PRIMER TALLER

ENCENDIENDO VELAS

¡Prepárate para vivir la matemática!

Dedekin y Peano juegan el siguiente juego: toman una cuadrícula de 8×8 y un paquete de fichas formadas por una cuadrícula de 2×2 quitándole un cuadradito (el de la esquina inferior derecha), las cuales llamaremos *ficha esquina*. Dedekin escogerá una casilla de la cuadrícula y Peano deberá cubrir el resto con fichas esquina. Debe tapar todas las casillas con las fichas, sin encimarlas.

1. Antes de comenzar el juego, respondamos algo: es posible tapizar la cuadrícul a completa de 8×8 con fichas esquina?

2. Ahora, sí, comienza el juego. Dedekin escoge una casilla de la cuadrícula. Será posible que sin importar qué casilla escoja Dedekin, Peano siempre logre tapizar el resto con las fichas esquina? Qué opinas del siguiente argumento: *Sí es posible, porque quedan* 63 *casillas en la cuadrícula y* 63 *es divisible entre* 3*?*

3. Probemos el mismo juego con una cuadrícula de 4×4. Podemos en este caso asegurar que quitando cualquiera de las casillas es posible tapizar el resto con fichas esquina? Qué pasa con una cuadrícula de 2×2?. Sin importar qué casilla quitemos, podemos tapizar el resto con una única ficha esquina. Puedes usar este hecho para el juego con la cuadrícula de 4×4? Puedes usar esto para la cuadrícula de 8×8?

4. Será posible tapizar una cuadrícula de 16×16 sin una casilla? Y una de 32×32 sin una casilla? Y de 64×64 sin una casilla,...? Se atreverían a afirmar que si toman una de $2^n \times 2^n$ y quitan una casilla, también es posible tapizar el resto con fichas esquina? Cómo demostrarían su afirmación?

Un método poderoso

Aún si logramos demostrar que podemos tapizar con fichas esquina una cuadrícula de 2×2, de 4×4, 8×8 e incluso de 16×16 a la que le falta una casilla, lo que hemos hecho hasta ahora son afirmaciones particulares para cuadrículas muy específicas. Cómo pasar de una afirmación particular sobre una cuadrícula a una afirmación general sobre todas las cuadrículas de tamaño $2^n \times 2^n$? Cómo dar este salto? Es cierto que si el conjunto sobre el cual deseamos hacer nuestra afirmación es lo suficientemente pequeño (como sería el caso del conjunto de cuadrículas de $2 \times 2, 4 \times 4, 8 \times 8$ y 16×16), tal vez podamos probarlo para cada uno de los casos particulares y después afirmar que se cumple en todos ellos. Pero no podemos hacer esto si nuestro conjunto es infinito (como sería el caso del conjunto de todos los tableros de $2^n \times 2^n$, con n un número natural). Ni siquiera podemos hacerlo cuando el conjunto es finito, pero demasiado grande. A fin de cuentas, podemos encontrar conjuntos finitos tan grandes como queramos!

Qué hacemos entonces? Necesitamos un *método de propagación* de nuestra afirmación particular. Es lo que hemos estado haciendo en el fondo al usar la afirmación sobre la cuadrícula de 2×2 para probar lo que ocurre en la de 4×4, y de la de 4×4, a la de 8×8. Pero aún así, seguimos haciendo afirmaciones muy particulares. Algo cambia cuando suponemos que podemos tapizar la cuadrícula de $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ sin una casilla y a partir de ese supuesto, ver cómo tapizar de $2^n \times 2^n$ sin una casilla. Ya no estamos hablando de la de 4×4 y 8×8, o de la de 8×8 y la de 16×16. Estamos hablando, sí, de las cuadrículas particulares de $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ y $2^n \times 2^n$, pero éstas se pueden referir a cualesquiera parejas 2×2 y 4×4, 4×4 y 8×8, y así sucesivamente. Preguntamos entonces si basta ver que si la afirmación es cierta para la de $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ garantiza que sea cierta para la de $2^n \times 2^n$. Qué será? No! No basta. Qué pasaría si no se hubiera podido cubrir la cuadrícula de 2×2.

Supongamos que recibimos a los asistentes a los círculos con una vela (porque hace frío). Además, imaginemos que llegan a una cantidad infinita de asistentes. Queremos asegurarnos de que todos los chicos enciendan su vela, pero contamos con un único encendedor en el cuarto, que es guardado celosamente por uno de los tutores. Si procedemos a encender velas de forma desordenada, seguramente encenderemos muchas velas, pero cómo asegurarnos, irrefutablemente, de que todos enciendan su vela? Aquí entra el *método de propagación*.

Es un método que se emplea par demostrar que una afirmación cuya formulación depende de números, es cierta para cualquier número natural. Los números naturales son el modelo perfecto de una fila infinita de alumnos, en la que hay un primer alumno y para cada uno de ellos, siempre hay uno siguiente en la fila.

Referencias

[1] Neve, C., Rosales, L., *Talleres de Círculos matemáticos*, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2019.

[2] Takene, Y., *Qué hacemos en matemática y los círculos matemáticos*, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2019.

Informes:
circulos.matematicos@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316.