LA OPTIMIZACIÓN EN LA MATEMÁTICA

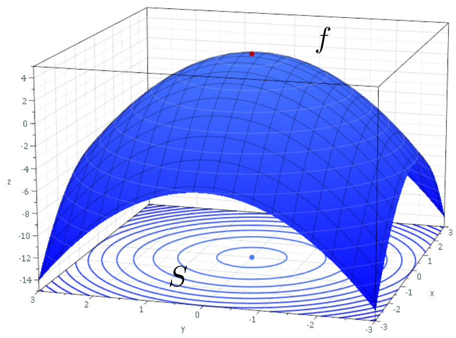
Optimizar es seleccionar el mejor elemento, con respecto a algún criterio, de un conjunto de elementos disponibles. En su versión matemática más simple, un problema de optimización consiste en maximizar o minimizar una función, eligiendo sistemáticamente valores de entrada, tomados de un conjunto permitido, y computando el valor de la función.

En lenguaje matemático,

$$\min_{x\in S} f(x), \qquad \max_{x\in S} f(x), \tag{P}$$

donde f puede ser una función lineal o no-lineal, conocida como función objetivo. S se conoce como el conjunto factible.

Un poco de historia. Pierre de Fermat y Joseph Louis Lagrange encontraron fórmulas basadas en el cálculo para identificar valores óptimos, mientras que Isaac Newton y Carl Friedrich Gauss propusieron métodos iterativos para aproximar el óptimo. Cuando la función f es lineal y el conjunto S es un poliedro, el problema se conoce como *un problema de programación lineal*; se debe a George B. Dantzig (1947), aunque gran parte de la teoría había sido introducida por Leonid Kantorovich en 1939. John von Neumann desarrolló la teoría de la dualidad en paralelo, en 1947.



Sobre las técnicas matemáticas para resolver (P), los científicos han usado la siguiente propiedad.

Propiedad 0.1. *Para el problema (P), si S es un conjunto convexo y el conjunto de datos f, que nos dan se pueden pintar y tienen la forma de una montaña, entonces el punto más alto o más bajo de la montaña, resuelve el problema (como en la Figura arriba).*

Programa Círculos Matemáticos
Fomentado por la Escuela de Matemática
3 de marzo de 2023.

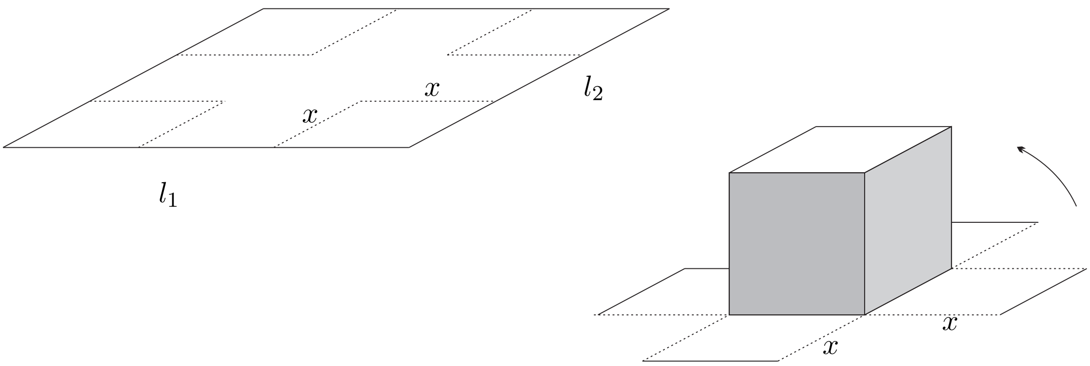
Escuela de Matemáticas
Ciudad Universitaria, Carrera 27 – Calle 9, Edificio Camilo Torres. Oficina 201
PBX: (097) 634 40 00 Ext. 2307 – 2308 – 2316, Fax: (097) 645 03 01
E-mail: matjef@uis.edu.co
Bucaramanga, Colombia

En lo que sigue, vamos a desarrollar una serie de actividades, para redescubrir por qué tiene sentido la propiedad (0.1).

Primera actividad.

Supongamos que tenemos una hoja de papel rectangular y queremos construir, a partir de ella, una caja de papel. Para eso, recortamos la misma cantidad en las 4 esquinas de la hoja de papel. Luego armamos hacia arriba como se indica en la figura.

Pregunta. ¿Cuánto cree que deba recortarse para obtener la caja con el máximo volúmen posible?



