Resolución de Problemas & Grafos

Alexander Holguín Villa [1]
aholguin@uis.edu.co

Escuela de Matemáticas UIS

Proyecto de Extensión: Círculos Matemáticos [2]

Mayo 31, 2023

[1] **ALCOM** - http://matematicas.uis.edu.co/alcom

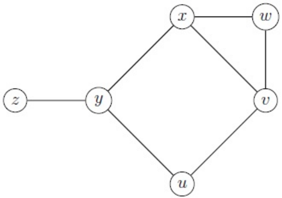
[2] circulos.matematicos@uis.edu.co; 6344000 ext. 2316

$G = (V, E)$ donde

- $V = \{z, y, u, v, x, w\}$: vértices,
- $E = \{e_1 = zy, \cdots, e_7 = vw\}$: aristas.

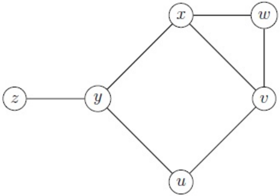
$G = (V, E)$ donde

- $V = \{z, y, u, v, x, w\}$: vértices,
- $E = \{e_1 = zy, \cdots, e_7 = vw\}$: aristas.



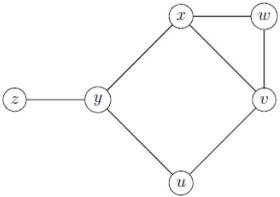
$G = (V, E)$ donde

- $V = \{z, y, u, v, x, w\}$: vértices,
- $E = \{e_1 = zy, \cdots, e_7 = vw\}$: aristas.
- $E \ni e = wv$ "e connecta" $w, v \in V$.



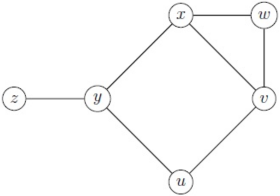
$G = (V, E)$ donde

- $V = \{z, y, u, v, x, w\}$: vértices,
- $E = \{e_1 = zy, \cdots, e_7 = vw\}$: aristas.
- $E \ni e = wv$ "e connecta" $w, v \in V$.
- $deg(u), deg(w)$ es 2,



$G = (V, E)$ donde

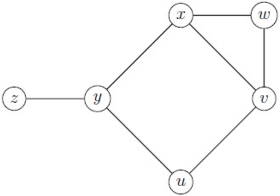
- $V = \{z, y, u, v, x, w\}$: vértices,
- $E = \{e_1 = zy, \cdots, e_7 = vw\}$: aristas.



- $E \ni e = wv$ "e connecta" $w, v \in V$.
- $deg(u), deg(w)$ es 2,
- $deg(z) = 1$
- $deg(v), deg(x), deg(y)$ es 3.

$G = (V, E)$ donde

- $V = \{z, y, u, v, x, w\}$: vértices,
- $E = \{e_1 = zy, \cdots, e_7 = vw\}$: aristas.



- $E \ni e = wv$ "e connecta" $w, v \in V$.
- $deg(u), deg(w)$ es 2,
- $deg(z) = 1$
- $deg(v), deg(x), deg(y)$ es 3.

Resultados

Lema (Lema apretón de manos)

En cualquier grafo simple la suma de los grados de los vértices es igual al doble del número de aristas en el grafo, es decir,

$$\sum_{v\in V} deg(v) = 2|E|, \quad deg(v) \quad \text{grado del vértice} \quad v.$$

Resultados

Lema (Lema apretón de manos)

En cualquier grafo simple la suma de los grados de los vértices es igual al doble del número de aristas en el grafo, es decir,

$$\sum_{v\in V} deg(v) = 2|E|, \quad deg(v) \quad \text{grado del vértice} \quad v.$$

Teorema (Fórmula de Euler)

Si G es un grafo planar conexo con n vértices, m aristas y f caras, entonces

$$n - m + f = 2.$$

Problemas Clásicos

1. **(Problema del testamento)** Hubo una vez un rey que tenía cinco hijos. En su testamento el rey estableció que después de su muerte sus hijos deberían dividir el reino en cinco regiones de manera tal que cada región tuviese una frontera común con cada una de las otras cuatro regiones.

