INSTRUCCIONES

1. Asegúrese que el examen y la hoja de respuestas que le entregan corresponden a su nivel, los niveles son:

- Nivel Básico para los grados 6° y 7°.
- Nivel Medio para los grados 8° y 9°.
- **Nivel Avanzado para los grados 10° y 11°.**

2. El examen consta de 6 preguntas tipo ensayo (respuesta abierta). Para contestar una pregunta, escriba el procedimiento y la respuesta que usted considere es la del problema en los lugares indicados, si aparece más de una respuesta en la misma pregunta, dicha respuesta se considerará incorrecta.

3. Para la realización del examen solo se necesita lápiz y borrador, por tanto **NO** se permite el uso de ningún tipo de material adicional (computadores, celulares, calculadoras, libros, etc).

4. El examen se calificará de la siguiente manera: la solución de cada problema tendrá un valor máximo de 10 puntos; escriba todo su análisis si desea recibir el puntaje máximo. Las preguntas sin contestar no tendrán valor.

5. El estudiante no está autorizado para hacer preguntas durante el examen.

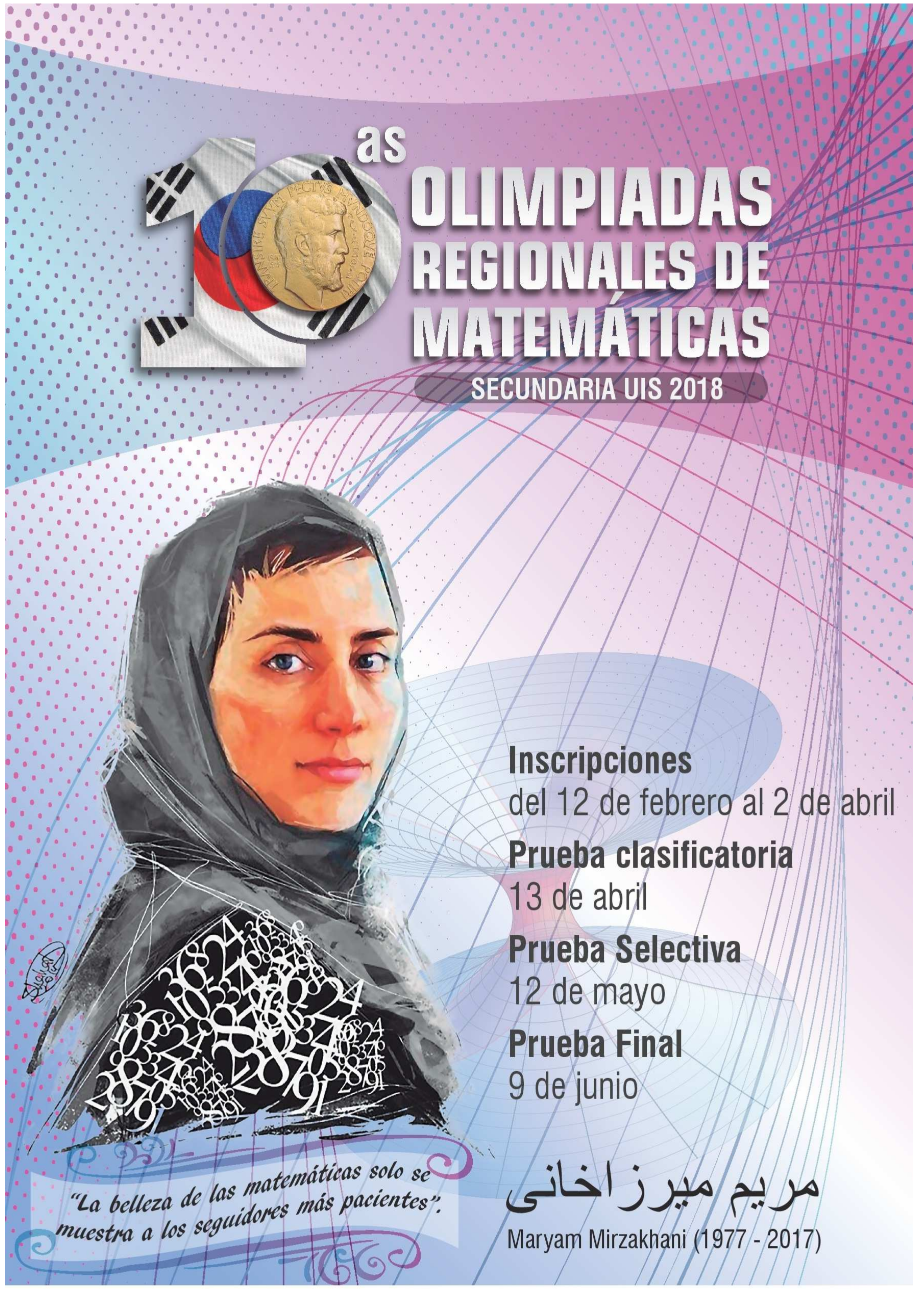
6. Al terminar el examen el estudiante debe devolver al profesor encargado únicamente la HOJA DE RESPUESTAS con TODOS los datos diligenciados de la manera más clara posible.

