Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
X Olimpiadas Regionales de Matemáticas.
PRIMARIA.

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto a tu curiosidad y trae a juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios métodos, puedes experimentar la tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento"

-George Polya.

MARATÓN OLÍMPICA

SOLUCIONARIO DEL RETO 3.

NIVEL BÁSICO

PROBLEMA 1.

Se tienen tres reglas de color verde cuyas longitudes son de $4\,cm$, $7\,cm$ y $8\,cm$, y cuatro reglas de color rojo que miden $3\,cm$, $7\,cm$, $8\,cm$ y $15\,cm$. Con tres reglas se puede formar un triángulo si la suma de las longitudes de dos de ellas es mayor que la longitud de la tercera. ¿Cuál es el número de formas en que se pueden escoger tres de nuestras reglas para formar un triángulo isósceles?

Nota: *dos triángulos son distintos si tienen medidas distintas o tienen colores distintos.*

Solución: *Para los lados que son de la misma longitud de nuestro triángulo isósceles tenemos* 2 *opciones:*

- *Si son las reglas de* $8\,\text{cm}$, *el tercer lado puede ser cualquiera de las* 5 *reglas restantes (las de* $7\,\text{cm}$ *también pues son de diferente color), por lo que contamos* 5 *formas de escoger las* 3 *reglas.*
- *Si son las reglas de* $7\,\text{cm}$, *la tercera puede escogerse solo de* 4 *formas, ya que con la de* $15\,\text{cm}$ *no se formaría un triángulo. Añadimos* 4 *formas más de escoger las reglas.*

En total, pueden escogerse las tres reglas para formar un triángulo isósceles de 9 *formas diferentes.*

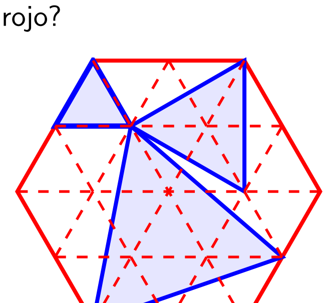
PROBLEMA 2. Canguro Matemático-Costa Rica 2020

http://www.cangurocr.org/examenes
Llamamos a un número de 3 dígitos *bonito*, si el dígito del centro es más grande que la suma del primer y último dígito. ¿Cuál es la mayor cantidad posible de números bonitos consecutivos de 3 dígitos?

Solución: *La mayor cantidad posible de números bonitos consecutivos de* 3 *dígitos es* 8 : *desde el* 190 *hasta* 197.

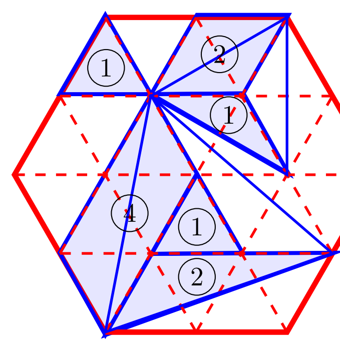
PROBLEMA 3.

En la siguiente figura se muestra un hexágono regular de color rojo, dividido en 24 triángulos equiláteros de igual tamaño. Si la región sombreada en azul tiene $33\,cm^2$ de área, ¿cuál es el área total, en centímetros cuadrados, del hexágono rojo?



Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

Solución: Completando triangulitos como se muestra en la siguiente figura, tenemos que la región azul equivale a 11 *triangulitos,*



Luego el área de cada uno de ellos es $\frac{33}{11} = 3\,cm^2$. *Por lo tanto el área del hexágono regular es* $3 \times 24 = 72\,cm^2$.

Nivel Medio

Problema 1.

Juan se dirige al banco para reclamar el bono de Jóvenes en Acción que da el gobierno. Al llegar ve a 9 personas esperando además de él, pero solo hay 4 asientos enumerados del 1 al 4. ¿De cuántas maneras pueden ocupar los cuatro asientos las personas que están esperando dentro del banco?

