PRIMERA CAPACITACIÓN

NIVEL AVANZADO

GRADO 5°

¡Prepárate para las Olimpiadas!

PROBLEMA 1.

Para cada número natural n se define $\boxed{n}$ de la siguiente manera:

$$\boxed{n} = n \times (2021 - n).$$

¿Cuál es el valor de la siguiente expresión?

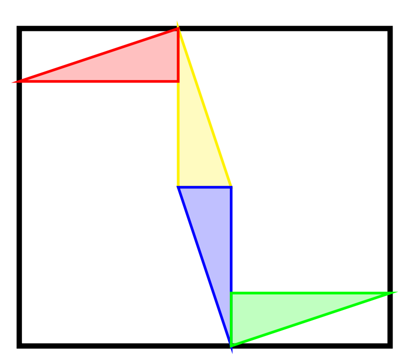
$$\boxed{1} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times \cdots \times \boxed{2021}$$

PROBLEMA 2.

Un granjero tiene 180 huevos de pata y 168 huevos de gallina. El quiere colocarlos en canastos de modo que en cada canasto haya la misma cantidad de huevos, sin juntar huevos de pata con huevos de gallina. ¿Cuál es la mínima cantidad de canastos que necesita el granjero?

PROBLEMA 3.

El Comité Olímpico de cierto colegio ha propuesto un diseño para la bandera de la olimpiada de matemáticas, el cual consta de cuatro triángulos rectángulos congruentes, pero de diferente color, dibujados sobre un rectángulo completamente blanco, como se muestra en la figura.



Si se imprimen de estas banderas con dimensiones $20\,cm$ y $18\,cm$, ¿qué fracción del área total de cada bandera estará coloreada por los cuatro triángulos?

PROBLEMA 4.

En la clase de educación física harán una prueba en la cancha rectangular $ABCD$ del colegio. Empieza Fabián, desplazándose en línea recta desde A hasta C, y se devuelve corriendo. Le sigue Sebastián, desplazándose en línea recta, desde A hasta C, luego desde C hasta D, y por último desde D hasta A. Fabián recorrió $26\,m$ y Sebastián $31\,m$. Si Jaime tiene que correr por todo el perímetro de la cancha hasta volver a su posición inicial, ¿cuántos metros recorrerá?

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

Problema 5.

Hermes, el loro de Pascal, sabe hacer cuentas solo con números naturales. Siempre que Pascal dice un número natural, Hermes lo multiplica por 9, luego suma 21, divide este resultado entre 3, al final resta 5 y grita el resultado.

(a) Si Pascal dice el número 10, ¿cuál es el número que grita Hermes?

(b) Si Hermes gritó el número 2021, ¿cuál es el número que dijo Pascal?

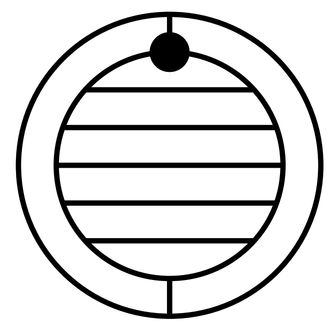
(c) ¿Es posible que Hermes grite el número 100?

Problema 6.

En la figura se muestra el logo de una empresa de autos.

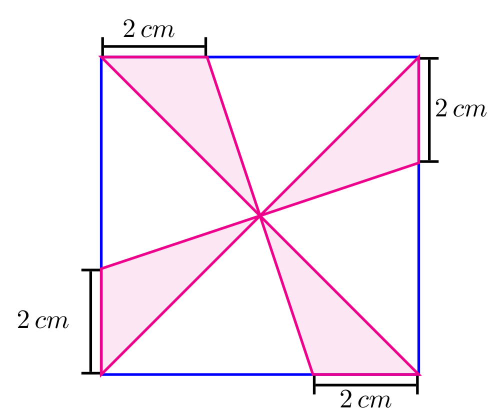
(a) ¿Cuántos colores como mínimo, son necesarios para pintar el logo, teniendo en cuenta que regiones vecinas no pueden tener el mismo color?

(b) Con la cantidad de colores hallada en el ítem anterior, ¿de cuántas formas diferentes se puede pintar el logo?



Problema 7.

Si el cuadrado que se muestra a continuación tiene $24\,cm$ de perímetro, ¿de cuántos centímetros cuadrados es el área sombreada en su interior?



Problema 8.

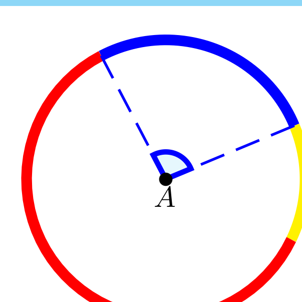
¿Cuántos números diferentes se pueden representar en el ábaco, con 5 aros, si de derecha a izquierda cada barra del ábaco debe tener al menos un aro, hasta colocar el último aro?

Problema 9.