Problemas Clásicos

1. **(Problema del testamento)** Hubo una vez un rey que tenía cinco hijos. En su testamento el rey estableció que después de su muerte sus hijos deberían dividir el reino en cinco regiones de manera tal que cada región tuviese una frontera común con cada una de las otras cuatro regiones.

2. **(Problema del traslado en el Zoológico)** Algunos animales de un zoológico deben ser trasladados y es necesario saber el número mínimo de jaulas necesarias para el traslado, teniendo en cuenta que hay animales que no pueden estar juntos de acuerdo a las siguientes restricciones:

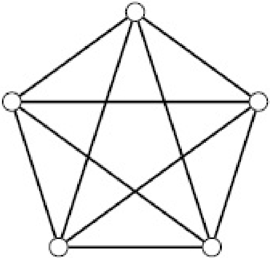
Problemas Clásicos

1. **(Problema del testamento)** Hubo una vez un rey que tenía cinco hijos. En su testamento el rey estableció que después de su muerte sus hijos deberían dividir el reino en cinco regiones de manera tal que cada región tuviese una frontera común con cada una de las otras cuatro regiones.

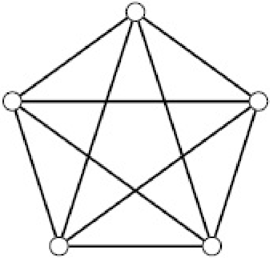
2. **(Problema del traslado en el Zoológico)** Algunos animales de un zoológico deben ser trasladados y es necesario saber el número mínimo de jaulas necesarias para el traslado, teniendo en cuenta que hay animales que no pueden estar juntos de acuerdo a las siguientes restricciones:(1) El cocodrilo no puede estar junto al ciervo, al antílope, al mono y al elefante. (2) El hipopótamo no puede estar con el ciervo, elefante ni jirafa. (3) La cebra no puede estar con el rinoceronte, el antílope ni el cocodrilo. (4) La jirafa no puede estar con el mono y (5) el oso no puede estar junto al ciervo, al rinoceronte ni al cocodrilo.

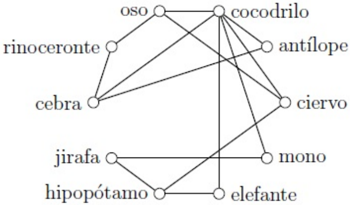
¿Cómo los representamos?

¿Cómo los representamos?



¿Cómo los representamos?





Problema # 1

Problema (Tomado de Gleason, Greenwood, y Kelly (1980))

Problema # 1

Problema (Tomado de Gleason, Greenwood, y Kelly (1980))

Establecer que en **toda reunión** de 6 personas siempre habrá 3 personas que se **conocen entre sí** o 3 **que no se conocen**.

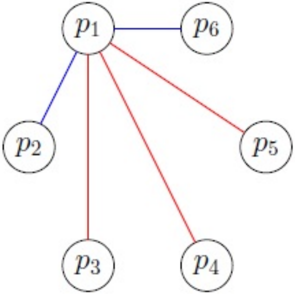
Solución

Problema # 1

Problema (Tomado de Gleason, Greenwood, y Kelly (1980))

Establecer que en **toda reunión** de 6 personas siempre habrá 3 personas que se **conocen entre sí** o 3 **que no se conocen**.

Solución



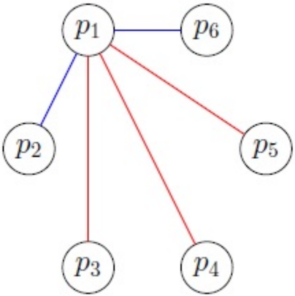
Problema # 1

Problema (Tomado de Gleason, Greenwood, y Kelly (1980))

Establecer que en **toda reunión** de 6 personas siempre habrá 3 personas que se **conocen entre sí** o 3 **que no se conocen**.

