

Las Torres de Hanói: Un Viaje Matemático

Círculos Matemáticos

Universidad Industrial de Santander

El Misterio del Templo Sagrado

- En un templo ancestral, monjes mueven **64 discos de oro**

El Misterio del Templo Sagrado

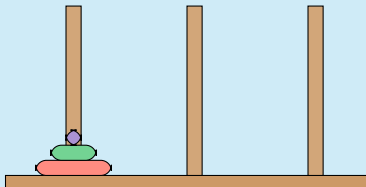
- En un templo ancestral, monjes mueven **64 discos de oro**
- Cada movimiento sigue reglas matemáticas perfectas

El Misterio del Templo Sagrado

- En un templo ancestral, monjes mueven **64 discos de oro**
- Cada movimiento sigue reglas matemáticas perfectas
- Al completar la tarea... ¡el universo revelará su secreto!

El Misterio del Templo Sagrado

- En un templo ancestral, monjes mueven **64 discos de oro**
- Cada movimiento sigue reglas matemáticas perfectas
- Al completar la tarea... ¡el universo revelará su secreto!



Las Tres Leyes Fundamentales

- ④ **Un disco a la vez**
La paciencia es virtud

Las Tres Leyes Fundamentales

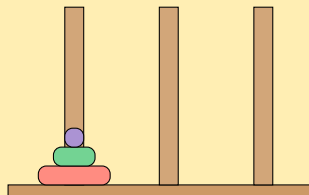
- 1 **Un disco a la vez**
La paciencia es virtud
- 2 **Nunca grande sobre pequeño**
El orden define la armonía

Las Tres Leyes Fundamentales

- 1 **Un disco a la vez**
La paciencia es virtud
- 2 **Nunca grande sobre pequeño**
El orden define la armonía
- 3 **Mover toda la torre**
Del inicio al destino final

Las Tres Leyes Fundamentales

- 1 **Un disco a la vez**
La paciencia es virtud
- 2 **Nunca grande sobre pequeño**
El orden define la armonía
- 3 **Mover toda la torre**
Del inicio al destino final



Desafío 1: Los Tres Discos Iniciales

Tu Misión

- Con **3 discos**, encuentra la solución óptima

La Verdad Revelada

Desafío 1: Los Tres Discos Iniciales

Tu Misión

- Con **3 discos**, encuentra la solución óptima
- Cuenta cada movimiento cuidadosamente

La Verdad Revelada

Desafío 1: Los Tres Discos Iniciales

Tu Misión

- Con **3 discos**, encuentra la solución óptima
- Cuenta cada movimiento cuidadosamente
- **Tiempo: 4 minutos**

La Verdad Revelada

Desafío 1: Los Tres Discos Iniciales

Tu Misión

- Con **3 discos**, encuentra la solución óptima
- Cuenta cada movimiento cuidadosamente
- Tiempo: 4 minutos

La Verdad Revelada

$M(3) = 7$ movimientos exactos

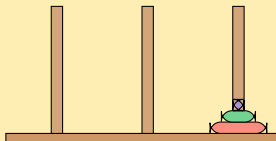
Desafío 1: Los Tres Discos Iniciales

Tu Misión

- Con **3 discos**, encuentra la solución óptima
- Cuenta cada movimiento cuidadosamente
- **Tiempo: 4 minutos**

La Verdad Revelada

$M(3) = 7$ movimientos exactos



Pensar en Círculos que se Expanden

Resolver un problema usando soluciones de versiones más simples del mismo problema.

La Magia de la Autoreferencia

Pensar en Círculos que se Expanden

Resolver un problema usando soluciones de versiones más simples del mismo problema.

La Magia de la Autoreferencia

$$S(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ n + S(n-1) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Pensar en Círculos que se Expanden

Resolver un problema usando soluciones de versiones más simples del mismo problema.

La Magia de la Autoreferencia

$$S(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ n + S(n-1) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- $S(4) = 4 + S(3) = 4 + 3 + S(2) = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$

Patrones Numéricos: Aritmética vs Geométrica

Secuencia Aritmética

- Suma constante

Secuencia Geométrica

- Multiplicación constante

Patrones Numéricos: Aritmética vs Geométrica

Secuencia Aritmética

- Suma constante
- 3, 7, 11, 15, ...

Secuencia Geométrica

- Multiplicación constante
- 2, 4, 8, 16, ...

