Primera Capacitación - Nivel Avanzado

Sucesiones: Definiciones & Ejemplos *

Olimpiadas Regionales de Matemáticas - Secundaria

Bucaramanga Febrero 19 de 2022

Resumen

El concepto matemático de sucesión no es muy diferente del uso común de la palabra en nuestro idioma español. Más aún, la experiencia cotidiana brinda una idea intuitiva de la noción de sucesión. Por ejemplo, al describir la sucesión de eventos que condujeron a un accidente de tránsito, no solo se tendría que enumerar los eventos, sino que también se debe hacer en el orden correcto. En esta breve nota presentamos algunas definiciones y propiedades básicas de las sucesiones de números reales.

Palabras Claves: Números naturales $\mathbb{N}$, sucesión, término, término n-ésimo.

Nota Histórica

Leonardo de Pisa (o Leonardo Pisano o Leonardo Bigollo) nació en la ciudad italiana de Pisa y vivió entre 1170 y 1250. Conocido por muchos simplemente como *Fibonacci*, fue un matemático famoso y el primer europeo en descubrir y describir la sucesión que lleva su nombre. A Fibonacci también se le reconoce por su papel en la introducción a Europa del sistema de numeración posicional en base 10.

El apodo de Guglielmo (Guillermo), padre de Leonardo, era Bonacci (simple o bien intencionado). Leonardo recibió póstumamente el apodo de Fibonacci, que significa filius Bonacci o hijo de Bonacci.

Definiciones & Ejemplos

Cualquier estudiante de ciencias o ingenoería, incluso de colegio, está familiarizado con el hecho de que todo número real puede escribirse o representarse como un decimal. Por ejemplo, el número racional

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0.\bar{3},$$

donde los misteriosos tres puntos (una elipsis) o la barra encima del número 3 significan que los tres dígitos en el primer caso o el dígito 3 se repiten indefinidamente. En otras palabras, lo anterior quiere decir decir que el decimal $0{,}333\ldots$ es una “suma infinita” o la serie infinita

*Alexander Holguín-Villa, E-mail address: `aholguin@uis.edu.co`
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\dots$$

Sin duda alguna, se ha encontrado con una *sucesión* o *sucesiones* de números en sus estudios a cualquier nivel. Por ejemplo, las listas finitas de cuatro de números pares e impares comenzando respectivamente en 12 y 9,

$$12, 14, 16, 18, \dots \quad \text{y } 9, 11, 13, 15, \dots$$

Estas sucesiones se denominan **finitas**. Por otro lado, si una lista de números formando una sucesión no tiene último número, es llamada **sucesión infinita**. Para el caso considere

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9} \dots$$

En los cursos de Cálculo se trabaja habitualmente con sucesiones del último tipo, es decir, Sucesiones Infinitas.

Se tiene la siguiente definición.

Definición 0.1. *Si una función f tien por dominio los números naturales $\mathbb{N}$, es llamada función sucesión o simplemente sucesión.*

En otras palabras, si $f : \mathbb{N} \to \mathcal{R}_f$, donde $\mathcal{R}_f$, que será un subconjunto de números reales, denota el rango de la función o conjunto de las imágenes, entonces los valores funcionales $f(n)$ pueden arreglarse en el orden correspondiente a los valores crecientes de n:

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

Observación 1.

1. *Como el dominio de toda sucesión es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, se emplea la notación general $\{f(n)\}_{n\geq 1}$ para denotar la* **función sucesión**.

2. *Es usual denotar el término n-ésimo $f(n)$ por a_n, $n \geq 1$. Por lo tanto, se usará la notación $\{a_n\}_{n\geq 1}$ para indicar la sucesión $\{f(n)\}_{n\geq 1}$.*

A continuación un ejemplo que permite "aproximar" el valor de un número distinguido en el Cálculo.

Ejemplo 0.1.

n	1	2	3	4	$\cdots$
$f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	$(3/2)^2 = 2{,}25$	$(4/3)^3 \approx 2{,}37$	$(5/4)^4 \approx 2{,}44$	$\cdots$

n	10^2	10^3	10^4	10^5	$\cdots$
$f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2,7048	2,7169	2,7181	2,7182	$\cdots$

Ejercicio 0.1.

1. *Escriba algunos términos de la sucesión con término n-ésimo*
$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

2. *Dé otra representación para el término a_n.*

Definición 0.2. *Una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ se dice que es*

- **Creciente** *si* $a_{n+1} > a_n$ *para cada* $n \geq 1$.
- **Decreciente** *si* $a_{n+1} < a_n$ *para cada* $n \geq 1$.
- **No-dreciente** *si* a_{n+1n} *para cada* $n \geq 1$.
- **No-creciente** *si* $a_{n+1} \leq a_n$ *para cada* $n \geq 1$.

En otras palabras, sucesiones del tipo

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots a_n < a_{n+1} < \cdots \qquad a_1 > a_2 > a_3 > \cdots a_n > a_{n+1} > \cdots ,$$

son sucesiones **crecientes** y **decrecientes**, respectivamente. Por otro lado,

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \qquad a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$$

Referencias

1. Holguín Villa A., *Notas de Clase Cálculo II.* Universidad Industrial de Santander (2020).

2. Leithold L. B., *El Cálculo,* 7^a *Ed.*. OXFORD Universityy Press, México, (1994).

3. Mejía Guzmán D. A., *Notas de Clase Introducción al Cálculo.* Universidad de Antioquia (2006).

4. Zill D. G. & Wright W. S., *Cálculo Trascendentes Tempranas,* 4^a *Ed.*. McGraW-Hill/Interamericana Editores S.A, México D.F (2011).