Universidad Industrial de Santander

Escuela de Matemáticas
Maestría en matemáticas

Examen de admisión
28 de julio de 2016

Parte 1. Diga si las afirmaciones siguientes son falsa o verdadera. Si es falsa de un contraejemplo y si es verdadera haga la respectiva demostración. En los siguientes ejercicios asuma que los espacio vectoriales son de dimensión finita. **Escoja cinco (5) de los siete (7) puntos.**

1. Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal entonces $\mathbb{R}^2 = N(T) \oplus Im(T)$.
2. Si V es un espacio vectorial y W_1, W_2, U, son subespacios de V con $U \oplus W_1 = U \oplus W_2$ entonces $W_1 = W_2$.
3. Si F_1 y F_2 son subespacios vectoriales de E tal que $dim\ F_1 + dim\ F_2 = dim\ E$, entonces existe una transformación lineal $T : E \to E$ tal que $Nu(T) = F_1$ y $ImT = F_2$.
4. Si $S \subseteq V$ donde V es un espacio con producto interno entonces $S^{\perp\perp} = S$.
5. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal inyectiva y S es un subespacio de V entonces $dim\ T(S)$ es igual a $dim\ S$.
6. Si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A + I = 0$, entonces A es invertible.
7. AB y BA tienen los mismos autovalores.

Parte 2. Resuelva los siguientes puntos. Justifique adecuadamente sus respuestas. **Escoja cuatro (4) de los siete (7) puntos.**

1. Analice la convergencia o no, de la sucesión $(a)^{1/n}$ siendo a un real positivo.
2. Demuestre que toda sucesión acotada de números reales admite una subsucesión convergente.
3. Sea $r > 1$. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ converge.
4. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva, definida en un intervalo I. Demuestre que si f es monótona, entonces su imagen $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es continua.
5. Demuestre que $\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$, siendo p cualquier polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$.
6. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Demuestre que existen infinitas funciones $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que $F' = f$. ¿Puede describir el conjunto de tales funciones F?
7. De un ejemplo de una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable, que posea un conjunto infinito numerable de puntos de discontinuidad.