INFORMES

Escuela de Matemáticas, Olimpiadas Regionales de Matemáticas
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 exts: $1281 - 2316$, 6450301.

Síguenos en facebook:
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

Prueba Final
NIVEL AVANZADO



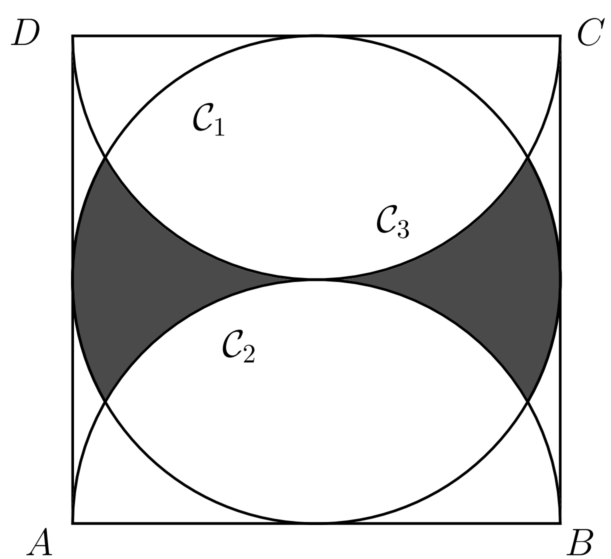
Problema 1. Dado que

$$\left(x^2+2x+1\right)^{50}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}+a_{100}x^{100},$$

calcule el valor de la suma

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{99}+a_{100}.$$

Problema 2. En la siguiente figura la circunferencia $\mathcal{C}_1$ es tangente a todos los lados del cuadrado $ABCD$ y las semicircunferencias $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ son tangentes entre sí y tienen un diámetro en $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ respectivamente. Si un lado del cuadrado $ABCD$ mide l, halle el valor del área sombreada.



Problema 3. Encuentre el residuo que deja al dividirse entre 7 la suma de todos los divisores positivos del número

$$2^{12}\left(2^{13}-1\right).$$

Nota: *Tenga en cuenta que* $2^{13}-1$ *es un número primo.*

Problema 4. Para cada entero positivo n considere la suma

$$S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3.$$

Pruebe que:

(a) $\sqrt{S_n}=1+2+3+\cdots+n.$

(b) Si n es par entonces S_n es divisible por $(n+1)^2$ y $\left(\frac{n}{2}\right)^2$.

Problema 5. Sean $\mathcal{C}$ una circunferencia con centro O y radio r y P un punto fuera de $\mathcal{C}$ tal que $OP=2r$. Construya las tangentes a $\mathcal{C}$ que pasan por P y defina a N y M como los puntos de tangencia. Defina a Q como el punto de intersección entre la extensión de $\overline{OP}$ y $\mathcal{C}$ tal que O pertenece al segmento $\overline{PQ}$. Demuestre que el triángulo MQN es equilátero.

Problema 6. Muestre que si p y q son primos impares, entonces $2\left(q^p-p^q\right)-(q-p)$ deja el mismo residuo que q al dividirse entre p.