Solución

G con $V = \{p_1, p_2, \cdots, p_6\}$ y en E **azul** (conocen) o **roja** (no):

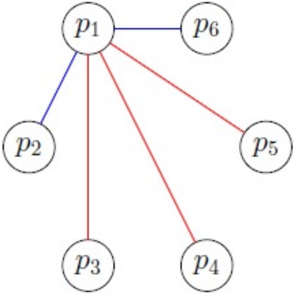


Problema # 1

Problema (Tomado de Gleason, Greenwood, y Kelly (1980))

Establecer que en **toda reunión** de 6 personas siempre habrá 3 personas que se **conocen entre sí** o 3 **que no se conocen**.

Solución



G con $V = \{p_1, p_2, \cdots, p_6\}$ y en E **azul** (conocen) o **roja** (no):

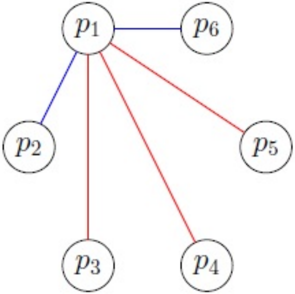
- p_1 conoce a al menos 3 o no-conoce a al menos 3.

Problema # 1

Problema (Tomado de Gleason, Greenwood, y Kelly (1980))

Establecer que en **toda reunión** de 6 personas siempre habrá 3 personas que se **conocen entre sí** o 3 **que no se conocen**.

Solución



G con $V = \{p_1, p_2, \cdots, p_6\}$ y en E **azul** (conocen) o **roja** (no):

- p_1 conoce a al menos 3 o no-conoce a al menos 3.

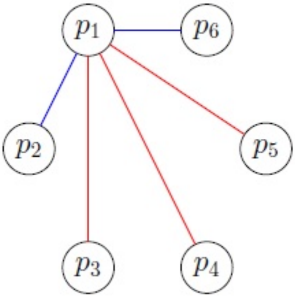
  • Supongamos que p_1 no-conoce a al menos 3

Problema # 1

Problema (**Tomado de Gleason, Greenwood, y Kelly (1980)**)

Establecer que en **toda reunión** de 6 personas siempre habrá 3 personas que se **conocen entre sí** o 3 **que no se conocen**.

Solución



G con $V = \{p_1, p_2, \cdots, p_6\}$ y en E **azul** (conocen) o **roja** (no):

- p_1 conoce a al menos 3 o no-conoce a al menos 3.

  • Supongamos que p_1 no-conoce a al menos 3

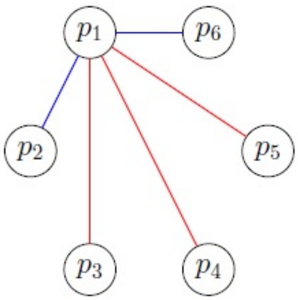
- **C1**: p_3, p_4 y p_5 se conocen entre sí $\cdots$, **O.K**.

Problema # 1

Problema (Tomado de Gleason, Greenwood, y Kelly (1980))

Establecer que en **toda reunión** de 6 personas siempre habrá 3 personas que se **conocen entre sí** o 3 **que no se conocen**.

Solución



G con $V = \{p_1, p_2, \cdots, p_6\}$ y en E **azul** (conocen) o **roja** (no):

- p_1 conoce a al menos 3 o no-conoce a al menos 3.

  • Supongamos que p_1 no-conoce a al menos 3

- **C1**: p_3, p_4 y p_5 se conocen entre sí $\cdots$, **O.K**.

- **C2**: Existen dos entre p_3, p_4 y p_5 que no se **conocen**, $\cdots$, **O.K**.

Problema # 2

Problema (**Tomado de IMO (2008)**)

Problema # 2

Problema (Tomado de IMO (2008))

Una reunión de 7 personas tiene la curiosa particularidad que para cada 3 de ellos existe un cuarto asistente que es familiar de los 3. Probar que **existe un familiar** de cada uno de los asistentes.