En una veterinaria hay 4 perros y 3 gatos. Al pesar los perros de todas las formas posibles en grupos de dos, los pesos son $34\,kg$, $20\,kg$, $32\,kg$, $28\,kg$, $40\,kg$ y $26\,kg$. Los pesos de los gatos en todas las parejas posibles son $9\,kg$, $8\,kg$ y $7\,kg$. ¿Cuál es la diferencia entre el peso total de los perros y el peso total de los gatos?

Problema 10.

La piscina del colegio es circular. Según la figura, Darío recorrió la parte de perímetro amarilla, José la azul y Manuel la roja. Darío recorrió $2\,m$, José $4\,m$ y Manuel $12\,m$. A es el centro de la piscina. ¿Cuál es la medida del ángulo destacado?



Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

Solucionario
Primera Capacitación
Nivel Avanzado
Grado 5°

Solución Problema 1.

Note que $\boxed{2021} = 2021 \times (2021 - 2021) = 2021 \times 0 = 0$, luego

$$\boxed{1} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times \cdots \times \boxed{2021} = \boxed{1} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times \cdots \times 0 = 0.$$

Solución Problema 2.

Dado que los huevos de pata y los huevos de gallina deben dividirse en grupos con la misma cantidad de huevos (sin juntarse entre ellos), entonces esta cantidad es un divisor común de 180 y 168. Pero se quiere además, que la cantidad de grupos (canastos) sea la menor posible, esto se logra cuando los grupos tienen la mayor cantidad de huevos posibles, esta cantidad es el máximo divisor común entre 180 y 168, que es

$$\mathrm{mcd}(180, 168) = 12.$$

Por lo tanto, se deben hacer grupos de 12 huevos; como en total son $180 + 168 = 348$ huevos, entonces la mínima cantidad de grupos (canastos) es: $\dfrac{348}{12} = 29$.

Solución Problema 3.

La altura de la bandera es $18\,cm$, entonces la altura de cada triángulo, respecto al lado más corto, es $9\,cm$. Además, los $20\,cm$ del ancho de la bandera corresponden a dos veces la altura de los triángulos (respecto al lado más corto) más la longitud del lado más corto, de modo que el lado más corto de cada triángulo mide $20 - 2 \times 9 = 20 - 18 = 2\,cm$.
Por lo anterior, el área de cada triángulo es $\dfrac{9 \times 2}{2} = 9\,cm^2$, y como son cuatro de estos triángulos, entonces el área total coloreada es $4 \times 9 = 36\,cm^2$. Pero el área total de la bandera es $20 \times 18 = 360\,cm^2$, de ahí que la fracción del área total de la bandera que estará coloreada por los cuatro triángulos es:

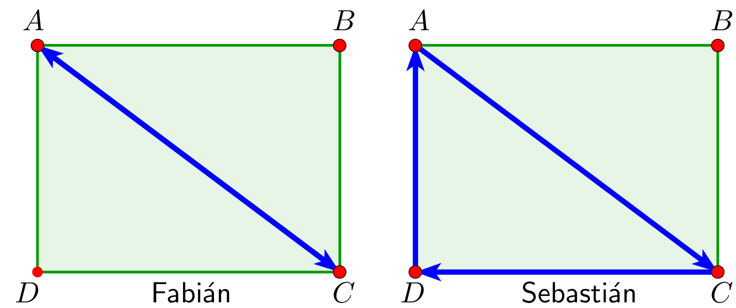
$$\frac{36}{360} = \frac{1}{10}.$$

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

SCAN ME

Solución Problema 4.

Considere la siguiente ilustración de los recorridos de Fabián y Sebastián:



Por tratarse de un rectángulo, el perímetro de la cancha es 2 veces lo que recorrió Sebastián, menos 2 veces la diagonal $\overline{AC}$, esto es lo que recorrió Fabián. De modo que los metros que Jaime recorrerá son: $2 \times 31\,m - 26\,m = 36\,m$.

Otra solución

En términos de segmentos, $AC = 13\,m$ y $AC + CD + AD = 31, m$. Luego, $\overline{CD} + \overline{AD} = 18\,m$. El perímetro de la cancha del colegio por ser un rectángulo es: $AB+BC+CD+AD = 2\times(CD+AD) = 36\,m$. Por lo tanto, Jaime recorrerá $36\,m$.

Solución Problema 5.

(a) Si Pascal dice el número 10, Hermes hace las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} 10 \times 9 &= 90, \\ 90 + 21 &= 111, \\ 111 \div 3 &= 37, \\ 37 - 5 &= 32. \end{aligned}$$

Por lo tanto Hermes gritó el número 32.

(b) Si Hermes gritó el número 2021, devolviendo las operaciones que hizo Hermes, tenemos:

$$\begin{aligned} 2021 + 5 &= 2026, \\ 2026 \times 3 &= 6078, \\ 6078 - 21 &= 6057, \\ 6057 \div 9 &= 673. \end{aligned}$$

De modo que el número dicho por Pascal es el 673.