Solución: *En el asiento número 1 pueden sentarse 10 personas, pues consideramos a Juan; en el asiento número 2 pueden sentarse 9, pues tuvo que sentarse alguien en el número 1; en el asiento número 3 pueden sentarse 8 personas, y en el número 4 pueden sentarse 7. El total de formas en que pueden ir sentadas las personas que están esperando en el banco es $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.*

Problema 2. Canguro Matemático-Costa Rica 2016

http://www.cangurocr.org/examenes

Cada letra de la palabra **BENJAMIN** representa uno de los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ o 7. Letras distintas representan números distintos. El número **BENJAMIN** es impar y múltiplo de 3. ¿Cuál dígito corresponde a la N?

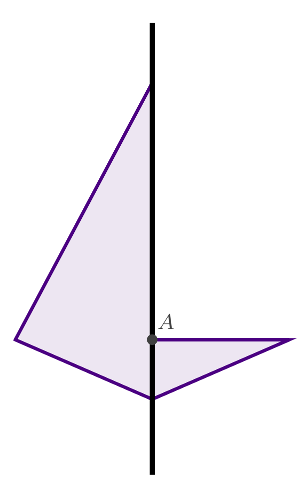
Solución: *Dado que el número debe ser impar entonces la cifra de las unidades N debe ser impar: 1, 3, 5 o 7. Además, como el número es múltiplo de 3, la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 3. Pero,*

- *si $N = 1$ la suma de las cifras es 29, que no es múltiplo de 3;*
- *si $N = 3$ la suma de las cifras es 31, que tampoco es múltiplo de 3;*
- *si $N = 5$ la suma de las cifras es 33, que sí es múltiplo de 3;*
- *si $N = 7$ la suma de las cifras es 35, que no es múltiplo de 3.*

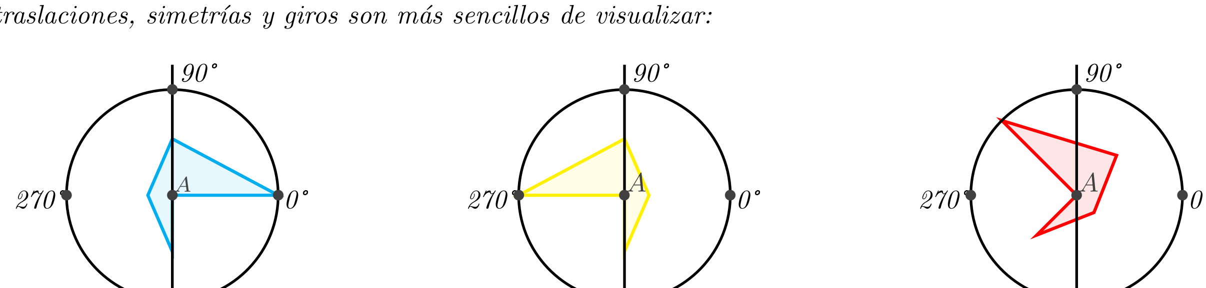
Por lo anterior el dígito que le corresponde a N es el 5.

Problema 3.

A la siguiente figura se le rota $270°$ alrededor del punto A en dirección opuesta a las manecillas del reloj, luego se refleja con respecto a la recta vertical, y por último se vuelve a rotar $45°$ alrededor del punto A en dirección de las manecillas del reloj. ¿Cuál es la figura resultante?



Solución: *Podemos construir un círculo y anotar los ángulos principales para utilizarlo como compás, de esta manera las traslaciones, simetrías y giros son más sencillos de visualizar:*



Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis
Scan me

Nivel Avanzado

Problema 1.

Brenda tiene 6 colores de pulseras: azul, blanco, fucsia, gris, negro y rojo. Quiere usar una pulsera distinta cada día, de lunes a sábado. Usa la pulsera roja uno o más días antes que la pulsera fucsia. ¿De cuántas maneras puede organizar el uso de las pulseras de lunes a sábado?

