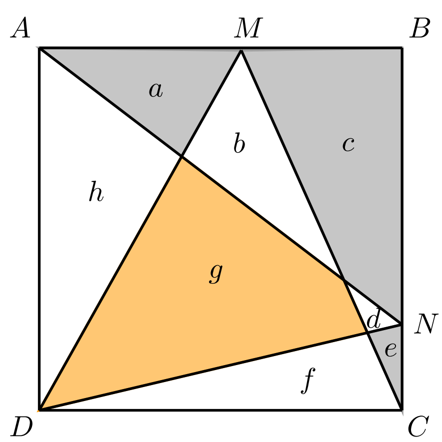
(b) $30\,cm^2$

(c) $20\,cm^2$

(d) No se puede determinar



Solución: Considere la siguiente figura, en la que cada letra representa el área de la respectiva región.



Sea L el lado del cuadrado $ABCD$. Note que el área del triángulo DMC es la mitad del área del cuadrado $ABCD$, pues una de sus bases es $DC = L$ y la altura correspondiente a esta base es L, así su área es $\frac{L^2}{2}$. Por lo anterior, se tiene que

$$g + b + f = h + a + c + d + e. \qquad (1)$$

Análogamente, el área del triángulo AND es la mitad del área del cuadrado $ABCD$, luego

$$h + g + d = a + b + c + e + f \qquad (2)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2) se tiene que:

$$\begin{aligned} 2g + b + f + h + d &= h + 2a + 2c + d + 2e + b + f \\ 2g &= 2a + 2c + 2e \\ g &= a + c + e \end{aligned}$$

Luego el área de la región naranja es igual al área de la región gris. De ahí que el área de la región gris es $30\,cm^2$.

Problema 3.

Al dividir 337 entre el número natural $n > 10$ el resto es 1. Entonces el resto que se obtiene al dividir 2020 entre n es:

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 5

Solución: Por el Algoritmo de la división se tiene que $337 = nq + 1$, donde q es el cociente de la división de 337 entre n. Ahora, note que

$$\begin{aligned}2020 &= 337 \times 5 + 335,\\ &= (nq+1) \times 5 + 335,\\ &= 5nq + 5 + 335,\\ &= 5nq + 337 + 3,\\ &= 5nq + nq + 1 + 3,\\ &= n(6q) + 4,\end{aligned}$$

de ahí que el resto que se obtiene al dividir 2020 entre n es 4.

Nivel Avanzado

Problema 1.

En un salón de 30 estudiantes, en donde todos van pasando al menos una de estas tres materias: Inglés, Química y Matemáticas, se cumple que:

(i) los que van pasando Inglés y Química son 12.

(ii) los que van pasando Inglés y Matemáticas son 5.

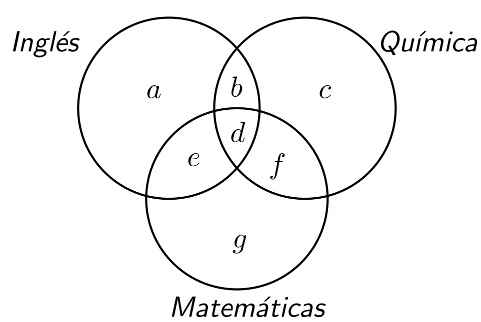
(ii) los que van pasando Matemáticas y Química son 13.

(iv) los que van pasando solamente una materia son 6.

¿Cuántos van pasando las tres materias?

(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 4

Solución: Considere el siguiente diagrama de Venn:



Del enunciado tenemos que:

$$
\begin{aligned}
a+b+c+d+e+f+g &= 30, & & \\
b+d &= 12 & \longrightarrow \quad & b = 12-d \\
e+d &= 5 & \longrightarrow \quad & e = 5-d \\
d+f &= 13 & \longrightarrow \quad & f = 13-d \\
a+c+g &= 6. & &
\end{aligned}
$$

