UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMATICAS
CIRCULOS MATEMATICOS-2023
Edilberto J. Reyes G

Part I

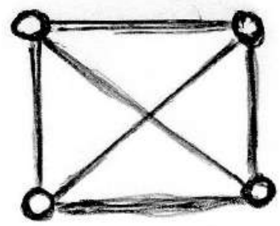
CONTANDO VERTICES, ARISTAS Y CARAS

1 Tres rompecabezas

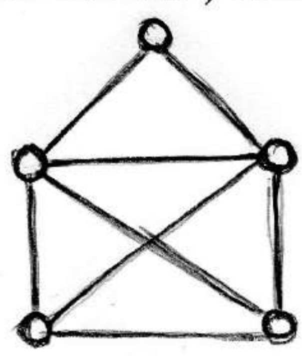
Los tres siguientes problemas de Ingenio llamados tambien rompecabezas o acertijos son muy populares, especialmente el primero

1.1 Problema 1 - Problema de los sobres.

¿Es posible recorrer continuamente (dibujar de forma continua) cada una de las siguientes figuras sin pasar dos veces por la misma linea?



sobre cerrado.



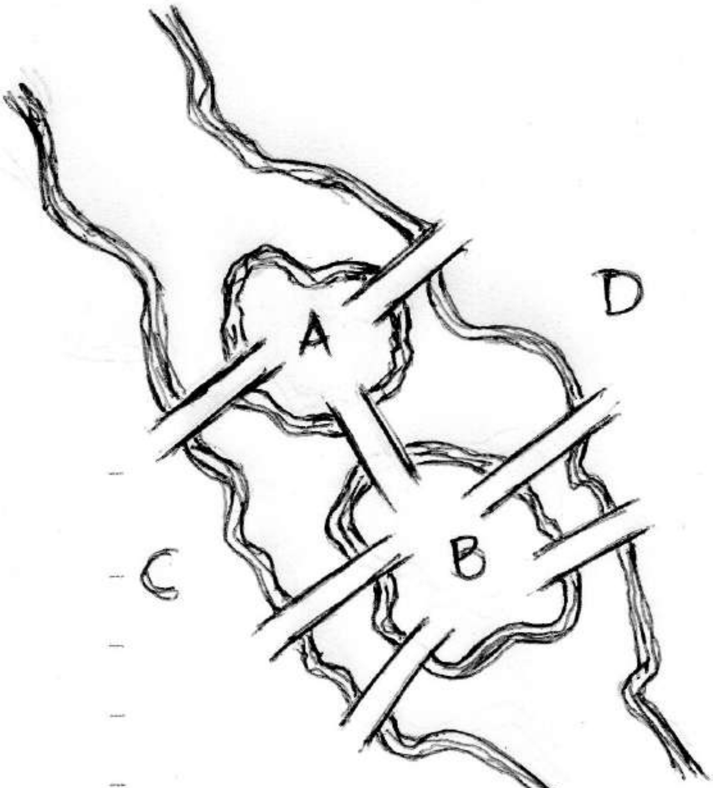
Sobre abierto.

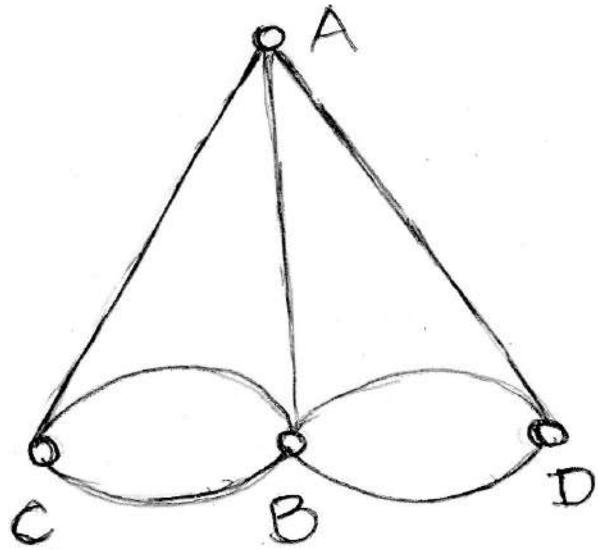
1.2 Problema 2 - Problema de los siete puentes de Königsberg

La ciudad de Königsberg en Prusia oriental (hoy Kaliningrado) esta situada a las dos orillas del rio Pregel y comprende ademas las dos islas que forma el rio en su cause comunicandose todo entre si por siete puentes como se aprecia en la siguiente figura

La natural afición de los habitantes de Königsberg de pasear por su ciudad dio origen al problema que fue resuelto completamente por Leonhard Euler y que se puede plantear asi:

¿Es posible salir de cualquier punto de la ciudad (casa) y regresar nuevamente despues de recorrer cada puente una y solamente una vez?





