Universidad Industrial de Santander.
Escuela de Matemáticas.

Programa de Álgebra Lineal I.

Introducción.

El **álgebra lineal** es una rama de las matemáticas que estudia fenómenos de naturaleza lineal en muchas variables tales como los sistemas de ecuaciones lineales, introduciendo el lenguaje de las matrices y los vectores y conceptos estructurales como el de espacio vectorial y de transformación lineal. Su nacimiento se remonta a mediados del siglo XIX pero solamente en la segunda mitad del siglo XX se instala prácticamente en todos los currículos de las carreras de ciencias e ingeniería de todo el mundo al mismo nivel que el ya clásico cálculo diferencial e integral.
Entrado el siglo XXI el álgebra lineal es una herramienta básica para casi todas las ramas de la matemática y también para disciplinas afines tales como la física, la ingeniería y la computación, entre otras.
En nuestro medio, durante casi toda la segunda mitad del siglo XX la materia *Álgebra Superior* fue obligatoria para todos los estudiantes de ciencias e ingeniería de la UIS y comprendía el estudio de los vectores sobre todo tridimensionales, el álgebra vectorial y el álgebra de matrices, además de temas anexos como inducción, teorema del binomio, números complejos. Todo muy enfocado a apoyar los cursos de cálculo. Entrando al siglo XXI todo esto se ha querido enfocar hacia el álgebra lineal. Así la materia *Álgebra Lineal I* quiere ser una materia altamente formativa que abra las puertas al estudiante para el estudio de los fenómenos lineales en muchas variables con herramientas algebraicas. El eje central es el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, sistemas que el estudiante debe haber tratado superficialmente en su bachillerato y cuyas soluciones aquí se exploran a profundidad dando una interpretación geométrica y herramientas algorítmicas apropiadas. Los enfoques y la ambientación de esta temática pueden variar de acuerdo al docente orientador del curso y a los intereses de los estudiantes. Los objetos a tratar son entes concretos (n-plas, vectores, matrices) que sirvan de base para aproximarse a entes abstractos.

Propósitos:

Generales

- Propiciar en el estudiante el desarrollo de su capacidad para formalizar algebraicamente situaciones geométricas, de la ciencia y de la tecnología.
- Familiarizar al estudiante con los ejemplos básicos de las estructuras de espacio vectorial y del espacio vectorial euclidiano.

Específicos

- Dar herramientas básicas para el desarrollo de las matemáticas universitarias
- Identificar lugares geométricos del espacio tridimensional (puntos, planos y rectas) con sistemas de ecuaciones lineales
- Manejar el álgebra de matrices y su utilidad para la solución de sistemas de ecuaciones lineales
- Reconocer la función determinante como una generalización del concepto de área y volumen y utilizarla para el análisis de la consistencia de sistemas de ecuaciones lineales
- Identificar fenómenos de naturaleza ideal y modelarlos algebraicamente.

Componentes.