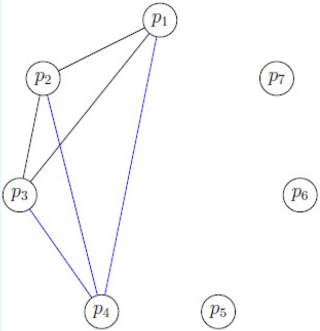
Solución

Problema # 2

Problema (Tomado de IMO (2008))

Una reunión de 7 personas tiene la curiosa particularidad que para cada 3 de ellos existe un cuarto asistente que es familiar de los 3. Probar que **existe un familiar** de cada uno de los asistentes.

Solución

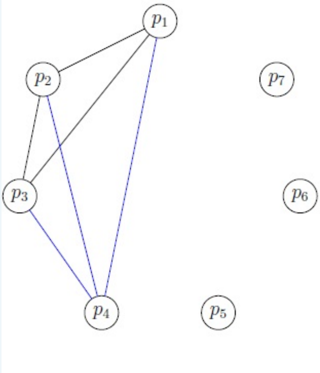


Problema # 2

Problema (**Tomado de IMO (2008)**)

Una reunión de 7 personas tiene la curiosa particularidad que para cada 3 de ellos existe un cuarto asistente que es familiar de los 3. Probar que **existe un familiar** de cada uno de los asistentes.

Solución



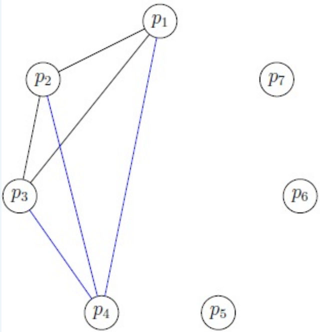
Considere el grafo G con $V = \{p_i\}_{i=1}^{7}$ y donde p_ip_j representa que p_i y p_j **son familiares**. Fijemos las personas p_1, p_2 y p_3.

Problema # 2

Problema (Tomado de IMO (2008))

Una reunión de 7 personas tiene la curiosa particularidad que para cada 3 de ellos existe un cuarto asistente que es familiar de los 3. Probar que **existe un familiar** de cada uno de los asistentes.

Solución



Considere el grafo G con $V = \{p_i\}_{i=1}^{7}$ y donde p_ip_j representa que p_i y p_j **son familiares**. Fijemos las personas p_1, p_2 y p_3.

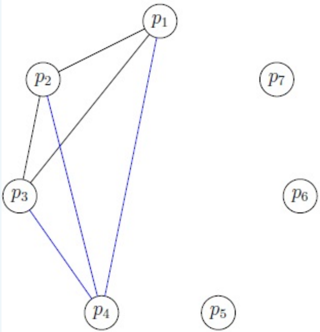
C1: p_1, p_2 y p_3 **familiares entre sí**:

Problema # 2

Problema (Tomado de IMO (2008))

Una reunión de 7 personas tiene la curiosa particularidad que para cada 3 de ellos existe un cuarto asistente que es familiar de los 3. Probar que **existe un familiar** de cada uno de los asistentes.

Solución



Considere el grafo G con $V = \{p_i\}_{i=1}^{7}$ y donde p_ip_j representa que p_i y p_j **son familiares**. Fijemos las personas p_1, p_2 y p_3.

C1: p_1, p_2 y p_3 **familiares entre sí**:

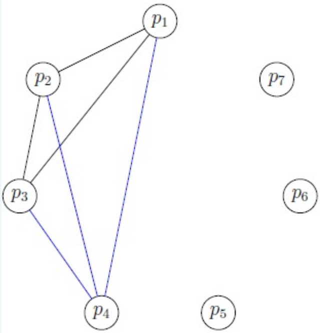
- Entonces existe, digamos p_4, que es familiar de p_1, p_2 y p_3, ver **figura al lado**.

