Simetrías y coloraciones

Arnoldo Teherán Herrera

Escuela de matemáticas
Universidad Industrial de Santander

Círculos Matemáticos

Abril 2025

Simetrías

Simetrías

Hermann Weyl: "*La simetría es una idea mediante la cual el hombre, a través de todas las épocas, ha tratado de comprender y crear el orden, la belleza y la perfección*".

Intuitivamente una simetría es cuando una forma, un diseño o un objeto se ve igual o muy parecido después de haber sido transformado de alguna manera.

La simetría es una propiedad que describe el equilibrio y la proporción en un objeto.

Correspondencia exacta de formas o partes a ambos lados de un punto, línea o plano.

La simetría tiene aplicaciones en:

Arte y diseño: En la pintura, arquitectura y escultura, la simetría se utiliza para crear equilibrio y armonía visual.

Simetrías

Naturaleza: Muchas formas de vida, como flores, mariposas y estrellas de mar, muestran simetría radial o bilateral, lo que les da eficiencia y belleza.

Matemáticas y geometría: La simetría es clave en la resolución de ecuaciones y en el estudio de figuras geométricas.

Física: La simetría ayuda a entender las leyes fundamentales del universo, como la conservación de energía.

Química: Se utiliza para analizar la estructura de moléculas y cristales.

Tecnología e ingeniería: En la construcción, la simetría asegura estabilidad y estética en puentes, edificios y estructuras.

Simetrías

Robótica y diseño industrial: Se emplea para crear dispositivos funcionales y equilibrados.

Biología y medicina: La simetría es crucial para entender la anatomía de los organismos.

Medicina: Se utiliza en imágenes diagnósticas como resonancias magnéticas y tomografías.

En matemáticas:

La gráfica de la función $y = f(x) = x^2$ se dice que es simétrica con respecto al eje y.

La gráfica de la función $y = g(x) = x^3$ se dice que es simétrica con respecto al punto $(0, 0)$.

Que significa esto geométricamente?

Simetrías de un triángulo equilátero

La simetría es una propiedad que permite dividir una figura en dos partes iguales mediante una línea, esta linea de división es llamada eje de simetría.

Se pueden considerar figuras planas como triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos regulares, hexágonos regulares.

Ejemplo

Considere un triángulo equilátero.
En este triángulo que sucede con sus lados?,
con sus ángulos?,
con sus mediatrices?,
con sus bisectrices,
con sus alturas?
cuantos ejes de simetría tiene un triángulo equilátero?

Simetrías de un triángulo equilátero

Definición

En un triángulo equilátero una ***transformación (o simetría)*** *es un movimiento del triángulo que preservan la forma y posición del triángulo equilátero, decir, el triángulo queda cubriendo la misma región inicial.*

Problema

Determinar todas las simetrías de un triángulo equilátero.

ρ_0 : Rotar 0° en sentido antihorario.

ρ_1 : Rotar 120° en sentido antihorario.

ρ_2 : Rotar 240° en sentido antihorario.

μ_1 : Reflexión sobre la bisectriz $\overline{OA}$.

μ_2 : Reflexión sobre la bisectriz $\overline{OB}$.

μ_3 : Reflexión sobre la bisectriz $\overline{OC}$.

Simetrías de un triángulo equilátero

Como cambian los vértices de posición con las simetrías?

$$\rho_0 : \begin{cases} 1 & \longrightarrow & 1 \\ 2 & \longrightarrow & 2 \\ 3 & \longrightarrow & 3 \end{cases}, \quad \rho_1 : \begin{cases} 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & \longrightarrow & 1 \end{cases}, \quad \rho_2 : \begin{cases} 1 & \longrightarrow & 3 \\ 2 & \longrightarrow & 1 \\ 3 & \longrightarrow & 2 \end{cases}$$

y

$$\mu_1 : \begin{cases} 1 & \longrightarrow & 1 \\ 2 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & \longrightarrow & 2 \end{cases}, \quad \mu_2 : \begin{cases} 1 & \longrightarrow & 3 \\ 2 & \longrightarrow & 2 \\ 3 & \longrightarrow & 1 \end{cases}, \quad \mu_3 : \begin{cases} 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & \longrightarrow & 1 \\ 3 & \longrightarrow & 3 \end{cases}$$

el conjunto de simetrías es escrito como,

$$D_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$$

Simetrías de un triángulo equilátero

En D_3 se define el producto o multiplicación de dos simetrías como la simetría resultante que resulta de aplicar primero la simetría de la izquierda y posteriormente en triángulo resultante se le aplica la simetría de la derecha, por ejemplo calcular $\rho_1\mu_1$ y $\rho_2\mu_2$.

$$\rho_1\mu_1 : \begin{cases} 1 & \xrightarrow{\rho_1} & 2 & \xrightarrow{\mu_1} & 3 \\ 2 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 2 \\ 3 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 1 \end{cases}$$

$$\mu_2 : \begin{cases} 1 & \longrightarrow & 3 \\ 2 & \longrightarrow & 2 \\ 3 & \longrightarrow & 1 \end{cases}$$

por lo tanto,

$$\rho_1\mu_1 = \mu_2.$$

Similarmente $\rho_2\mu_2 = \mu_1$.

Simetrías de un triángulo equilátero

La multiplicación en D_3 se puede expresar mediante la tabla:

$\cdot$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0						
ρ_1				μ_2		
ρ_2						
μ_1						
μ_2						
μ_3						

Problema

Completar la tabla de multiplicación de D_3.

Simetrías de un triángulo equilátero

$\cdot$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_2	μ_3	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_3	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	μ_3	μ_2	ρ_0	ρ_2	ρ_1
μ_2	μ_2	μ_1	μ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2
μ_3	μ_3	μ_2	μ_1	ρ_2	ρ_1	ρ_0

¿Que propiedades tiene esta multiplicación definida en D_3?

