Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Maestría en Matemáticas
Propuesta de Examen de Admisión, I-2014

Enero del 2014

Resuelva 8 de los siguientes 10 ejercicios.

1. Sean X y Y conjuntos y $f\colon X \to Y$ una función. Si A y B son subconjuntos de X, demuestre que:

   a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

   b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Además, muestre que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ si f es inyectiva.

   c) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$. Además, muestre que $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$ si f es inyectiva.

2. Sean V y W espacios vectoriales, $T\colon V \to W$ una transformación lineal y $\{v_1, ..., v_k\}$ una base de V. Demuestre:

   a) T es inyectiva si y sólo si $\{T(v_1), ..., T(v_k)\}$ es un conjunto linealmente independiente.

   b) T es sobreyectiva si y sólo si $\{T(v_1), ..., T(v_k)\}$ genera a W.

   c) T es un isomorfismo si y sólo si $\{T(v_1), ..., T(v_k)\}$ es una base de W.

3. Sean V un espacio vectorial y $T\colon V \to V$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$. Demuestre que:

   a) 0 y 1 son los únicos valores propios de T.

   b) $V = Ker(T) \oplus Im(T)$.

   c) T es diagonalizable.

4. Sean W_1, W_2 dos subespacios de un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. De un ejemplo mostrando que $W_1 \cup W_2$ puede no ser subespacio de V. Pruebe que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y solo si $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$.

5. Sean V un espacio vectorial finitamente generado no nulo y W_1 un subespacio de V. Pruebe que existe un subespacio W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$.

6. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ y $(y_n)_{n=1}^{n=\infty}$ es una sucesión acotada, entonces $\lim x_n \cdot y_n = 0$. Use este hecho para probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{sen(nx)}{n} = 0$.

7. Demuestre que si $(x_n)_{n=1}^{n=\infty}$ es una sucesión monotona y posee una subsucesión convergente, entonces $(x_n)_{n=1}^{n=\infty}$ es convergente.

8. Pruebe que la sucesión $(n^{1/n})_{n=1}^{n=\infty}$ es convergente y calcule su límite.

9. Pruebe que todo polinomio real, de grado impar, tiene al menos una raíz real. (sugerencia: Use el teorema del valor intermedio).

10. Una función f continua en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ tiene la propiedad de que

$$\int_1^{xy} tf(t)dt = 2y\int_1^{x} tf(t)dt + x\int_1^{y} f(t)dt \tag{1}$$

para todo $x, y \neq 0$. Calcular $f(x)$ para todo $x \neq 0$ si $f(1) = 1$.