Problema # 2

Problema (Tomado de IMO (2008))

Una reunión de 7 personas tiene la curiosa particularidad que para cada 3 de ellos existe un cuarto asistente que es familiar de los 3. Probar que **existe un familiar** de cada uno de los asistentes.

Solución



Considere el grafo G con $V = \{p_i\}_{i=1}^{7}$ y donde $p_i p_j$ representa que p_i y p_j **son familiares**. Fijemos las personas p_1, p_2 y p_3.

C1: p_1, p_2 y p_3 **familiares entre sí**:

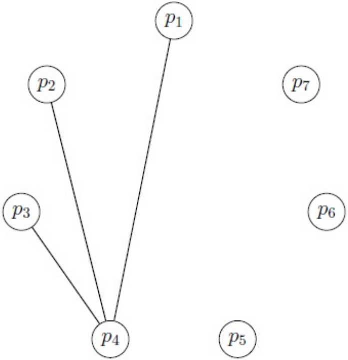
- Entonces existe, digamos p_4, que es familiar de p_1, p_2 y p_3, ver **figura al lado**.
- Para p_5, p_6 y p_7, una de $p_1, \cdots, p_4$ es familiar de ellos $\cdots$ **O.K**.

Continuación

Solución

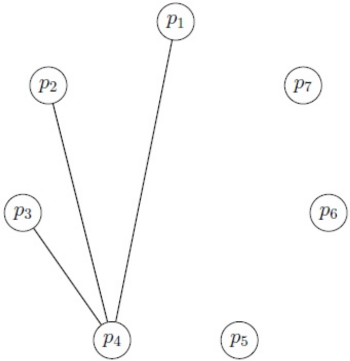
Continuación

Solución



Continuación

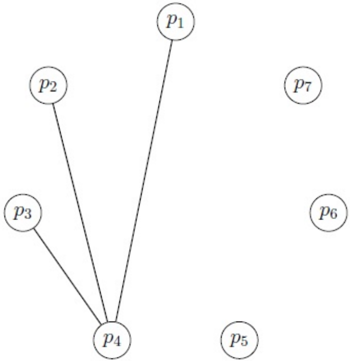
Solución



C2: p_1, p_2 y p_3 **no-familiares entre sí** y que p_4 es familiar de todos ellos, ver **figura al lado**.

Continuación

Solución

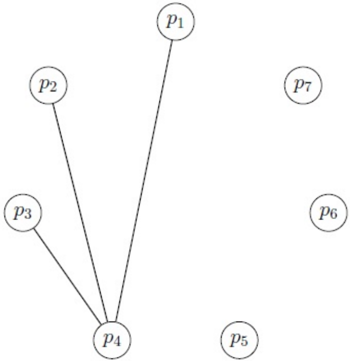


C2: p_1, p_2 y p_3 **no-familiares entre sí** y que p_4 es familiar de todos ellos, ver **figura al lado**.

- Considere el grupo p_2, p_3 y p_4.

Continuación

Solución

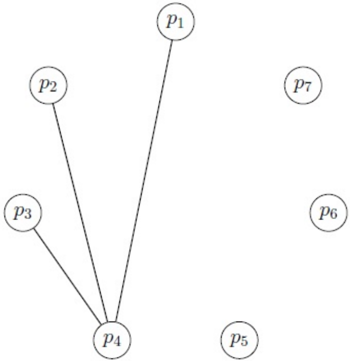


C2: p_1, p_2 y p_3 **no-familiares entre sí** y que p_4 es familiar de todos ellos, ver **figura al lado**.

- Considere el grupo p_2, p_3 y p_4.
- Luego entre p_5, p_6 y p_7, una es familiar de p_2, p_3 y p_4, por ejemplo p_5.

Continuación

Solución

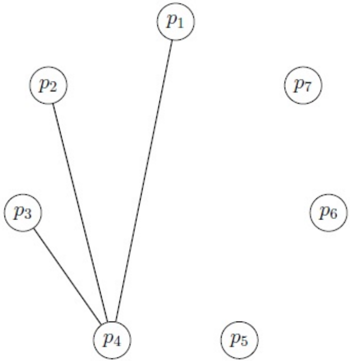


C2: p_1, p_2 y p_3 **no-familiares entre sí** y que p_4 es familiar de todos ellos, ver **figura al lado**.