Patrones Numéricos: Aritmética vs Geométrica

Secuencia Aritmética

- Suma constante
- 3, 7, 11, 15, ...
- $d = 4$

Secuencia Geométrica

- Multiplicación constante
- 2, 4, 8, 16, ...
- $r = 2$

Patrones Numéricos: Aritmética vs Geométrica

Secuencia Aritmética

- Suma constante
- 3, 7, 11, 15, ...
- $d = 4$
- $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4$

Secuencia Geométrica

- Multiplicación constante
- 2, 4, 8, 16, ...
- $r = 2$
- $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$

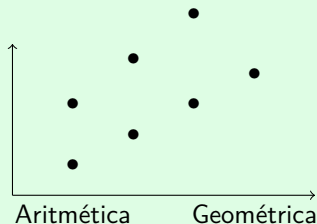
Patrones Numéricos: Aritmética vs Geométrica

Secuencia Aritmética

- Suma constante
- 3, 7, 11, 15, ...
- $d = 4$
- $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4$

Secuencia Geométrica

- Multiplicación constante
- 2, 4, 8, 16, ...
- $r = 2$
- $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$



Caza del Patrón: Completa la Tabla

Sigue las Pistas Recursivas

Discos (n)	Movimientos M(n)
1	1
2	3
3	7
4	
5	
6	
7	
8	

Caza del Patrón: Completa la Tabla

Sigue las Pistas Recursivas

Discos (n)	Movimientos M(n)
1	1
2	3
3	7
4	?
5	
6	
7	
8	

Caza del Patrón: Completa la Tabla

Sigue las Pistas Recursivas

Discos (n)	Movimientos M(n)
1	1
2	3
3	7
4	?
5	?
6	
7	
8	

Caza del Patrón: Completa la Tabla

Sigue las Pistas Recursivas

Discos (n)	Movimientos M(n)
1	1
2	3
3	7
4	?
5	?
6	?
7	
8	

Caza del Patrón: Completa la Tabla

Sigue las Pistas Recursivas

Discos (n)	Movimientos M(n)
1	1
2	3
3	7
4	?
5	?
6	?
7	?
8	

Caza del Patrón: Completa la Tabla

Sigue las Pistas Recursivas

Discos (n)	Movimientos M(n)
1	1
2	3
3	7
4	?
5	?
6	?
7	?
8	?

Caza del Patrón: Completa la Tabla

Sigue las Pistas Recursivas

Discos (n)	Movimientos M(n)
1	1
2	3
3	7
4	?
5	?
6	?
7	?
8	?

Descifra el código en 6 minutos

Caza del Patrón: Completa la Tabla

Sigue las Pistas Recursivas

Discos (n)	Movimientos M(n)
1	1
2	3
3	7
4	?
5	?
6	?
7	?
8	?

Descifra el código en 6 minutos



Cálculo Paso a Paso

$$M(1) = 1$$

Cálculo Paso a Paso

$$M(1) = 1$$

$$M(2) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

Cálculo Paso a Paso

$$M(1) = 1$$

$$M(2) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$M(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$$

Cálculo Paso a Paso

$$M(1) = 1$$

$$M(2) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$M(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$M(4) = 2 \times 7 + 1 = 15$$

Cálculo Paso a Paso

$$M(1) = 1$$

$$M(2) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$M(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$M(4) = 2 \times 7 + 1 = 15$$

$$M(5) = 2 \times 15 + 1 = 31$$

Cálculo Paso a Paso

$$M(1) = 1$$

$$M(2) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$M(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$M(4) = 2 \times 7 + 1 = 15$$

$$M(5) = 2 \times 15 + 1 = 31$$

$$M(6) = 2 \times 31 + 1 = 63$$

Cálculo Paso a Paso

$$M(1) = 1$$

$$M(2) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$M(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$M(4) = 2 \times 7 + 1 = 15$$

$$M(5) = 2 \times 15 + 1 = 31$$

$$M(6) = 2 \times 31 + 1 = 63$$

$$M(7) = 2 \times 63 + 1 = 127$$

Cálculo Paso a Paso

$$M(1) = 1$$

$$M(2) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$M(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$M(4) = 2 \times 7 + 1 = 15$$

$$M(5) = 2 \times 15 + 1 = 31$$

$$M(6) = 2 \times 31 + 1 = 63$$

$$M(7) = 2 \times 63 + 1 = 127$$

$$M(8) = 2 \times 127 + 1 = 255$$

¡Eureka! El Patrón Descubierto

n	M(n)	Patrón Oculto
1	1	
2	3	
3	7	
4	15	
5	31	
6	63	
7	127	
8	255	

¡Fórmula Maestra Revelada!

¡Eureka! El Patrón Descubierto

n	M(n)	Patrón Oculto
1	1	$2^1 - 1$
2	3	
3	7	
4	15	
5	31	
6	63	
7	127	
8	255	

¡Fórmula Maestra Revelada!

¡Eureka! El Patrón Descubierto

n	M(n)	Patrón Oculto
1	1	$2^1 - 1$
2	3	$2^2 - 1$
3	7	
4	15	
5	31	
6	63	
7	127	
8	255	

¡Fórmula Maestra Revelada!