Solución 1: Consideremos los siguientes casos:

- *Brenda usa el lunes la pulsera roja, el martes tendría 5 opciones, el miércoles 4, el jueves 3, el viernes 2 y finalmente el sábado solo 1. Así, en este caso habrían $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneras.*
- *Si usa la pulsera roja el martes, el lunes tendría 4 opciones puesto que no puede usar la pulsera fucsia ni la roja, el miércoles tendría 4 opciones, las 3 que podía pero no usó el lunes y la fucsia, el jueves 3 opciones, el viernes 2 y el sábado 1. Según lo expuesto, en este caso habrían $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$ maneras.*
- *Si usa la pulsera roja el miércoles, el lunes tendría 4 opciones como en el caso anterior, el martes tendría 3 opciones puesto que no puede usar la que usó el lunes ni la fucsia ni la roja, el jueves tendría 3 opciones, las 2 que podía pero no usó el martes y la fucsia, el viernes 2 opciones y el sábado 1. En este caso habrían $4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 72$ maneras.*
- *Si usa la pulsera roja el jueves, el lunes tendría 4 opciones como en los casos anteriores, el martes tendría 3 opciones como en el caso inmediatamente anterior, el miércoles tendría 2 opciones, pues no puede usar ni la roja ni la fucsia, ni repetir las de los días anteriores, el viernes tendría 2 opciones y el sábado 1. Teniendo en cuenta los datos anteriores, en este caso habrían $4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 = 48$ maneras.*
- *Si usa la pulsera roja el viernes, como en los casos anteriores el lunes tendría 4 opciones, el martes 3, el miércoles 2, el jueves 1 que es la restante posible y el sábado solo 1, la pulsera fuscia. Habrían $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 24$ maneras.*

Finalmente, note que no se puede usar la pulsera roja el sábado puesto que no la usaría antes que la fucsia. En este orden de ideas, hay en total $120 + 96 + 72 + 48 + 24 = 360$ maneras en las que Brenda puede organizar el uso de sus pulseras.

Solución 2: Ignoremos que la pulsera roja debe usarse antes que la pulsera fucsia. El lunes hay 6 opciones para llevar la pulsera, el martes 5 pues Brenda no quiere repetir, el miércoles 4, el jueves 3, el viernes 2 y el sábado 1, en total $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ maneras.
Tomemos una forma cualquiera de llevar las pulseras en la semana, en esta, puede que Brenda lleve antes la pulsera roja que la fucsia, o antes la fucsia que la roja. Si consideramos además la forma de llevar las pulseras intercambiando el día de la roja con el de la fucsia y dejando el resto como están, podemos asegurar que en alguna de las dos formas la roja va antes que la fucsia, y en la otra forma la fucsia va antes que la roja, es decir, una le sirve a Brenda y la otra no. Para cada forma de llevar las pulseras a la semana existe otra forma única que es intercambiando el día de la roja con el de la fucsia, a la que llamaremos melliza, que como ya se dijo una nos sirve y la otra no. Del total de formas de llevarlas, 720, cada una tiene una melliza, luego hay 360 emparejamientos con las respectivas mellizas, y por cada emparejamiento una y solo una nos sirve, esto es que hay $720 \div 2 = 360$ maneras de llevar las pulseras de modo que se use la roja antes que la fucsia.

Problema 2. Canguro matemático 2017

https://ebinaria.com/index.php/competencias/concurso-canguro-matematico/
Kangu trata de ser un buen canguro, pero mentir es demasiado divertido. Por lo tanto, cada tercera cosa que dice es una mentira y el resto es verdad. A veces comienza con una mentira y a veces con una o dos afirmaciones verdaderas. Kangu está pensando en un número de dos dígitos, por lo que le dice a su amiga lo siguiente: "Uno de sus dígitos es 2". "Es mayor a 50". "Es un número par". "Es menor a 30". "Es divisible por tres". "Uno de sus dígitos es 7". ¿Cuál es el número que Kangu está pensando?

Solución: Note que la segunda y la cuarta afirmación se contradicen, por lo que una de ellas es mentira. Veamos cada caso.