- Considere el grupo p_2, p_3 y p_4.
- Luego entre p_5, p_6 y p_7, una es familiar de p_2, p_3 y p_4, por ejemplo p_5.
- Así, p_3, p_4 y p_5 **son familiares** y del caso **C1** $\cdots$ **O.K**.

Continuación

Solución



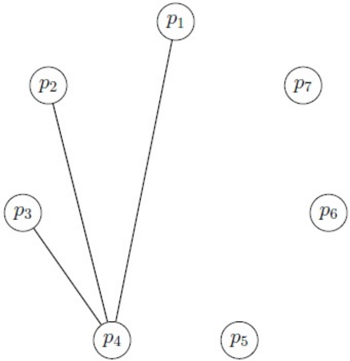
C2: p_1, p_2 y p_3 **no-familiares entre sí** y que p_4 es familiar de todos ellos, ver **figura al lado**.

- Considere el grupo p_2, p_3 y p_4.
- Luego entre p_5, p_6 y p_7, una es familiar de p_2, p_3 y p_4, por ejemplo p_5.
- Así, p_3, p_4 y p_5 **son familiares** y del caso **C1** $\cdots$ **O.K**.

  C3: Supongamos que existe al menos un par de personas (entre las posibles) que son **familiares**, digamos p_2 y p_3

Continuación

Solución



C2: p_1, p_2 y p_3 **no-familiares entre sí** y que p_4 es familiar de todos ellos, ver **figura al lado**.

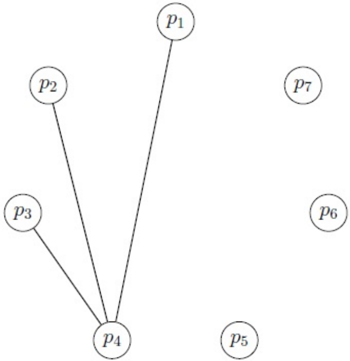
- Considere el grupo p_2, p_3 y p_4.
- Luego entre p_5, p_6 y p_7, una es familiar de p_2, p_3 y p_4, por ejemplo p_5.
- Así, p_3, p_4 y p_5 **son familiares** y del caso **C1** $\cdots$ **O.K**.

C3: Supongamos que existe al menos un par de personas (entre las posibles) que son **familiares**, digamos p_2 y p_3

- Luego, existe un familiar común, digamos p_4, a ellas.

Continuación

Solución



C2: p_1, p_2 y p_3 **no-familiares entre sí** y que p_4 es familiar de todos ellos, ver **figura al lado**.

- Considere el grupo p_2, p_3 y p_4.
- Luego entre p_5, p_6 y p_7, una es familiar de p_2, p_3 y p_4, por ejemplo p_5.
- Así, p_3, p_4 y p_5 **son familiares** y del caso **C1** $\cdots$ **O.K**.

C3: Supongamos que existe al menos un par de personas (entre las posibles) que son **familiares**, digamos p_2 y p_3

- Luego, existe un familiar común, digamos p_4, a ellas.
- Aplicamos el caso **C3** p_2 y p_3 y p_4.

Problema # 3

Problema

Cinco amigos salen de vacaciones al mismo tiempo y a diferentes lugares. Deciden que al llegar a su destino cada uno de ellos enviará una postal a tres de los restantes. ¿Es posible que cada amigo reciba postales de precisamente los tres amigos a los que él envió las suyas?

Solución

Consideremos el grafo G con conjunto de vértices $V = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, donde a_i representa i-ésimo amigoy,

$a_i a_j$ representa que el a_i envió postal al a_j (vice-versa) .

Del Lema de apretón de manos,

$$\sum_{i=1}^{5} deg(a_i) = 3+3+3+3+3 = 15 = 2|E|,$$ **que es imposible** .