**Universidad Industrial de Santander**
Escuela de Matemáticas
**Álgebra Lineal I**
Programa
Abril 2019

# Introducción

El álgebra lineal es una rama de las matemáticas que estudia fenómenos de naturaleza lineal en muchas variables tales como los sistemas de ecuaciones lineales, introduciendo el lenguaje de las matrices y los vectores y conceptos estructurales como el de espacio vectorial y de transformación lineal. Su nacimiento se remonta a mediados del siglo XIX pero solamente en la segunda mitad del siglo XX se instala prácticamente en todos los currículos de las carreras de ciencias e ingeniería de todo el mundo al mismo nivel que el ya clásico cálculo diferencial e integral.
Entrado el siglo XXI el álgebra lineal es una herramienta básica para casi todas las ramas de la matemática y también para disciplinas afines tales como la física, la ingeniería y la computación, entre otras.
En la Universidad Industrial de Santander, durante casi toda la segunda mitad del siglo XX la materia *Álgebra Superior* fue obligatoria para todos los estudiantes de ciencias e ingeniería y comprendía el estudio de los vectores, el álgebra vectorial y el álgebra de matrices, además de temas anexos como inducción, teorema del binomio, y números complejos. Todo muy enfocado a apoyar los cursos de cálculo. Entrando al siglo XXI todo esto se ha querido enfocar hacia el álgebra lineal. Así la materia Álgebra Lineal I quiere ser una materia altamente formativa que abra las puertas al estudiante para el estudio de los fenómenos lineales en muchas variables con herramientas algebraicas. El eje central es el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, sistemas que el estudiante debe haber tratado superficialmente en su bachillerato y cuyas soluciones aquí se exploran a profundidad dando una interpretación geométrica y herramientas algorítmicas apropiadas. Los enfoques y la ambientación de esta temática pueden variar de acuerdo al docente orientador del curso y a los intereses de los estudiantes. Los objetos a tratar son entes concretos (n-plas, vectores, matrices, planos, rectas, etc.) que sirvan de base para aproximarse a entes abstractos: subespacios, generadores, bases.

# Propósitos

## Generales

- Propiciar en el estudiante el desarrollo de su capacidad para formalizar algebraicamente situaciones geométricas, de la ciencia y de la tecnología.

- Familiarizar al estudiante con los ejemplos básicos de las estructuras de espacio vectorial y del espacio vectorial euclidiano.

### Específicos

- Dar herramientas básicas para el desarrollo de las matemáticas universitarias .
- Identificar lugares geométricos del espacio tridimensional (puntos, planos y rectas) con sistemas de ecuaciones lineales.
- Manejar el álgebra de matrices y su utilidad para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Reconocer la función determinante como una generalización del concepto de área y volumen y utilizarla para el análisis de la consistencia de sistemas de ecuaciones lineales.
- Identificar fenómenos de naturaleza ideal y modelarlos algebraicamente.

## Componentes

- **Algorítmico:** Es indispensable que el estudiante maneje ciertos algoritmos por ejemplo, el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales, algoritmos para calcular el determinante de una matriz, su inversa, además de manejar cierta operatoria, como el álgebra de matrices, las operaciones entre vectores de $\mathbb{R}^n$, etc.. Es de tener en cuenta y esto puede ser muy específico de nuestro medio, que los estudiantes que recibimos en su mayoría, comprenden la matemática como una colección de algoritmos. Sin embargo, es indispensable no quedarse en el manejo de estos algoritmos ni exigir excesiva destreza en cálculos largos. Siempre el estudiante debe entender el porqué del algoritmo. Más importante que ejecutar determinado algoritmo puede ser describirlo.
- **Argumentación:** El curso comprende una buena cantidad de afirmaciones que además de su compresión, deben interrelacionarse por medio de argumentaciones que sin necesidad de ser excesivamente formales expliquen la naturaleza de estas afirmaciones. Por ejemplo, una vez el estudiante entiende el papel de la matriz idéntica entre matrices cuadradas del mismo orden, debe comprender qué significa ser la inversa y porqué la inversa del producto de dos matrices invertibles se comporta así y la demostración formal es conveniente, sencilla y útil. Debe relacionar esta inversa con los inversos multiplicativos de los números reales, y entender su diferencia. Se exige pues la compresión de las ideas y el dominio del lenguaje propicio para expresarlas.
- **Geométrico:** Se trata de mostrar elementos del álgebra lineal en $\mathbb{R}^n$ y para ello es indispensable guiarse por lo que sucede en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, que son los casos visibles en donde la intuición funciona bien. Por otra parte cuando trabajamos $\mathbb{R}^2$, podemos hacer un puente con los posibles conocimientos que el estudiante debe traer de su geometría analítica. Hay que asombrar al estudiante mostrándole que, por ejemplo en $\mathbb{R}^5$, podemos hablar de triángulos rectángulos aunque no podamos visualizarlos.
- **Computacional:** Muchos textos incluyen ejercicios y rutinas para trabajar con paquetes computacionales. Es indudablemente útil introducir estas ayudas, sin embargo se debe tener cuidado pues algunas veces el manejo del paquete no es tan amigable y su uso hace que el estudiante pierda de vista los conceptos que se tratan de explorar.