- **Algorítmico:** Es indispensable que el estudiante maneje ciertos algoritmos por ejemplo, el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales, algoritmos para calcular el determinante de una matriz, su inversa, además de manejar cierta operatoria, como el álgebra de matrices, las operaciones entre vectores de R^n, etc.. Es de tener en cuenta y esto puede ser muy específico de nuestro medio, que los estudiantes que recibimos en su mayoría, comprenden la matemática como una colección de algoritmos. Sin embargo, es indispensable no quedarse en el manejo de estos algoritmos ni exigir excesiva destreza en cálculos largos. Siempre el estudiante debe entender el porqué del algoritmo, más importante que ejecutar determinado algoritmo puede ser describirlo.
- **Argumentación:** El curso comprende una buena cantidad de afirmaciones que además de su compresión, deben interrelacionarse por medio de argumentaciones que sin necesidad de ser excesivamente formales expliquen la naturaleza de estas afirmaciones. Por ejemplo, una vez el estudiante entiende el papel de la matriz idéntica entre matrices cuadradas del mismo orden, debe comprender qué significa ser la inversa y porqué la inversa del producto de dos matrices invertibles se comporta así y la demostración formal es conveniente, sencilla y útil. Debe relacionar esta inversa con los inversos multiplicativos de los números reales, y entender su diferencia. Se exige pues la compresión de las ideas y el dominio del lenguaje propicio para expresarlas.
- **Geométrico:** Se trata de mostrar elementos del álgebra lineal en R^n y para ello es indispensable guiarse por lo que sucede en R^2 y R^3, que son los casos visibles en donde la intuición funciona bien. Por otra parte cuando trabajamos R^2, podemos hacer un puente con los posibles conocimientos que el estudiante debe traer de su geometría analítica. Hay que asombrar al estudiante mostrándole que, por ejemplo en R^5, podemos hablar de triángulos rectángulos aunque no los podamos ver.
- **Computacional:** muchos textos incluyen ejercicios y rutinas para trabajar con paquetes computacionales. Es indudablemente útil introducir estas ayudas, sin embargo se debe tener cuidado pues algunas veces el manejo del paquete no es tan amigable y su uso hace que el estudiante pierda de vista los conceptos que se tratan de explorar. Estos paquetes computacionales, (Matlab, Octave, Geogebra, Mathematica o Sage) pueden utilizarse como una manera de agilizar cálculos que de manera manual sería engorroso, o pueden usarse como ilustración de las muchas aplicaciones del álgebra lineal. El uso de estos paquetes es algo que a nivel mundial es experimental y sería muy bueno compartir experiencias al respecto.

Contenidos.

Se presentan a continuación los contenidos posibles de la materia, teniendo en cuenta que los marcados con * son opcionales, que a juicio del docente deben ambientar los no marcados, que son considerados como contenidos mínimos e indispensables.

1. **Introducción***
   1.1. Naturales e inducción, sumatoria.*
   1.2. Números complejos*.
   1.3. Operaciones*.
   1.4. Campos finitos*.
2. **Geometría Vectorial en R^{n} (Ilustrar ejemplos en R^2 y R^3).**
   2.1. Álgebra de vectores.
   2.2. Longitud y ángulo: producto punto.
   2.3. Rectas y planos.
   2.4. Proyección ortogonal sobre rectas y planos.
3. **Sistemas de ecuaciones lineales**
   3.1. Introducción: definición de ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales y solución de un sistema de ecuaciones lineales.
   3.2. Métodos directos (Gauss) para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
   3.3. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales*.
4. **Álgebra de matrices y determinantes**
   4.1. Operaciones con matrices.
   4.2. Inversa de una matriz.
   4.3. Determinantes.
   4.4. Factorización LU*.
5. **Subespacios vectoriales en R^n**
   5.1. Definición y ejemplos.
   5.2. Espacio generado y espacio nulo.
   5.3. Dependencia e independencia lineal.
   5.4. Bases y dimensión.
   5.5. Subespacios afines*
   5.6. Transformaciones lineales y transformaciones afines*.
6. **Valores y vectores propios***
   6.1. Definiciones: valores y vectores propios y polinomio característico*.
   6.2. Espacios propios*.
   6.3. Matrices semejantes y diagonalización*.
   6.4. Aplicaciones*.
7. **Ortogonalidad***
   7.1. Ortogonalidad en R^n*.
   7.2. Bases ortogonales*.
   7.3. Proceso de Gram-Schmidt y factorización QR*.
   7.4. Diagonalización ortogonal*.

Posibles Organizaciones

Clásica: Se estudia el álgebra vectorial y matricial, como preámbulo para generalizar a las estructuras de espacio vectorial.

1.Preliminares, Principio de Inducción Matemática

- Aplicaciones
- Sucesiones recursivas, coeficientes binomiales y el teorema del binomio
- El campo de los Números complejos: representación geométrica, potencias y raíces Complejas.
- Teorema Fundamental del álgebra.

2.R^n como Espacio vectorial y como Espacio Euclidiano

- Vectores geométricos
- Vectores y coordenadas
- Suma de vectores,producto de un vector por un escalar, producto escalar de vectores, producto vectorial y proyecciones
- Rectas y planos en el espacio.

3. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

- Sistemas de ecuaciones lineales.
- Solución general de un sistema de ecuaciones lineales.
- Álgebra de matrices.
- Operaciones elementales entre filas.
- Matrices equivalentes por filas.
- Matrices escalonadas reducidas por filas.
- Matrices invertibles.
- Matrices elementales.
- Algoritmo para encontrar la inversa de una matriz cuadrada.

