Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Maestría en Matemáticas
Propuesta de Examen de Admisión, I-2013

29 de enero de 2013

Resuelva 8 de los siguientes 10 ejercicios.

1. Verifique si la siguiente matriz es o no diagonalizable y explique por qué

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Sean V un espacio vectorial y $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) $Im(T) \cap Nu(T) = \{0\}$.

   b) Si $T(T(v)) = 0$ entonces $T(v) = 0$.

3. Sean U y V dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y $T : U \to V$ una transformación lineal. Muestre que T es inyectiva si y solo si $Nuc\ T = \{0\}$.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demuestre que $A^n = \frac{3^n-1}{2}A + \frac{3-3^n}{2}I$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

5. ¿Es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ un espacio vectorial sobre el campo de los números racionales $\mathbb{Q}$? Si lo es, ¿qué dimensión tiene?

6. Encuentre todos los puntos sobre la curva $x^2y^2+xy = 2$ donde la pendiente de la recta tangente es -1.

7. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que si para todo $x \in \mathbb{R}, x \neq a$, se tiene que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

8. Encuentre el área de la región D en el plano, acotada por la curva C parametrizada por la función vectorial $\alpha(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, Sugerencia: Use el Teorema de Green, $\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dA = \oint_C P dx + Q dy$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(0,0) = 0$ y

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0).$$

¿Es f continua en $(0,0)$? ¿$\partial_x f$ y $\partial_y f$ existen en $(0,0)$? ¿Para cuáles vectores $\overrightarrow{u} \neq (0,0)$, existe la derivada direccional de f en $(0,0)$, en la dirección de $\overrightarrow{u}$? Evalúela cuando ella exista. ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para cualesquiera x e y en $\mathbb{R}$. Demuestre que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = rx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.