Estos paquetes computacionales, (Matlab, Octave, Geogebra, Mathematica o Sage) pueden utilizarse como una manera de agilizar cálculos como ilustración de las muchas aplicaciones del álgebra lineal. El uso de estos paquetes es algo que a nivel mundial es experimental y sería muy bueno compartir experiencias al respecto.

# Contenidos

Se presentan a continuación los contenidos de la materia, teniendo en cuenta que los marcados con * son considerados como contenidos mínimos e indispensables; los demás son opcionales, que a juicio del docente deben ambientar los indispensables.

1. **Introducción**
   a) Naturales e inducción, sumatoria.
   b) Números complejos: operaciones, representación gráfica, raíces.
   c) Campos Finitos.
2. $*$ **Geometría Vectorial en** $R^n$
   a) $*$ Álgebra de vectores.
   b) $*$ Longitud y ángulo: producto punto.
   c) $*$ Rectas y planos.
   d) $*$ Proyección ortogonal sobre rectas y planos.
3. $*$ **Sistemas de ecuaciones lineales**
   a) $*$ Introducción: definición de ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales y solución de un sistema de ecuaciones lineales.
   b) $*$ Métodos directos (Gauss) para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
   c) Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
4. $*$ **Álgebra de matrices y determinantes**
   a) $*$ Operaciones con matrices.
   b) $*$ Inversa de una matriz.
   c) $*$ Determinantes.
   d) Factorización LU.
5. **Valores y vectores propios**
   a) Definiciones: valores y vectores propios y polinomio característico.
   b) Espacios propios.
   c) Matrices semejantes y diagonalización.
   d) Aplicaciones.

6. **Ortogonalidad**

   a) Ortogonalidad en $\mathbb{R}^n$.

   b) Bases ortogonales.

   c) Proceso de Gram-Schmidt y factorización QR.

   d) Diagonalización ortogonal.

# Contenido Algorítmico Mínimo

Estas son las cosas que cualquier estudiante que apruebe la materia debe saber hacer en casos razonablemente sencillos. Se busca que a partir de la ejecución y análisis de estos algoritmos el estudiante comprenda el caracter estructural del álgebra lineal para avanzar con certeza en aplicaciones en otras materias de matemáticas (cálculo III por ejemplo) y aplicaciones en sus disciplinas. Estos procedimientos serán parte de lo evaluado en el examen PLUS.

1. Ecuaciones Lineales: Encontrar todas las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales por diagonalización (método de Gauss). Expresar dichas soluciones como subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ encontrar su geometría y dimensión.

2. Vectores de $\mathbb{R}^n$: Hacer operaciones de espacio vectorial entre vectores como $n$-plas. Dados dos vectores de $\mathbb{R}^n$ hallar el producto punto ente ellos, sus normas y determinar el ángulo entre ellos. Dados dos puntos determinar la recta (ecuaciones paramétrica y simétricas) que los contiene, determinar si un tercer punto está o no en la recta. Dados tres puntos no colineales de $\mathbb{R}^3$ determinar el plano que los contiene (ecuaciones paramétricas y cartesianas), su vector perpendicular, hallar el área y el perímetro del triángulo determinado por los tres puntos y características (¿es isóseles, equilátero, rectángulo?). Calcular la proyección de un vector de $\mathbb{R}^3$ sobre una recta y sobre un plano que contienen el origen, encontrar el punto más cercano de la recta o del plano a un punto dado. Encontrar los puntos más cercanos entre dos rectas de $\mathbb{R}^3$ no paralelas.

3. Algebra Matrices: Sumar y multiplicar por escalar matrices de igual orden, multiplicar matrices; dada una matriz cuadrada determinar si es singular y hallar de ser posible su inversa por diagonalización, resolver ecuaciones lineales con matrices, es decir encontar $X$ tal que $AX * B = C$ para $X, A, B, C$ matrices adecuadas. Hallar el determinante de una matriz cuadrada por diagonalización, resolver sistemas de ecuaciones lineales por regla de Cramer.