Sigamos los siguientes pasos.

1. Armar equipos de tres personas.
2. Cada equipo tiene tres hojas de papel rectangular, tijeras, regla y pegamento. Tienen entonces tres intentos para crear tres cajas.
3. Por equipos, reportar el volumen respectivo de cada una de las cajas, y el valor x que recortaron en cada caja.
4. ¿Qué valores tiene permitido x? Es decir, ¿cuáles son los valores más grande y más pequeño, que puedo recortar?

Discusión en grupo.

- ¿Cuál fue la caja con el mayor volúmen y cuánto se recortó para esa caja?
- ¿Habrá un valor "especial" de x que me origina una caja con el mayor volúmen posible?
- ¿Qué pasará si hacemos una caja cuadrada? ¿Cómo conseguir una caja cuadrada a partir de una hoja rectangular?

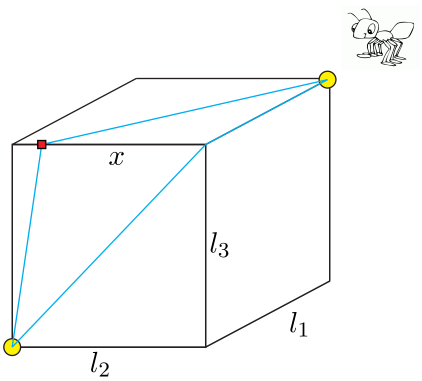
El volumen de la caja se puede escribir en términos de x: $V(x) = x(l_1 - 2x)(l_2 - 2x)$. Por lo tanto, el problema se puede escribir como: $\max_{x\in\left[0,\frac{l_1}{2}\right]} V(x)$. Según la propiedad, basta encontrar un punto factible x donde la V tenga un máximo.

Escuela de Matemáticas
Ciudad Universitaria, Carrera 27 – Calle 9, Edificio Camilo Torres. Oficina 201
PBX: (097) 634 40 00 Ext. 2307 – 2308 – 2316, Fax: (097) 645 03 01
E-mail: matjef@uis.edu.co
Bucaramanga, Colombia

Segunda actividad.

Supongamos que tenemos una caja rectangular y en una de las esquinas hay una hormiga. La hormiga quiere moverse, a través de la caja, a la otra esquina en diagonal.

Pregunta. ¿Puede ayudar a encontrar la ruta más corta (mínima) que debe recorrer la hormiga?



Sigamos los siguientes pasos.

1. Cada equipo tiene ya unas cajas armadas. Trazar 4 rutas distintas en cada caja y medirlas.
2. ¿Tienen alguna conjetura, sobre si hay una ruta mejor que otra?
3. Si x es la medida del punto que aparece en rojo, medido desde la esquina de la caja. ¿Qué valores tiene permitido x?

Discusión en grupo.

- Cada equipo construya una caja cúbica a partir de una hoja en blanco. ¿Cuál es la menor distancia que pudieron encontrar?
- ¿Cuánto vale x en esa distancia mínima?
- ¿Habrá un valor "especial" de x que me origina una ruta óptima?

Según el Teorema de Pitágoras, la distancia se puede escribir en términos de x:

$$d(x) = \sqrt{l_1^2 + x^2} + \sqrt{l_3^2 + (l_2 - x)^2}$$

Por lo tanto, el problema se puede escribir como

$$\min_{x \in [0, l_2]} d(x).$$

Según la propiedad, basta encontrar un punto factible x donde la d tenga un mínimo.

Artículos necesarios para la actividad.

- 1 Tijeras.
- 1 Regla.
- 1 tarro pequeño de pegamento (colbón).
- 1 cinta pegante transparente.
- 5 hojas de papel tamaño A4.
- 1 lapiz (o lapicero).

Bibliografía

[1] J. D. V. Caicedo, A. V. Montoya, and A. C. V. Caicedo. *Neuróbicos: los caminos del razonamiento*. Universidad Nacional de Colombia, Rectoría, 2016.

[2] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*, volume 18. Princeton university press, 1970.

[3] J. Stewart, D. K. Clegg, and S. Watson. *Calculus: early transcendentals*. Cengage Learning, 2020.

Escuela de Matemáticas
Ciudad Universitaria, Carrera 27 – Calle 9, Edificio Camilo Torres. Oficina 201
PBX: (097) 634 40 00 Ext. 2307 – 2308 – 2316, Fax: (097) 645 03 01
E-mail: matjef@uis.edu.co
Bucaramanga, Colombia