Universidad Industrial de Santander

Examen Admisión
Análisis en la Recta
Maestría en Matemáticas
Febrero de 2021
Escuela de Matemáticas

Resuelva 4 de los siguientes ejercicios.

1. Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Si X es compacto, demuestre que $f(X)$ es compacto.
2. Sea $X \subset F_1 \cup F_2$, siendo F_1 y F_2 cerrados de $\mathbb{R}$. Demuestre que si una función $f : X \to \mathbb{R}$ es tal que las restricciones $f|_{X\cap F_1}$ y $f|_{X\cap F_2}$ son continuas, entonces f es continua.
3. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) > f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $f(x_0) = 0$. Demuestre que $f(x) > 0$ para todo $x > x_0$.
4. Dada una función g, continua para todo x, tal que $g(1) = 5$ e $\int_0^1 g(t)dt = 2$. Sea $f(x) = (1/2)\int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$. Demuestre que $f'(x) = x\int_0^x g(t)dt - \int_0^x tg(t)dt$. Calcular $f''(1)$ y $f'''(1)$.
5. Demuestre que toda sucesión acotada de números reales admite una subsucesión convergente.
6. Muestre que el límite puntual de una sucesión de funciones reales continuas (respectivamente, integrables) no necesariamente es una función continua (respectivamente, integrable).

El tiempo del examen es de una hora y treinta minutos. Al terminar el tiempo del examen tienen 10 minutos para enviar los soportes en formato pdf al correo xxxxxxxx@uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander

Examen Admisión
Álgebra lineal
Maestría en Matemáticas
Febrero 05 de 2021
Escuela de Matemáticas

Resuelva 4 de los siguientes ejercicios.

1. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, con un producto interno $\langle .,. \rangle$ y norma inducida denotada por $\|.\|$; para un elemento no nulo $w \in V$, se define $f_w : V \longrightarrow V$, donde $f_w(x) = \frac{\langle x,w \rangle}{\langle w,w \rangle} w$, $x \in V$. Probar que f_w es una transformación lineal de V en V con la propiedad que cada valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ satisface, $|\lambda| \leq 1$.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Si $f : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal, denotemos por $f^2 = f \circ f$. Probar que, $\ker(f) = \ker(f^2)$ si y sólo si $Im(f) = Im(f^2)$.

3. Determine una matriz $A \in \mathbb{R}_{3\times 3}$ tal que $\mathcal{N}(A) = gen(e_1, e_3)$ y $\mathcal{R}(A) = gen(e_2)$; donde como es usual, e_1, e_2, e_3 son los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{N}(A)$ y $\mathcal{R}(A)$ denotan los espacios nulo y columna de A.

4. En $V = P_3$ el espacio vectorial de formado por todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ y grado ≤ 3 (junto con el polinomio nulo); en V considére el subespacio $S = \{p(x) \in V : p(1) = p(-1)\}$. Determine un subespacio T de V tal que $V = S \oplus T$, donde $\oplus$ denota la suma directa de los subespacios.

5. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $f \in Aut(V)$, se define el **grafo** de f como $\Gamma = Grafo(f) = \{(v, f(v)) : v \in V\}$. Probar que Γ es un subespacio del espacio producto $V \times V$ y $(V \times V)/\Gamma \cong V$.

6. Sea $F(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de la funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y sean $W_1 = \{f \in F(\mathbb{R}) : f \text{ es par}\}$, $W_2 = \{f \in F(\mathbb{R}) : f \text{ es impar}\}$. Probar que W_1 y W_2 son subespacios de $F(\mathbb{R})$ tales que $F(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$.