Leonhard Euler resolvio el problema propuesto utilizando el "grafo" de la figura anterior, que es una representación de la ciudad y sus islas (puntos-vértices A , B , C , D) , asi como de sus puentes (arcos o aristas del grafo) . Con esta representación el problema se puede plantear asi:

¿Es posible dibujar continuamente (recorrer continuamente) el grafo de los siete puentes de Königsberg saliendo de un vertice y regresando al mismo sin pasar dos veces por por la misma arista (el mismo arco- la misma linea) ?

1.3 Problema 3 - Problema de los vecinos caprichosos

Tambien conocido como **" el problema de los servicios"** puede ser planteado asi:

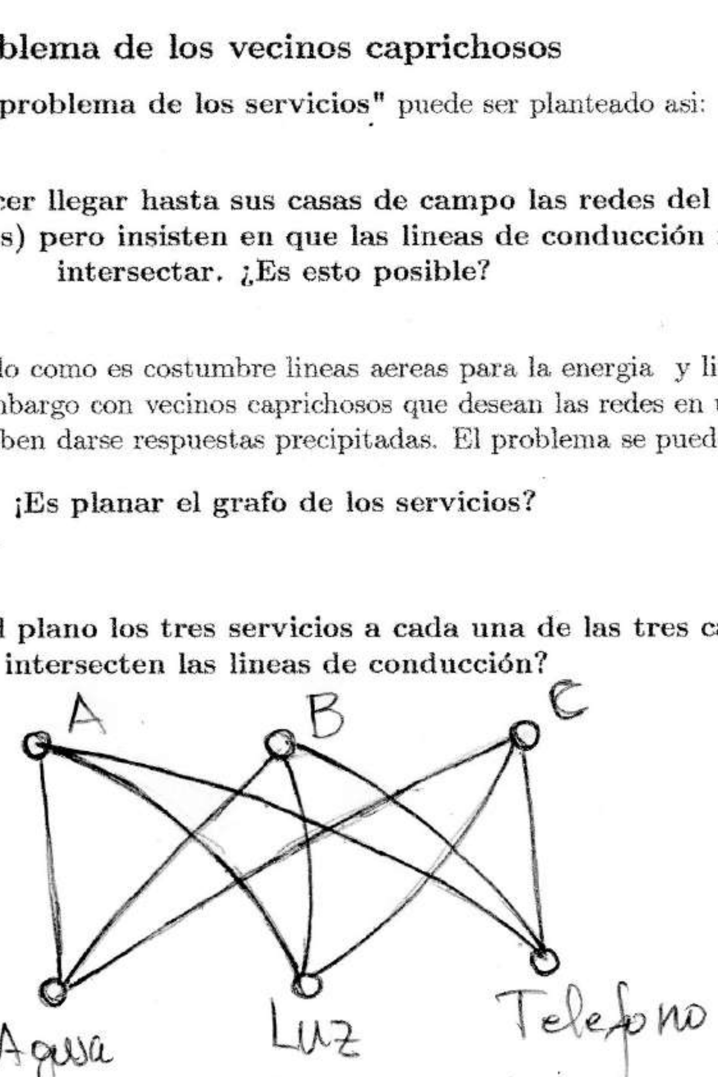
Tres vecinos desean hacer llegar hasta sus casas de campo las redes del agua , luz y telefono (tres servicios) pero insisten en que las lineas de conducción no se deben intersectar. ¿Es esto posible?

Naturalmente que si, usando como es costumbre lineas aereas para la energia y lineas subterraneas para los otros servicios. Sin embargo con vecinos caprichosos que desean las redes en un mismo plano y sin que se intersecten , NO deben darse respuestas precipitadas. El problema se puede plantear asi:

¡Es planar el grafo de los servicios?

es decir

¿Es posible conectar en el plano los tres servicios a cada una de las tres casas sin que se intersecten las lineas de conducción?