# Posibles Organizaciones

A continuación presentamos cuatro diferentes suguerencias para la Organización de la temática, de tal manera que el docente puede abordar los contenidos mínimos e indispensables del curso de Álgebra Lineal I. Se tendrá en cuenta que lo importante es que se aborden los contenidos mínimos de acuerdo al enfoque que el docente quiera dar a su curso, independiente de si adopta o no, alguna de estas sugerencias, debiendo siempre informar a la coordinación de la materia la manera como decide desarrollar el curso.

## Clásica

Se estudia el álgebra vectorial y matricial, como preámbulo para generalizar a las estructuras de espacio vectorial.

1. Preliminares.
   a) Principio de Inducción Matemática. Aplicaciones.
   b) Sucesiones recursivas, coeficientes binomiales y el teorema del binomio.
   c) El campo de los Números complejos: representación geométrica, potencias y raíces Complejas.
   d) Teorema Fundamental del álgebra.
2. $\mathbb{R}^n$ como Espacio vectorial y como Espacio Euclidiano
   a) Vectores geométricos. Vectores y coordenadas.
   b) Suma de vectores,producto de un vector por un escalar, producto escalar de vectores, producto vectorial y proyecciones.
   c) Rectas y planos en el espacio. Subespacios de $\mathbb{R}^n$
   d) Dependendencia e independencia lineal, generado lineal, bases.
3. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales.
   a) Sistemas de ecuaciones lineales.
   b) Solución general de un sistema de ecuaciones lineales.
   c) Álgebra de matrices.
   d) Operaciones elementales entre filas.
   e) Matrices equivalentes por filas. Matrices escalonadas reducidas por filas.
   f) Matrices invertibles. Matrices elementales.
   g) Algoritmo para encontrar la inversa de una matriz cuadrada.
4. Determinantes
   a) Ampliación del concepto de volumen.
   b) Cálculo de determinantes por diagonalización.

c) Fórmula del producto y sus consecuencias.
d) Fórmulas de expansión para calcular determinantes.
e) Determinante de la transpuesta.
f) Regla de Cramer.

Como texto se recomienda Apostol volumen I capítulos 9,12 y 13, complementado con el capítulo 1 de Grossman.

## Categórica

Está implícita la distinción entre objetos y morfimos de las categorías que se estudian: Los espacios vectoriales, y los espacios euclidianos. La operatoria entre matrices aparece de manera natural como las operaciones correspondiantes a operaciones naturales entre transformaciones lineales. Está basada en el libro de los profesores Sonia Sabogal y Rafael Isaacs.

1. Los Escalares.
   a) Números naturales. Principio de Inducción.
   b) El campo de los Números complejos: representación geométrica, potencias y raíces Complejas.
   c) Campos finitos.
2. $\mathbb{R}^n$ como Espacio vectorial.
   a) Solución general de un sistema de ecuaciones lineales. Metodo de Gauss.
   b) El espacio de las $n$-plas. Operaciones.
   c) Subespacios vectoriales. Independencia lineal, generado y bases.
   d) Rectas, planos subespacios afines en $\mathbb{R}^n$.
3. Transformaciones lineales y Matrices.
   a) Transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.
   b) Representación de transformaciones por matrices.
   c) Álgebra de matrices vs álgebra de transformaciones.
   d) Matrices invertibles. Algoritmo para encontrar la inversa de una matriz cuadrada.
   e) Núcleo e imagen. Relación con la solución de sistemas de ecuaciones lineales.
4. $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial Euclideo.
   a) Producto punto. Otros productos internos en $\mathbb{R}^n$.
   b) Norma de un vector. Distancia entre puntos.
   c) Desigualdad de Cauchy-Shwarz.
   d) Coseno entre vectores. Proyección.
   e) Producto cruz, producto punto.

5. Determinantes.
    a) Ampliación del concepto de volumen.
    b) Cálculo de determinantes por diagonalización.
    c) Fórmula del producto y sus consecuencias.
    d) Fórmulas de expansión para calcular determinantes.
    e) Determinante de la transpuesta.
    f) Regla de Cramer.

## Moderna

A partir del texto de Poole, texto que contiene aplicaciones muy sugestivas y actuales.

