Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Maestría en Matemáticas
Propuesta de Examen de Admisión, II-2013

30 de julio de 2013

Resuelva 8 de los siguientes 10 ejercicios.

1. Encuentre, si existe, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $Im(T) = Nu(T) = \{(x, y, z, w) : x + y = z = w\}$. Justifique su respuesta.

2. Demuestre que para cada entero positivo k,
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix}.$$

3. Sea $S = \{A \in \mathbb{M}_n : A = A^t\}$, ($S$ es el conjunto de las matrices simétricas de tamaño $n \times n$). Demuestre que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{M}_n$ y halle su dimensión.

4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (2x + y, y - x, 3x)$ y considere las bases $B = \{(1, 2), (2, -1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Calcule $[T]_{B,B'}$.

5. Considere la siguiente transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ tal que
$$T(a, b, c) = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & c - b \end{pmatrix}.$$
Halle el Nucleo y la Imagen de T. Encuentre una base para el Nucleo y la imagen de T.

6. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ si x es un irracional y $f(x) = 1$ si x es racional. ¿Es f integrable?

7. Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Si X es compacto, demuestre que $f(X)$ es compacto.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(0,0) = 0$ y

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0).$$

¿Es f continua en $(0,0)$? ¿$\partial_x f$ y $\partial_y f$ existen en $(0,0)$? ¿Para cuáles vectores $\overrightarrow{u} \neq (0,0)$, existe la derivada direccional de f en $(0,0)$, en la dirección de $\overrightarrow{u}$? Evalúela cuando ella exista. ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

9. Sea $X \subset F_1 \cup F_2$, siendo F_1 y F_2 cerrados de $\mathbb{R}$. Demuestre que si una función $f : X \to \mathbb{R}$ es tal que las restricciones $f|_{X \cap F_1}$ y $f|_{X \cap F_2}$ son continuas, entonces f es continua.

10. Dada una función g, continua para todo x, tal que $g(1) = 5$ e $\int_0^1 g(t)dt = 2$. Sea $f(x) = 1/2 \int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$. Demuestre que $f'(x) = x \int_0^x g(t)dt - \int_0^x tg(t)dt$. Calcular $f''(1)$ y $f'''(1)$.