Caso 1. *Si "Es mayor a 50" es falso, entonces*

Afirmación	*V/F*
1. “Uno de sus dígitos es 2*”.*	*Verdadero*
2. “Es mayor a 50*”.*	*Falso*
3. “Es un número par”.	*Verdadero*
4. “Es menor a 30*”*	*Verdadero*
5. “Es divisible por tres”.	*Falso*
6. “Uno de sus dígitos es 7*”.*	*Verdadero*

Por las afirmaciones 1*.* 4*. y* 6*. se deduce que el número es* 27*, pero el número NO puede ser divisible entre* 3*, entonces este caso no es posible. Además,* 27 *no es par (contradice la afirmación* 3*.)*

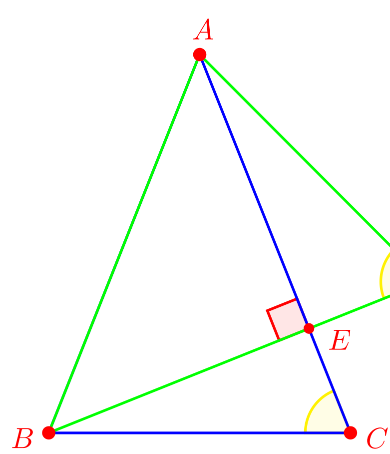
Caso 2. *Si “Es menor a* 30*”. es falso, entonces*

Afirmación	*V/F*
1. “Uno de sus dígitos es 2*”.*	*Falso*
2. “Es mayor a 50*”.*	*Verdadero*
3. “Es un número par”.	*Verdadero*
4. “Es menor a 30*”*	*Falso*
5. “Es divisible por tres”.	*Verdadero*
6. “Uno de sus dígitos es 7*”.*	*Verdadero*

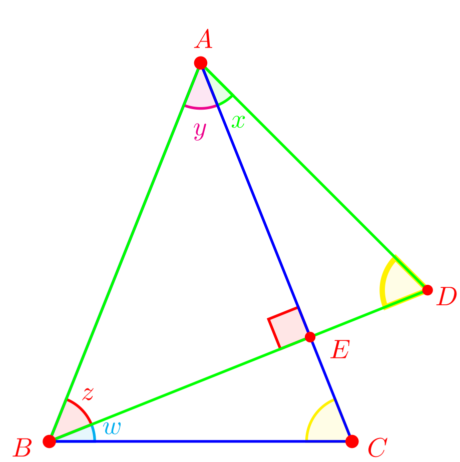
Por las afirmaciones 2*.* 3*. y* 6*. se deduce que la cifra de las decenas es el* 7*. Además, el número debe ser par, entonces termina en* $0, 2, 4, 6$ *u* 8*, pero no puede terminar en* 2*, porque la afirmación* 1*. es falsa, y por la afirmación* 5*. el número debe ser múltiplo de* 3*, entonces el número es el* 78*.*

PROBLEMA 3.

Los triángulos ABC y ABD son isósceles con $AB = AC = BD$, y $\overline{BD}$ interseca a $\overline{AC}$ en E. Si $\overline{BD}$ es perdendicular a $\overline{AC}$, ¿Cuál es el valor de $\measuredangle C + \measuredangle D$?



Solución: Considere la siguiente figura:



Note que $\measuredangle B = z + w = \measuredangle C$ *y* $\measuredangle A = x + y = \measuredangle D$*. Además,* $90^\circ + w + \measuredangle C = 90^\circ + x + \measuredangle D = 180^\circ$*. De ahí que*

$$\measuredangle C + \measuredangle D = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - x - w,$$
$$\measuredangle C + \measuredangle D = 180^\circ - (x + w).$$

Por otra parte, de los triángulos ABE, EBC y ADE tenemos, respectivamente, que

$$\begin{aligned} y + z &= 90^\circ, \\ z + 2w &= 90^\circ, \\ y + 2x &= 90^\circ, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $w + x = 45^\circ$, y por lo tanto $\measuredangle C + \measuredangle D = 135^\circ$.