Fácilmente se observa que el problema del sobre abierto tiene solucion mientras que el del sobre cerrado, el segundo y tercer problema en todos los intentos de resolverlos la respuesta es negativa lo que hace pensar que la respuesta correcta en estos tres casos es que NO SE PUEDE. Como demostrarlo?

Probablemente la mejor idea no es intentar resolverlos haciendo nuevos dibujos de la misma forma que en los primeros intentos, de pronto es mejor revisar nuevamente los problemas en si y ver que cosas no hemos observado de los mismos. En el problema de los siete puentes de Königsberg no importa la longitud de los puentes ni el tamaño de las islas ni el del rio, el problema se puede plantear mediante el grafo de la figura anterior asi

¿Es posible recorrer completamente el grafo de los siete puentes de Königsberg saliendo de un vertice y regresando al mismo recorriendo todas las aristas una y solo una vez?

Euler demostró que el recorrido propuesto no es posible usando el grafo de la figura anterior. Para que el paseo fuese posible en cada vértice deberian incidir un número par de aristas (puentes). De cada par una llegar y la otra para salir.

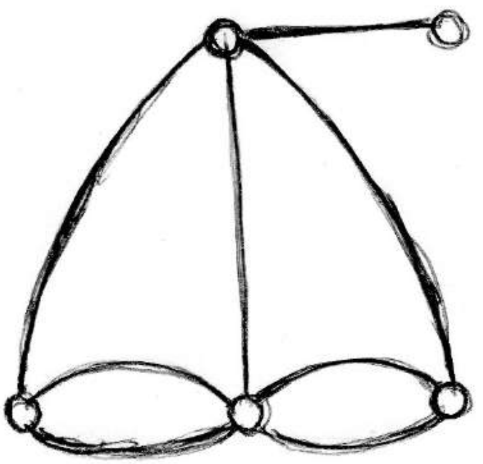
Ademàs, si en el grafo hay solamente dos vértices en los que incide un número impar de aristas el paseo propuesto (recorrer ca puente una sola vez) es posible saliendo de uno de estos vértices y llegando al otro.

Como en la figura anterior a cada vértice llega un número impar de aristas el recorrido no es posible en ninguna de las dos formas descritas.

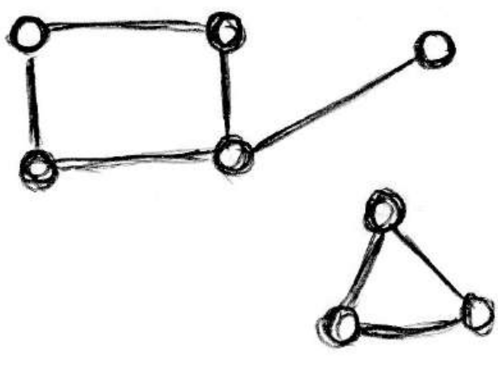
De la misma forma en el problema de los servicios no importa el tamaño de las casas, ni la distancia y la posicion entre ellas, ni donde estan situados las fuentes de los tres servicios. El problema se reduce a conectar tres puntos del plano que representan los servicios con otros tres puntos del plano que representan las casas sin que se corten las lineas de conduccion.

En los dos últimos problemas en últimas tenemos un conjunto finito de puntos que llamos **vértices** y un conjunto finito de curvas que llamamos **aristas** que unen entre si algunos vértices. En tal caso decimos simplemente que tenemos un grafo.

Podemos imaginar un grafo como una pareja $G = (V, A)$ donde V es un conjunto (finito) no vacio de puntos del plano (o del espacio) llamados **vertices** y A es una colecciòn de segmentos (curvas - arcos-**aristas**) dirigidos ó no que unen todas o algunas parejas de vértices



