Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Maestría en Matemáticas
Propuesta de Examen de Admisión, II-2015

30 de julio de 2015

Resuelva 6 de los siguientes 10 ejercicios, 3 de Álgebra Lineal y 3 de Análisis en la recta.

Álgebra Lineal

1 Encuentre todos los posibles valores reales de k para que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix},$$

sea diagonalizable.

2 Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$.

a) Encuentre una base ortogonal de W.

b) Calcule la dimensión de W.

c) Si $T\colon \mathbb{R}^3 \to W$ es la proyección ortogonal, encuentre una representación matricial de T.

d) Calcule $W^\perp$.

e) Si $v = (1, 2, 1)$, encuentre $w \in W$ y $w' \in W^\perp$ tales que $v = w + w'$.

3 Sea $\mathbb{M}^n$ el espacio de matrices cuadradas con coeficientes reales de n filas por n columnas. Si $V = \{A \in \mathbb{M}^n : A^T = A\}$, entonces:

a) Demuestre que V es un subespacio vectorial de $\mathbb{M}^n$.

b) Encuentre una base de V y calcule su dimensión.

c) Defina una transformación lineal sobreyectiva $T\colon \mathbb{M}^n \to V$.

4 Defina una transformación lineal, si es posible, $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $Nu(T) = Im(T) = \{(w,x,y,z) : w - 3x + y = 0 \text{ y } z = 0\}$. (La notación usada hace referencia a $Nu(T) = \{x \in \mathbb{R}^4 : T(x) = 0\}$ y $Im(T) = \{z \in \mathbb{R}^4 : \text{ existe } x \in \mathbb{R}^4 \text{ donde } T(x) = z\}$.)

5 Demuestre que una matriz cuadrada A de rango 1 cumple que $tr(A) = 0$ si y sólo si $A^2 = 0$ (Aquí, $tr(A)$ denota la traza de la matriz A).

Análisis en la recta

6 Demuestre que, si $a > 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$.

7 Demuestre que toda sucesión monótona y acotada de números reales es convergente.

8 Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que si para todo $x \in \mathbb{R}, x \neq a$, se tiene que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

9 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que si $A \subseteq \mathbb{R}$ es limitado entonces $f(A)$ es limitado.

10 Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) > f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $f(x_0) = 0$. Demuestre que $f(x) > 0$ para todo $x > x_0$.