Un problema de control para fluidos micropolares estacionarios

Exequiel Mallea Zepeda *

*Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile, emallea@ucn.cl

Abstract

En esta charla consideramos un problema de control óptimo asociado a las ecuaciones estacionarias de los fluidos micropolares en 3D, con control de borde sobre la velocidad traslacional y la velocidad de microrotación. Específicamente, discutiremos el problema de hallar una velocidad lineal u, una velocidad microrotacional w y controles h_1 y h_2 tales que minimicen el funcional

$$
\begin{aligned}
J(u,w,h_1,h_2) \quad &= \quad \frac{\beta_1}{2}\|\mathrm{rot}\,\mathrm{u}-\mathrm{u_a}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \frac{\beta_2}{2}\|\mathrm{u}-\mathrm{u_b}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \frac{\beta_3}{2}\|\mathrm{w}-\mathrm{w_d}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{\beta_4}{2}\|h_1\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{\beta_5}{2}\|h_2\|^2_{L^2(\Gamma_2)},
\end{aligned}
$$

sujeto a

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
-\nu_1\Delta u + u\cdot\nabla u &=& 2\nu_r \mathrm{rot}\,\mathrm{w} + \mathrm{f} & \text{en } \mathrm{V}', \\
-\nu_2\Delta w - \nu_3\nabla\mathrm{div}\,\mathrm{w} + 4\nu_\mathrm{r}\mathrm{w} &=& 2\nu_r \mathrm{rot}\,\mathrm{u} + \mathrm{g} & \text{en } \mathrm{H}^{-1}(\Omega), \\
u &=& h_1 & \text{sobre } \Gamma_1, \\
u &=& u_0 & \text{sobre } \Gamma_2^1 \\
T(u)\cdot n &=& 0 & \text{sobre } \Gamma_2^2, \\
w &=& w_0 & \text{sobre } \Gamma_3, \\
w &=& w_0 + h_2 & \text{sobre } \Gamma_4.
\end{array}
\right. \tag{1}
$$

Aquí, Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^3$ con frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ y $\Gamma_2 = \Gamma_2^1 \cup \Gamma_2^2$. En (1), ν_1, ν_2, ν_3 y ν_r son constantes positivas que representan coeficientes relacionados con las propiedades viscosas del fluido y f y g son fuerzas externas actuando sobre el fluido. El término $T(u) = -pu + \mu(\nabla u + (\nabla u)^T)$ y representa el llamado tensor de estrés. El espacio V' es el dual de $V = \{u \in H_0^1(\Omega) : \mathrm{div}\,\mathrm{u} = 0\}$, siendo $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \ \text{ sobre } \Gamma\}$ y el espacio $H^{-1}(\Omega)$ es el dual del espacio $H_0^1(\Omega)$. En la parte Γ_1 se aplica un control h_1 del tipo Dirichlet para la velocidad lineal del fluido y en la parte Γ_2 se aplica un control h_2 del tipo Dirichlet para la velocidad microrotacional del fluido.

El funcional J representa una medida entre la turbulencia del flujo y un campo lineal dado u_a, lo cual es descrito por el primer sumando, la velocidad traslacional del flujo y una velocidad dada u_b,

como se observa en el segundo sumando y la relación entre la velocidad microrotacional del flujo y una velocidad microrotacional deseada w_d, descrito en el tercer sumando. El cuarto y quinto sumando son introducidos con el objetivo de generar un balanceo en el funcional. En la definición de J, los parámetros $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ y β_5 son números reales no negativos, donde al menos uno de ellos es no nulo.

Mostraremos la existencia de solución óptima, ésto es, la existencia de un elemento $(\hat{u}, \hat{w}, \hat{h}_1, \hat{h}_2) \in \mathcal{S}_{ad}$ tal que

$$J(\hat{u}, \hat{w}, \hat{h}_1, \hat{h}_2) = \min_{(u,w,h_1,h_2)\in\mathcal{S}_{ad}} J(u, w, h_1, h_2),$$

donde $\mathcal{S}_{ad}$ es el conjunto de soluciones admisibles para el problema de control óptimo, es decir $\mathcal{S}_{ad} = \{(u, w, h_1, h_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{1/2}(\Gamma_2) \ : \ J(u, , w, h_1, h_2) < \infty$ y satisface (1)$\}$. Además, aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange obtendremos las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden y derivaremos un sistema de optimalidad.

References

[1] A. V. Fursikov *Optimal Control of distributed Systems. Theory and Applications.* Translations of mathematical monographs, AMS, (2000).

[2] M. Gunzburger, L. Hou & T.P. Svobodny, *Boundary velocity control of incompressible flow with an application to viscous drag reduction.* SIAM J. Control and Optimization, Vol. 30, No 1, (1992), 167-181.

[3] A. Iofee & V. Tikhomirov, *Extremal Problems.* Norht Holland, Amsterdam, (1979).

[4] G. Lukaszewicz, *Micropolar fluids: Theory and Applications.* Birkhauser, (1999).

[5] R. Stavre, *Optimization and numerical approximation for Micropolar fluids.* Numer. Funct. Anal. Optim. Vol. 24, (2003), 223-241.