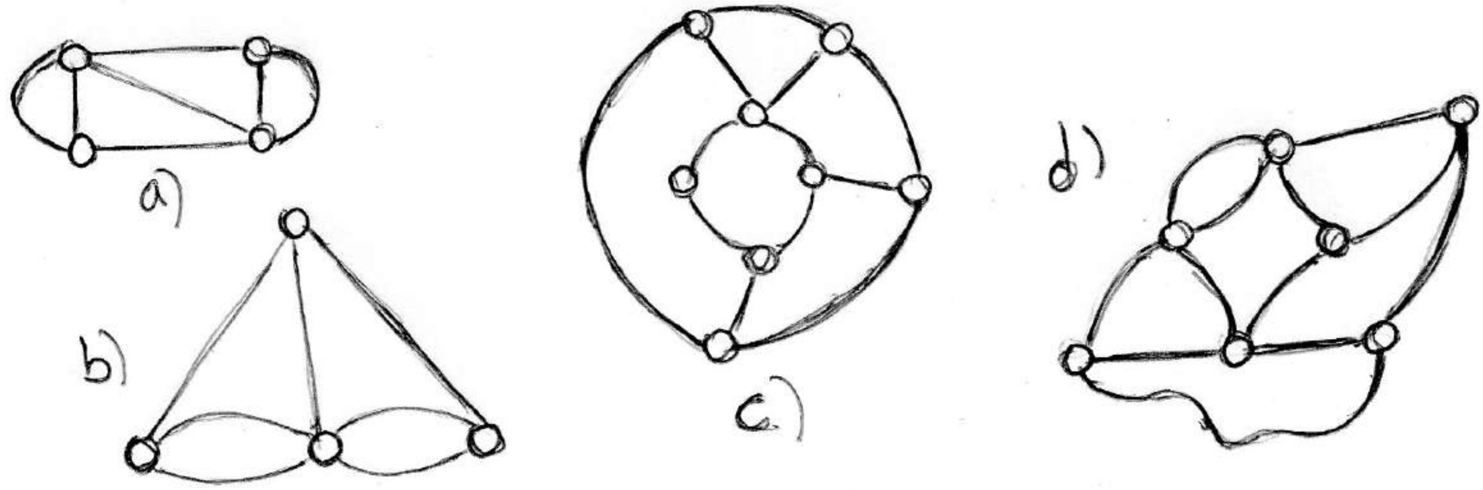
Conexo



No-conexo

En un grafo dados dos vèrtices no siempre se pueden unir -conectar por una sucesion de aristas, cuando se puede se dice que el grafo es **conexo.** Intuitivamente significa que el grafo es de una sola pieza.

Si $G = (V, A)$ es un grafo finito conexo decimos simplemente que es un **mapa.** Claramente un mapa en el plano lo divide en un numero finito de regiones que llamamos **caras** del grafo.



Si V representa el nùmero de vertices, C el nùmero de caras y A el nùmero de aristas de cada uno de los mapas de la figura anterior tenemos que:

	V	C	A
$a)$	4	4	7
$b)$	4	4	7
$c)$	8	5	12
$d)$	7	6	12

En todos los caos tenemos que:

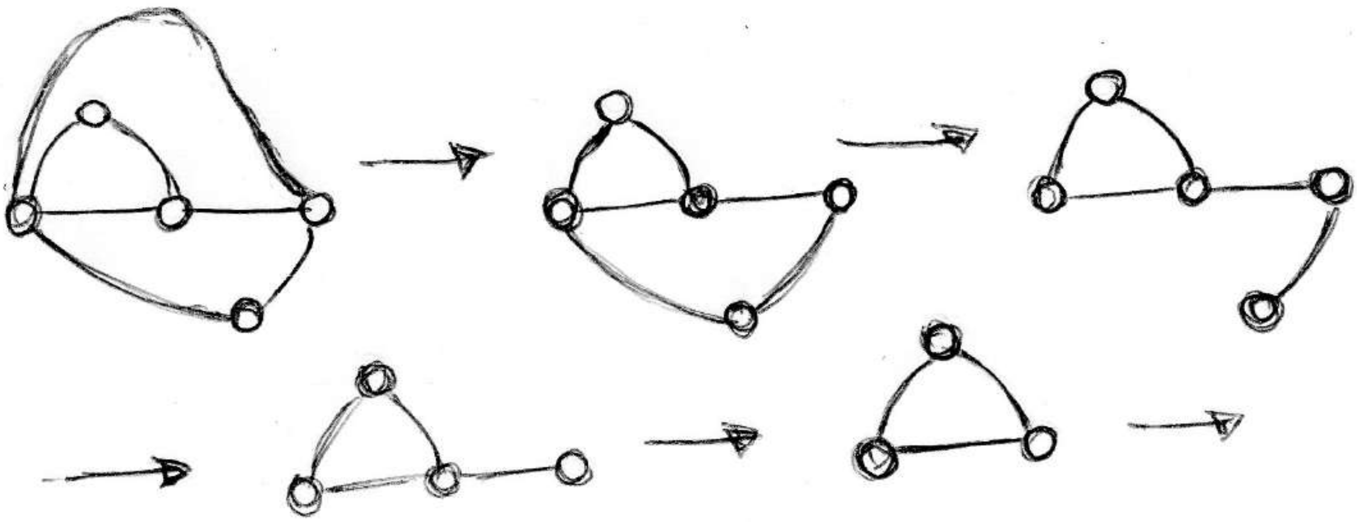
1. $A < V + C$, $\max\{V, C\} \leq A$
2. $V - A + C = 1$ -sin contar la cara exterior.
3. $V - A + C = 2$ -contando la cara exterior

