Examen Admisión
Análisis en la Recta
Maestría en Matemáticas
Julio 22 de 2021
Escuela de Matemáticas

Resuelva 4 de los siguientes ejercicios:

1. Demuestre que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no es enumerable. Concluya de esto que el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ no es enumerable.

2. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado. Dada una familia $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ de intervalos abiertos tales que $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$, demuestre que existe un número finito de ellos, $I_{\lambda_1}, I_{\lambda_2}, ..., I_{\lambda_n}$, tales que $[a, b] \subset I_{\lambda_1} \cup I_{\lambda_2} \cup \cdots \cup I_{\lambda_n}$.

3. Demuestre que si toda función real continua, definida sobre un cierto conjunto X, es acotada (i.e lleva conjuntos acotados de X en conjuntos acotados de $\mathbb{R}$), entonces el conjunto X es compacto.

4. Sea $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   Muestre que F es diferenciable. ¿F' es continua en $x = 0$? ¿F' es integrable en $[-1, 1]$?

5. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ si x es un irracional y $f(x) = 1$ si x es racional. Use la definición de integral de Riemann para estudiar la integrabilidad de f.

6. De un ejemplo de una sucesión de funciones (f_n) integrables sobre $[0, 1]$ que sea convergente puntualmente, digamos a una función f (i.e tales que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [0, 1]$), y tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx.$$

El tiempo del examen es de una hora y treinta minutos. Al terminar el tiempo del examen tienen 10 minutos para enviar los soportes en formato pdf al correo xxxxxxx@uis.edu.co

Examen Admisión
Álgebra lineal
Maestría en Matemáticas
Julio 22 de 2021
Escuela de Matemáticas

Cada problema tiene un valor de 25 puntos.

1. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
¿Es A es diagonalizable?, justifique su respuesta.

2. Determine todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que
$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } BA = \begin{pmatrix} a & 5 \\ -2 & b \end{pmatrix},$$
donde $A, B \in \mathbb{R}_{2\times 2}$.

3. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ con $\dim_F(V) = 4$; tomemos $\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq V$ y definamos los subespacios $U = gen(v_1, v_2)$ y $W = gen(v_3, v_4)$. Probar que $\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de V sobre F si y sólo si $V = U \oplus W$. Donde $\oplus$ denota la suma directa de los subespacios.

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Si $f : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal, denotemos por $f^2 = f \circ f$. Probar que, $\ker(f) = \ker(f^2)$ si y sólo si $Im(f) = Im(f^2)$.