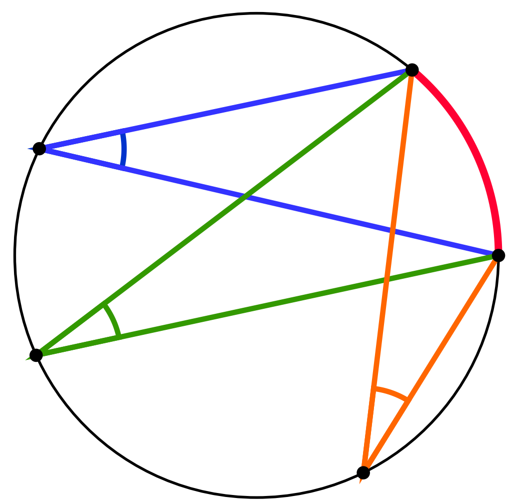
De modo que al reemplazar los valores de b, e, f y $a+c+g$ en la primera ecuación tenemos:

$$
\begin{aligned}
(a+c+g)+b+d+e+f &= 30, \\
6+(12-d)+d+(5-d)+(13-d) &= 30, \\
36-2d &= 30, \\
3 &= d,
\end{aligned}
$$

De ahí que, exactemente 3 estudiantes van pasando las tres materias.

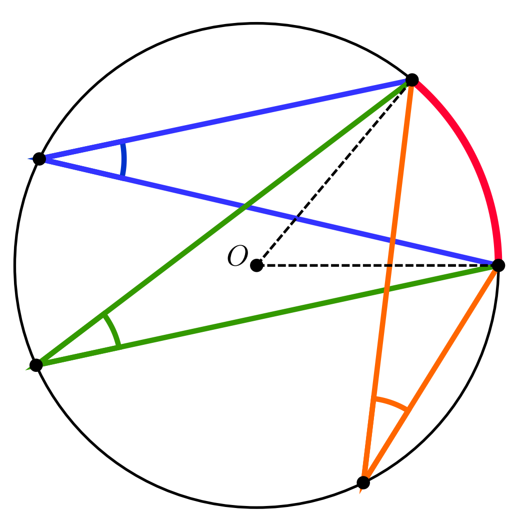
Problema 2.

Determine la suma de las medidas (en grados) de los ángulos marcados en la siguiente figura, sabiendo que la longitud del arco rojo, corresponde a $\frac{1}{9}$ de la longitud total de la circunferencia.



(a) 50 (b) 75 (c) 60 (d) 120

Solución: Considere la siguiente figura en la que O es el centro del círculo:



Dado que el arco rojo corresponde a $\dfrac{1}{9}$ de la longitud de la circunferencia, entonces el ángulo central O mide $\dfrac{360^\circ}{9} = 40^\circ$. Ahora, note que los otros tres ángulos subtienden el mismo arco y están inscritos en la circunferencia. Sabiendo que la medida de un ángulo central que subtiende el mismo arco de un ángulo inscrito, es el doble de la medida del ángulo inscrito; se tiene que cada uno de los tres ángulos marcados mide 20°, y por lo tanto la suma de las medidas de dichos ángulos es 60°.

Problema 3.

¿Cuál es la menor cantidad de números naturales que se deben escoger aleatoriamente para garantizar que la diferencia de dos de ellos sea múltiplo de 8?

(a) 10 (b) 9 (c) 8 (d) 7

Solución: Por el algoritmo de la división, tenemos que todo número entero al dividirse entre 8 *deja como residuo un número del conjunto* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. *Veamos que si dos números dejan el mismo residuo al dividirse entre* 8 *entonces su diferencia es múltiplo de* 8. *En efecto, sean* $a = 8q + r$ *y* $b = 8t + r$ *dos números que dejan el mismo residuo al dividirse entre* 8, *entonces*

$$a - b = 8q + r - (8t + r) = 8(q - t)$$

de ahí que $a - b$ *es múltiplo de* 8. *Con lo anterior, tenemos que si se escogen aleatoriamente* 9 *números enteros, al menos dos de ellos dejarán el mismo residuo al dividirse entre* 8 *y en tal caso su diferencia es múltiplo de* 8. *Note que con menos números no se puede garantizar que la diferencia de dos de ellos sea múltiplo de* 8, *tome por ejemplo los números* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *y compruebe que la diferencia de dos cualesquiera no es múltiplo de* 8. *Por lo tanto,* 9 *es la menor cantidad de números naturales que se deben escoger aleatoriamente para garantizar que la diferencia de dos de ellos sea múltiplo de* 8.