Finalmente tambien se observa que:

Teorema Para todo mapa en el plano la exprecion $V - A + C$ permanece invariante (no cambia) si:

1. V y A aumentan ò disminuyen en 1
2. A y C aumentan ò disminuyen en 1

Con este último resultado podemos imaginar un mapa cualesquiera en el plano rodeado por el mar que representa la cara exterior y que por los efectos de las olas , la eroción y el cambio climático el mapa se va reduciendo sucesivamente porque V y A disminuyen en 1 , o porque A y C disminuyen en 1 hasta que nos queda un mapa en el que podemos hallar $V - A + C$ (en todos los casos podemos llegar hasta que nos quede solamnte un vértice) que ha permanecido invariante durante todo el proceso. Finalmente como se observa en la siguiente figura obtenemos que:



TEOREMA DE EULER.

Para todo mapa (grafo finito conexo) en el plano se tiene que $V - A + C = 1$ sin contar la cara exterior o que $V - A + C = 2$ contando la cara exterior

Ahora es facil demostrar que:

COROLARIOS

1. Para todo mapa (grafo finito conexo) sobre la esfera se tiene que $V - A + C = 2$
2. Para todo poliedro regular convexo $V - A + C = 2$
3. El grafo de los servicios NO es planar.
4. Existen solamente CINCO poliedros regulares convexos

Teorema. El grafo de los servicios NO es planar

Si el grafo de los servicios fuese planar, tendriamos que $V = 6$, $A = 9$ y por lo tanto $C = A - V + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ contando la cara exterior. Claramente toda cara de un mapa tiene por lo menos tres aristas y para el grafo de los servicios cada cara tiene 4 o 6 (verifiquelo), por lo tanto tenemos las siguientes posibilidades para las aristas de las cinco caras

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
4	4	4	4	4
4	4	4	4	6
4	4	4	6	6
4	4	6	6	6
4	6	6	6	6
6	6	6	6	6

Finalmente como cada arista es común a dos caras, la suma de las aristas de alguna fila de la tabla anterior debe ser el doble de el nùmero de aristas del grafo es decir 18. Veamos, en las seis filas de la tabla anterior obtenemos respectivamente 20, 22, 24, 26, 28 , 30 y NO 18. Por lo tanto, El grafo de los servicios NO es planar.

-

Teorema. Exisen solamente cinco poliedros regulares convexos

-

Sea P un poliedro regular convexo con C caras, V vertices y A aristas. Si cada cara tiene n aristas (lados) , entonces $n \geq 3$ y $nC = 2A$ ya que cada arista es compartida por dos caras. Si a cada vertice concurren (llegan) m aristas, entonces $m \geq 3$ y $mV = 2A$ ya que cada arista une dos vertices. Como P satisface la formula de Euler $V - A + C = 2$ y por lo tanto $mnV - mnA + mnC = 2mn$ y expresando esto en funciòn de A, obtenemos que

$$2mn = 2nA - mnA + 2mA = A(2n + 2m - mn)$$

Finalmente puesto que m, n y A son positivos obtenemos que $2n + 2m - mn > 0$ de donde $(n-2)(m-2) < 4$ que nos permite construir la siguiente tabla:

-

m	n	V	C	A	*Caras*	*Nombre*
3	3	4	4	6	triangulos	Tetraedro
3	4	8	6	12	cuadrados	Exaedro (cubo)
3	5	20	12	30	pentagonos	Dodecaedro
4	3	6	8	12	triangulos	Octaedro
5	3	12	20	30	triangulos	Icosaedro

GRACIAS