- Siempre que tomen dos elementos de D_3 y se multipliquen, el resultado es un elemento de D_3,
- Si $a, b, c \in D_3 : (ab)\,c = a\,(bc)\,,$
- Para cada $x \in D_3 : e\rho_0 = \rho_0 e = x$,
- Si $a \in D_3$, entonces existe $b \in D_3$ tal que, $ab = ba = \rho_0$,
- Es cierto que para cada $a, b \in D_3 : ab = ba$?

Simetrías de un triángulo equilátero

Las propiedades anteriores caracterizan unas estructuras algebraicas que se estudian en matemáticas llamadas **grupos**; cuando lo elementos conmutan se llaman **grupos abelianos**, po lo tanto D_3 es un grupo no abeliano llamado el **grupo de las simetrías del triángulo**).

Simetrías de un cuadrado

Ejemplo

Considere un cuadrado.
En este cuadrado que sucede con sus lados?,
con sus ángulos?,
con sus diagonales?,
con los puntos medios de dos lados opuestos,
cuantos ejes de simetría tiene un triángulo equilátero?

Definición

En uncuadrado una ***transformación (o simetría)*** *es un movimiento del cuadrado que preservan la forma y posición del cuadrado, decir, el cuadrado queda cubriendo la misma región inicial.*

Problema

Determinar todas las simetrías de un cuadrado.

Simetrías de un cuadrado

ρ_0 : Rotación 0° en sentido antihorario.

ρ_1 : Rotación 90° en sentido antihorario.

ρ_2 : Rotación 180° en sentido antihorario.

ρ_3 : Rotación 270° en sentido antihorario.

μ_1 : Reflexión respecto a L_1.

μ_2 : Reflexión respecto a L_2.

δ_1 : Reflexión respecto a $\overline{DB}$.

δ_1 : Reflexión respecto a $\overline{AC}$.

Simetrías de un cuadrado

Como cambian los vértices de posición con las simetrías?

$$\rho_0 \;:\; \left\{\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 1 \\ 2 & \longrightarrow & 2 \\ 3 & \longrightarrow & 3 \\ 4 & \longrightarrow & 4 \end{array}\right. ,\quad \rho_1 : \left\{\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & \longrightarrow & 4 \\ 4 & \longrightarrow & 1 \end{array}\right. ,\quad \rho_2 : \left\{\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 3 \\ 2 & \longrightarrow & 4 \\ 3 & \longrightarrow & 1 \\ 4 & \longrightarrow & 2 \end{array}\right. ,$$

$$\rho_3 \;:\; \left\{\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 4 \\ 2 & \longrightarrow & 1 \\ 3 & \longrightarrow & 2 \\ 4 & \longrightarrow & 3 \end{array}\right. ,\quad \mu_1 : \left\{\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & \longrightarrow & 1 \\ 3 & \longrightarrow & 4 \\ 4 & \longrightarrow & 3 \end{array}\right. ,\quad \mu_2 : \left\{\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 4 \\ 2 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & \longrightarrow & 2 \\ 4 & \longrightarrow & 1 \end{array}\right. ,$$

y

$$\delta_1 \;:\; \left\{\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 3 \\ 2 & \longrightarrow & 2 \\ 3 & \longrightarrow & 1 \\ 4 & \longrightarrow & 4 \end{array}\right. ,\quad \delta_2 : \left\{\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 1 \\ 2 & \longrightarrow & 4 \\ 3 & \longrightarrow & 3 \\ 4 & \longrightarrow & 2 \end{array}\right.$$

Simetrías de un cuadrado

Sea

$$D_4 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2\},$$

y defina el producto de dos simetrías como en el caso de D_3

Problema

Realizar la tabla de multiplicación de D_4.

$\cdot$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
μ_1	μ_1	δ_1	μ_2	δ_2	ρ_0	ρ_2	ρ_1	ρ_3
μ_2	μ_2	δ_2	μ_1	δ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_3	ρ_1
δ_1	δ_1	μ_2	δ_2	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_1	δ_1	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_2	ρ_2

Simetrías de un cuadrado

- Siempre que tomen dos elementos de D_4 y se multipliquen, el resultado es un elemento de D_4,
- Si $a, b, c \in D_4 : (ab)\, c = a\,(bc)\,,$
- Para cada $x \in D_4$: $e\rho_0 = \rho_0 e = x$,
- Si $a \in D_4$, entonces existe $b \in D_4$ tal que, $ab = ba = \rho_0$,
- Es cierto que para cada $a, b \in D_4 : ab = ba$?

D_4 es un grupo no abeliano llamado el **grupo de las simetrías del cuadrado**)

en un $n-$ ágono regular se obtiene el grupo D_n que es un grupo no abeliano con $2n$ elementos.

Coloraciones

Suponga que se tiene un triángulo equilátero y se quieren pintar sus lados usando dos colores por ejemplo verde, amarillo; cada triángulo que se obtenga de esta forma es llamado una **coloración**.

Determinar el número de coloraciones que que se pueden obtener.

Para cada lado del triángulo hay dos opciones para escoger, por ejemplo VVV, AVA, VVA,....por lo tanto hay 2^3 formas de pintar los lados.

Dos coloraciones son **iguales** si una de ella se puede obtener a partir de la otra a través de una simetría.

Problema

Determinar todas las coloraciones distintas cuando se pintan lo lados de un triángulo equilátero usando dos colores.

Problema

Determinar todas las coloraciones distintas que se obtiene cuando se quieren pintar los lados de un cuadrado usando dos colores.