4. Determinantes

- Ampliación del concepto de volumen.
- Cálculo de determinantes por diagonalización.
- Fórmula del producto y sus consecuencias.
- Fórmulas de expansión para calcular determinantes.
- Determinante de la transpuesta.
- Regla de Cramer.

Categórica:
Está implícita la distinción entre objetos y morfimos de las categorías que se estudia: Los espacios vectoriales, y los espacios euclidianos. La operatoria entre matrices aparece de manera natural como las

operaciones correspondiantes a operaciones naturales entre transformaciones lineales.

1. Los Escalares. Preliminares, Principio de Inducción Matemática

- Números naturales. Principio de Inducción.
- El campo de los Números complejos: representación geométrica, potencias y raíces Complejas.
- Campos finitos.

2. R^n como Espacio vectorial.

- Solución general de un sistema de ecuaciones lineales. Metodo de gauss.
- El espacio de las n-plas. Operaciones.
- Subespacios vectoriales. Independencia lineal, generado y bases.
- Rectas, planos subespacios afines en R^n.

3. Transformaciones lineales y Matrices.

- Transformaciones lineales de R^n en R^m
- Representación de transformaciones por matrices.
- Álgebra de matrices vs álgebra de transformaciones.
- Matrices invertibles. Algoritmo para encontrar la inversa de una matriz cuadrada.
- Nucleo e imagen. Relación con la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

4. R^n como espacio vectorial Euclideo.

- Producto punto. Otros productos internos en R^n
- Norma de un vector. Distancia entre puntos.
- Desigualdad de Cauchy-Shwarz.
- Coseno entre vectores. Proyección.
- Producto cruz, producto punto.

Determinantes

- Ampliación del concepto de volumen.
- Cálculo de determinantes por diagonalización.
- Fórmula del producto y sus consecuencias.
- Fórmulas de expansión para calcular determinantes.
- Determinante de la transpuesta.
- Regla de Cramer.

Moderna:

A partir del texto de Poole

1.1 Introducción: el juego de la pista de carreras

1.2 Geometría y álgebra de vectores

1.3 Longitud y ángulo: el producto punto

2.1 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales
2.2 Métodos directos para resolver sistemas lineales
2.3 Conjuntos generadores e independencia lineal

3.1 Operaciones con matrices
3.2 Álgebra matricial
3.3 La inversa de una matriz
3.5 Subespacios, bases, dimensión y rank

4.1 Introducción a eigenvalores y eigenvectores
4.2 Determinantes

Logística:

- El docente escoge la distribución de los temas, el número de evaluaciones y su ponderación teniendo en cuenta este documento, sus concepciones particulares y los intereses de sus estudiantes (ya que Álgebra Lineal I es un curso de primer semestre puede saber a qué carrera pertenecen sus estudiantes). También incluirá el o los textos guía y la bibliografía.
- El primer día de clase hace llegar a sus estudiantes y a la coordinación de la materia la distribución de los temas y su manera de evaluar junto con la bibliografía empleada y otros recursos.
- El tema de cada parcial lo hace llegar a la coordinación de la materia así como los resultados obtenidos.
- El docente intentará estar en contacto con el seminario docente, participando directamente o informándose de los temas tratados. También tratará de saber de la experiencia de otros docentes de la materia.

Bibliografía.

Álgebra Lineal. Stanley I. Grossman.
*Calculus Tomo I y II. T*om M. Apostol.
Linear Algebra. Fraleigh B.
Álgebra Lineal: Una introducción Moderna. David Poole.
Algebra Linear e Aplicaciones. Reginaldo J. Santos.
Elementary Linear Algebra. Howard Anthon.
Aproximación al Álgebra Lineal: Un enfoque geométrico. Sonia Sabogal y Rafael Isaacs.
Algebra Lineal con aplicaciones. Restrepo Patricia, Franco Rosa, Luz Elena Muñoz. Universidad Nacional de Colombia.
Um Curso de Geometria Analitica e Algebra Linear. Reginaldo J. Santos.
Álgebra Lineal y sus aplicaciones. David Lay