Universidad Industrial de Santander

Examen Admisión
Análisis en la Recta
Maestría en Matemáticas
Enero 20 de 2026
Escuela de Matemáticas

- Justifique adecuadamente cada paso en la solución de los ejercicios.
- No está permitido retirarse del salón una vez iniciado el examen.
- No está permitido el uso de aparatos electrónicos.
- El profesor no responderá preguntas de los aspirantes.
- Tiempo total del examen: 1 hora y 45 minutos.

Ejercicios

1. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, con $\sup A = s \notin A$. Demuestre que existe una sucesión estrictamente creciente (a_n) en A que converge a s.

2. Sea $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que si $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, entonces $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ existe.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Suponga que existen dos subconjuntos densos $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que $f|_A$ es no-decreciente y $f|_B$ es no-creciente. Demuestre que f es constante.

4. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función tal que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para todo $x \neq y$ en $[a, b]$. Demuestre que existe un único punto fijo. ¿Es necesaria la condición de que la imagen esté contenida en $[a, b]$? Justifique su respuesta.

5. Demuestre que si $f : K \to \mathbb{R}$ es continua y $K \subset \mathbb{R}$ es compacto, entonces f es uniformemente continua en K.

	Universidad Industrial de Santander Facultad de Ciencias Escuela de Matemáticas	***Álgebra Lineal*** Examen Admisión Enero de 2026

Instrucciones:

- Conteste de manera ordenada y apoye sus respuestas con las justificaciones adecuadas.
- No se permite el préstamo de borradores, calculadoras, lápices, etc.
- El profesor no responderá preguntas, porque parte de la evaluación es la comprensión de los enunciados.
- No se permite el uso de teléfonos celulares durante el examen.

---

1. (Valor 1.0) Sea $W = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f(x) = f(1-x),\ \text{para todo } x \in [0,1]\} \subseteq \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$. Demuestre que W es un subespacio del espacio vectorial $V = \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$.

   Nota: $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ es el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de las funciones definidas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, con la suma y el producto por escalar usuales.

2. (Valor 1.0) Determinar los valores de a y b para que el conjunto $S = \{(1, a+b, 3), (1, a-b, 1), (1,1,1)\}$, sea linealmente independiente.

3. (Valor 1.0) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ definamos el producto

   $$\langle (x_1, y_1); (x_2, y_2) \rangle = 4x_1x_2 + 9y_1y_2.$$

   a) Demuestre que el producto definido anteriormente es un producto interno.

   b) Encuentre los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $\|(x, y)\| = 6$ y describa el lugar geométrico de estos puntos.

4. (Valor 1.0) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que

   $$T(v_1 + v_2 + v_3) = (1, 0), \qquad T(-v_1 + v_2 + v_3) = (1, 1), \qquad T(v_1 - v_2 + v_3) = (0, 1).$$

   Donde $\{v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,0,1), v_3 = (0,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

   a) Encuentre una expresión general para $T(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   b) Determine si T es inyectiva y/o sobreyectiva.

5. (Valor 1.0) Dada la matriz

   $$A = -\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

   calcular los valores y vectores propios. Mostrar que A satisface la transformación $A = PDP^{-1}$, donde P es la matriz de vectores propios y D la matriz diagonal.