



Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

**EXAMEN DE
INGRESO**
HEPT

EXAMEN DE ÁLGEBRA LINEAL

1. (Valor 1.0) Sea $C^\infty(\mathbb{R})$ el conjunto formado por las funciones infinitamente diferenciables. Muestre que con la suma y el producto por escalar usuales el conjunto $C^\infty(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial de dimensión infinita.
2. (Valor 1.0) Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal idempotente, esto es $T \circ T = T$. Muestre que para todo $v \in V$ existen únicos $v_1 \in \ker T$ y $v_2 \in \text{Im } T$ tales que $v = v_1 + v_2$.
3. (Valor 1.0) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ definamos el producto

$$\langle (x_1, y_1); (x_2, y_2) \rangle = a^2 x_1 x_2 + b^2 y_1 y_2,$$

donde a y b son números reales positivos.

- a) Demuestre que el producto definido anteriormente es un producto interno.
 - b) Encuentre los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $\|(x, y)\| = 6$ y describa el lugar geométrico de estos puntos.
4. (Valor 1.0) Determine la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya representación matricial en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Determine si T es un isomorfismo

5. (Valor 1.0) Dada la matriz del problema anterior calcular los valores y vectores propios. Determine si A es diagonalizable.

- Justifique adecuadamente cada paso en la solución de los ejercicios.
- No está permitido retirarse del salón una vez iniciado el examen.
- No está permitido el uso de aparatos electrónicos.
- El profesor no responderá preguntas de los aspirantes.
- Tiempo total del examen: 1 hora y 45 minutos.

Ejercicios

Resuelva 4 de los siguientes ejercicios:

1. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| < \infty.$$

Demuestre que (x_n) es convergente.

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) > f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $f(x_0) = 0$. Demuestre que $f(x) > 0$ para todo $x > x_0$.
3. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no negativa. Demuestre que si

$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

entonces $f \equiv 0$ en $[a, b]$.

4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que f alcanza su máximo y su mínimo en $[a, b]$, es decir, existen $x_m, x_M \in [a, b]$ tales que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

5. Sea $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$, $I_n = [a_n, b_n]$, con $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

Muestre además que si $b_n - a_n \rightarrow 0$, entonces la intersección contiene exactamente un punto.

6. Sea $F \subset \mathbb{R}$. Demuestre que F es cerrado si y solo si para toda sucesión $(x_n) \subset F$ con $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$, se tiene $x \in F$.