(c) No es posible puesto que, devolviendo las operaciones que debió hacer Hermes tenemos:

$$\begin{aligned} 100 + 5 &= 105, \\ 105 \times 3 &= 315, \\ 315 - 21 &= 294, \\ 294 \div 9 &= ? \end{aligned}$$

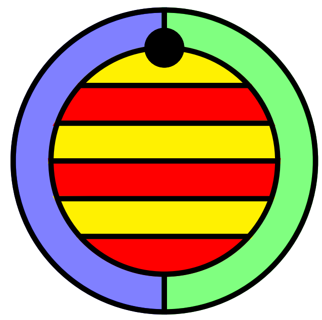
Pero 294 no es divisible entre 3 por lo tanto esta cantidad no es un número natural y Hermes solo hace operaciones con números naturales.

SCAN ME

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

Solución Problema 6.

(a) La cantidad mínima de colores necesaria para pintar el logo es 4, una manera de hacerlo es la siguiente:



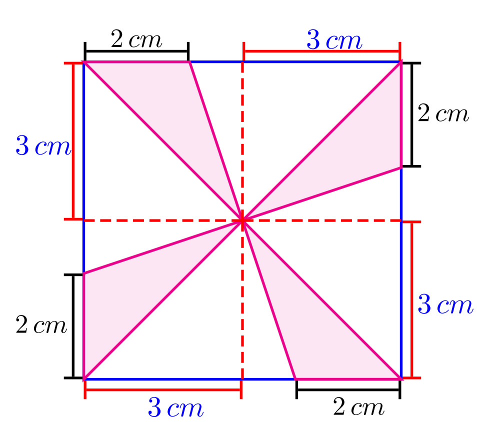
(b) Iniciando, el color de la región izquierda lo podemos elegir de 4 formas (los 4 posibles colores), luego como la región derecha es vecina de la región derecha, su color puede elegirse de 3 formas diferentes (los 3 colores restantes), finalmente los 2 colores restantes deben intercalarse en las regiones centrales, es decir estas regiones pueden pintarse de dos formas diferentes, por lo tanto hay $4 \times 3 \times 2 = 24$ formas diferentes de pintar el logo, con 4 colores.

Otra solución: Suponga que los colores son A, B, C y D. Si pintamos la región izquierda del color A entonces dado que las regiones centrales deben colorearse intercalando dos de los colores restantes, estás podrían pintarse de 6 formas: (B-C-B-C-B-C), (C-B-C-B-C-B), (B-D-B-D-B-D), (D-B-D-B-D-B), (C-D-C-D-C-D), (D-C-D-C-D-C), la región derecha se colorea del color restante. Por lo tanto, si tomamos el color A para la región izquierda tenemos 6 formas de pintar el logo. De manera análoga, si la región izquierda se pinta del color B se obtienen otras 6 formas, si se pinta de C otras 6 y si se pinta de D otras 6. En total 24 formas de pintar el logo.

También es factible hacer un bosquejo de las 24 formas de pintar el logo usando 4 colores, lo dejamos de ejercicio al lector.

Solución Problema 7.

Dado que el perímetro del cuadrado es $24\,cm$, entonces cada uno de sus lados mide $6\,cm$. Ahora, note que el vértice común de los cuatro triángulos sombreado es el centro del cuadrado, por lo tanto la altura de cada triángulo respecto a la base que está sobre un lado del cuadrado es $3\,cm$ y así el área de cada triángulo es $\dfrac{2 \times 3}{2} = 3\,cm^2$.



De modo que el área sombreada en el interior del cuadrado es

$$4 \times 3\,cm^2 = 12\,cm^2.$$

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

Solución Problema 8.

En total, se pueden representar 16 números con las condiciones del enunciado, estos son:

11111	2111	221	23	311	41	5
	1211	212	32	131	14	
	1121	122		113		
	1112					

Solución Problema 9.

Cada perro se pesó tres veces. De modo que, si consideramos la suma de los pesos dados para los perros, $180\,kg$, estamos sumando el peso de cada perro tres veces, así, si dividimos dicha suma entre 3, tenemos el peso total de los 4 perros: $60\,kg$. Sucede de manera similar con los gatos, cada uno se pesó dos veces. La suma de los pesos dados para los gatos es $24\,kg$, en esta suma el peso de cada gato está contado dos veces, luego el peso total de los 3 gatos es $12\,kg$. La diferencia entre el peso total de los perros y el peso total de los gatos es $60 - 12 = 48\,kg$.

Solución Problema 10.

El perímetro de la piscina es $18\,m$, que corresponde a los $360°$ de la circunferencia. Luego cada metro corresponde a $20°$. Como la distancia recorrida por José fue $4\,m$, entonces el ángulo destacado mide $4 \times 20 = 80°$.

SCAN ME

Informes:

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel.: 6344000 *ext.* 2316.

Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

@edumat.uis