1. Vectores.
    a) Introducción: el juego de la pista de carreras.
    b) Geometría y álgebra de vectores.
    c) Longitud y ángulo: el producto punto.
    d) Rectas y Planos.
    e) Aplicaciones.
2. Sistemas de ecuaciones lineales.
    a) Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales.
    b) Métodos directos para resolver sistemas lineales.
    c) Conjuntos generadores e independencia lineal.
    d) Métodos iterativos para resolver sistemas linjeales
    e) Aplicaciones.
3. Matrices.
    a) Operaciones con matrices.
    b) Álgebra matricial.
    c) La inversa de una matriz.
    d) Subespacios, bases, dimensión y rango.
    e) Introducción a las transformaciones lineales.
    f) Aplicaciones.
4. Vectores y valores propios.
    a) Introducción a valores y vectores propios.
    b) Determinantes.

c) Valores y vectores propios de matrices $n \times n$.
d) Semejanza y diagonalización.
e) Aplicaciones.
f) Métodos iterativos para calcular eigenvalores

## Matricial

Basada en el libro de Howard Anton capítulos 1,2,3,4.

1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES.
    a) Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales.
    b) Eliminación gaussiana.
    c) Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales.
    d) Matrices y operaciones matriciales.
    e) Reglas de la aritmética matricial.
    f) Matrices elementales y un método para hallar la inversa.
    g) Resultados adicionales acerca de los sistemas de ecuaciones y la inversibilidad.
2. LA FUNCIÓN DETERMINANTE.
    a) Evaluación de los determinantes por reducción en los renglones.
    b) Propiedades de la función determinante.
    c) Desarrollo por cofactores; regla de Cramer.
    d) Vectores en los espacios bidimensional y tridimensional.
3. INTRODUCCIÓN A LOS VECTORES (GEOMÉTRICOS).
    a) Normas de un vector; aritmética vectorial.
    b) Producto escalar (punto); proyecciones.
    c) Producto vectorial (cruz).
    d) Rectas y planos en el espacio tridimensional.
4. ESPACIOS VECTORIALES
    a) Espacio euclidiano n dimensional.
    b) Espacios vectoriales generales.
    c) Subespacios.
    d) Independencia lineal.
    e) Base y dimensión.
    f) Espacio de renglones y columnas de una matriz; rango; aplicaciones para hallar bases.

g) Espacios de productos interiores.
h) Longitud y ángulo en los espacios de productos interiores .
i) Bases ortonormales; proceso de Gram-Schmidt.
j) Coordenadas; cambio de base.

## Logística

- El docente escoge la distribución de los temas, el número de evaluaciones y su ponderación teniendo en cuenta este documento, sus concepciones particulares y los intereses de sus estudiantes (ya que Álgebra Lineal I es un curso de primer semestre puede saber a qué carrera pertenecen sus estudiantes). También incluirá el o los textos guía y la bibliografía. El primer día de clase hace llegar a sus estudiantes y a la coordinación de la materia la distribución de los temas y su manera de evaluar junto con la bibliografía empleada y otros recursos.

- El tema de cada parcial lo hace llegar a la coordinación de la materia así como los resultados obtenidos.

- El docente intentará estar en contacto con el seminario docente, participando directamente o informándose de los temas tratados. También tratará de conocer de la experiencia de otros docentes de la materia.

- El docente debe colaborar con el programa ASAE para que sus estudiantes reciban orientación efectiva en la materia.

- Al final del semestre se lleva a cabo el **examen PLUS**, que es una prueba elaborada en Moodle y ejecutada en salas de cómputo sobre todos los contenidos de la materia, las preguntas son de escogencia múltiple, de falso/verdadero y /o respuesta numérica y para sacar nota máxima no es necesario responder la totalidad del examen teniendo en cuenta que muchas temáticas son libres. Las preguntas de escogencia múltiple y de falso/verdadero mal contestadas son penalizadas. El principal objetivo del examen es tener un visión de lo que estamos logrando como docentes con nuestro cursos. Cada docente según su propio criterio, da un valor al examen como incentivo que ayude a mejorar la nota.

# Bibliografía


[1] T. Apostol, *Calculus* John Wiley & Sons, Inc., vol. 1.

[2] R. Isaacs y S. Sabogal *Aproximación al Álgebra Lineal: Un Enfoque Geométrico*, Ediciones UIS, 2004.

[3] S. Grossman, *Álgebra Lineal* , Mc. Graw-Hill.

[4] D. Poole, *Álgebra Lineal: Una introducción Moderna.*, Cengage Learning Editores.

[5] H. Anton *Elementary Linear Algebra* A.

[6] Reginaldo J. Santos. *Um Curso de Geometria Analitica e Algebra Linear.* (https://www.dropbox.com/s/jj3xq0hjv2z39zp/gaalt0.pdf) .

[7] D. Lay. *Álgebra Lineal y sus aplicaciones.*

[8] J.-L. Dorier (Ed) *On the Teaching of Linear Algebra.*