¡Eureka! El Patrón Descubierto

n	M(n)	Patrón Oculto
1	1	$2^1 - 1$
2	3	$2^2 - 1$
3	7	$2^3 - 1$
4	15	
5	31	
6	63	
7	127	
8	255	

¡Fórmula Maestra Revelada!

¡Eureka! El Patrón Descubierto

n	M(n)	Patrón Oculto
1	1	$2^1 - 1$
2	3	$2^2 - 1$
3	7	$2^3 - 1$
4	15	$2^4 - 1$
5	31	
6	63	
7	127	
8	255	

¡Fórmula Maestra Revelada!

¡Eureka! El Patrón Descubierto

n	M(n)	Patrón Oculto
1	1	$2^1 - 1$
2	3	$2^2 - 1$
3	7	$2^3 - 1$
4	15	$2^4 - 1$
5	31	$2^5 - 1$
6	63	
7	127	
8	255	

¡Fórmula Maestra Revelada!

¡Eureka! El Patrón Descubierto

n	M(n)	Patrón Oculto
1	1	$2^1 - 1$
2	3	$2^2 - 1$
3	7	$2^3 - 1$
4	15	$2^4 - 1$
5	31	$2^5 - 1$
6	63	$2^6 - 1$
7	127	
8	255	

¡Fórmula Maestra Revelada!

¡Eureka! El Patrón Descubierto

n	M(n)	Patrón Oculto
1	1	$2^1 - 1$
2	3	$2^2 - 1$
3	7	$2^3 - 1$
4	15	$2^4 - 1$
5	31	$2^5 - 1$
6	63	$2^6 - 1$
7	127	$2^7 - 1$
8	255	

¡Fórmula Maestra Revelada!

¡Eureka! El Patrón Descubierto

n	M(n)	Patrón Oculto
1	1	$2^1 - 1$
2	3	$2^2 - 1$
3	7	$2^3 - 1$
4	15	$2^4 - 1$
5	31	$2^5 - 1$
6	63	$2^6 - 1$
7	127	$2^7 - 1$
8	255	$2^8 - 1$

¡Fórmula Maestra Revelada!

¡Eureka! El Patrón Descubierto

n	M(n)	Patrón Oculto
1	1	$2^1 - 1$
2	3	$2^2 - 1$
3	7	$2^3 - 1$
4	15	$2^4 - 1$
5	31	$2^5 - 1$
6	63	$2^6 - 1$
7	127	$2^7 - 1$
8	255	$2^8 - 1$

¡Fórmula Maestra Revelada!

$$M(n) = 2^n - 1$$

1 Relación recursiva

1 Relación recursiva

$$M(n) = 2 \cdot M(n - 1) + 1$$

① Relación recursiva

$$M(n) = 2 \cdot M(n - 1) + 1$$

② ¿Aritmética?

1 Relación recursiva

$$M(n) = 2 \cdot M(n-1) + 1$$

2 ¿Aritmética?

No: 2, 4, 8, 16... diferencias cambian

❶ Relación recursiva

$$M(n) = 2 \cdot M(n-1) + 1$$

❷ ¿Aritmética?

No: 2, 4, 8, 16... diferencias cambian

❸ ¿Geométrica?

❶ Relación recursiva

$$M(n) = 2 \cdot M(n-1) + 1$$

❷ ¿Aritmética?

No: 2, 4, 8, 16... diferencias cambian

❸ ¿Geométrica?

No: 3, 2.33, 2.14... razones cambian

1 Relación recursiva

$$M(n) = 2 \cdot M(n-1) + 1$$

2 ¿Aritmética?

No: 2, 4, 8, 16... diferencias cambian

3 ¿Geométrica?

No: 3, 2.33, 2.14... razones cambian

4 Fórmula recursiva

1 Relación recursiva

$$M(n) = 2 \cdot M(n-1) + 1$$

2 ¿Aritmética?

No: 2, 4, 8, 16... diferencias cambian

3 ¿Geométrica?

No: 3, 2.33, 2.14... razones cambian

4 Fórmula recursiva

$$M(n) = 2 \cdot M(n-1) + 1$$

1 Relación recursiva

$$M(n) = 2 \cdot M(n-1) + 1$$

2 ¿Aritmética?

No: 2, 4, 8, 16... diferencias cambian

3 ¿Geométrica?

No: 3, 2.33, 2.14... razones cambian

4 Fórmula recursiva

$$M(n) = 2 \cdot M(n-1) + 1$$

5 Fórmula cerrada

1 Relación recursiva

$$M(n) = 2 \cdot M(n-1) + 1$$

2 ¿Aritmética?

No: 2, 4, 8, 16... diferencias cambian

3 ¿Geométrica?

No: 3, 2.33, 2.14... razones cambian

4 Fórmula recursiva

$$M(n) = 2 \cdot M(n-1) + 1$$

5 Fórmula cerrada

$$M(n) = 2^n - 1$$

De Recursivo a Cerrado

$$M(n) = 2 \cdot M(n - 1) + 1$$

Verificación Experimental

De Recursivo a Cerrado

$$\begin{aligned}M(n) &= 2 \cdot M(n-1) + 1 \\ &= 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1\end{aligned}$$

Verificación Experimental

De Recursivo a Cerrado

$$\begin{aligned}M(n) &= 2 \cdot M(n-1) + 1 \\&= 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 \\&= 2^n - 2 + 1\end{aligned}$$

Verificación Experimental

De Recursivo a Cerrado

$$\begin{aligned}M(n) &= 2 \cdot M(n-1) + 1 \\&= 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 \\&= 2^n - 2 + 1 \\&= 2^n - 1\end{aligned}$$

Verificación Experimental

Demostración: La Prueba Definitiva

De Recursivo a Cerrado

$$\begin{aligned}M(n) &= 2 \cdot M(n-1) + 1 \\&= 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 \\&= 2^n - 2 + 1 \\&= 2^n - 1\end{aligned}$$

Verificación Experimental

$$M(3) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7 \quad \checkmark$$

De Recursivo a Cerrado

$$\begin{aligned}M(n) &= 2 \cdot M(n-1) + 1 \\&= 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 \\&= 2^n - 2 + 1 \\&= 2^n - 1\end{aligned}$$

Verificación Experimental

$$M(3) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7 \quad \checkmark$$

$$M(5) = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31 \quad \checkmark$$

Demostración: La Prueba Definitiva

De Recursivo a Cerrado

$$\begin{aligned}M(n) &= 2 \cdot M(n-1) + 1 \\&= 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 \\&= 2^n - 2 + 1 \\&= 2^n - 1\end{aligned}$$

Verificación Experimental

$$M(3) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7 \quad \checkmark$$

$$M(5) = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31 \quad \checkmark$$

$$M(8) = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255 \quad \checkmark$$

$$M(64) = 2^{64} - 1$$

El Número de la Leyenda

La Revelación Temporal

$$M(64) = 2^{64} - 1$$

El Número de la Leyenda

18,446,744,073,709,551,615

La Revelación Temporal

$$M(64) = 2^{64} - 1$$

El Número de la Leyenda

18,446,744,073,709,551,615

La Revelación Temporal

- 1 movimiento por segundo

$$M(64) = 2^{64} - 1$$

El Número de la Leyenda

18,446,744,073,709,551,615

La Revelación Temporal

- 1 movimiento por segundo
- 584 mil millones de años

$$M(64) = 2^{64} - 1$$

El Número de la Leyenda

18,446,744,073,709,551,615

La Revelación Temporal

- 1 movimiento por segundo
- 584 mil millones de años
- Edad del universo: 13.8 mil millones

$$M(64) = 2^{64} - 1$$

El Número de la Leyenda

18,446,744,073,709,551,615

La Revelación Temporal

- 1 movimiento por segundo
- 584 mil millones de años
- Edad del universo: 13.8 mil millones
- ¡42 edades del cosmos!

Habilidades Desarrolladas

- Pensamiento recursivo

Fórmulas Dominadas

Conquistas Matemáticas

Habilidades Desarrolladas

- Pensamiento recursivo
- Identificación de patrones

Fórmulas Dominadas

Conquistas Matemáticas

Habilidades Desarrolladas

- Pensamiento recursivo
- Identificación de patrones
- Demostración matemática

Fórmulas Dominadas

Conquistas Matemáticas

Habilidades Desarrolladas

- Pensamiento recursivo
- Identificación de patrones
- Demostración matemática
- Análisis de secuencias

Fórmulas Dominadas

Habilidades Desarrolladas

- Pensamiento recursivo
- Identificación de patrones
- Demostración matemática
- Análisis de secuencias

Fórmulas Dominadas

- $M(n) = 2 \cdot M(n - 1) + 1$

Habilidades Desarrolladas

- Pensamiento recursivo
- Identificación de patrones
- Demostración matemática
- Análisis de secuencias

Fórmulas Dominadas

- $M(n) = 2 \cdot M(n - 1) + 1$
- $M(n) = 2^n - 1$

Habilidades Desarrolladas

- Pensamiento recursivo
- Identificación de patrones
- Demostración matemática
- Análisis de secuencias

Fórmulas Dominadas

- $M(n) = 2 \cdot M(n-1) + 1$
- $M(n) = 2^n - 1$

¡Hemos descifrado el enigma matemático!

¡Misión Matemática Cumplida!

El secreto de las Torres ha sido revelado

¿Preguntas sobre nuestro descubrimiento?