Espacio dual y series de potencias

Michael Alexánder Rincón Villamizar

Universidad Industrial de Santander

junio, 2018

Parte I: el espacio dual

Definition

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. El dual algebraico de V es por definición el conjunto de todos los funcionales lineales en V. Este espacio será denotado por $V^{\#}$.

Parte I: el espacio dual

Definition

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. El dual algebraico de V es por definición el conjunto de todos los funcionales lineales en V. Este espacio será denotado por $V^{\#}$.

Theorem

Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, entonces $V^{\#}$ también tiene dimensión finita y además $\dim V = \dim V^{\#}$.

Proof.
Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base para V y definamos para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Puede verificarse que el conjunto $\mathcal{B}^\# = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ es una base para $V^\#$. $\square$

Proof.
Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base para V y definamos para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Puede verificarse que el conjunto $\mathcal{B}^\# = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ es una base para $V^\#$. $\square$

La base $\mathcal{B}^\#$ de $V^\#$ construida en la demostración anterior es llamada *base dual de* $\mathcal{B}$.

Example

Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1,-1),(1,1)\}$. Construya la base dual $\mathcal{B}^{\#}$.

Example

Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1, -1), (1, 1)\}$. Construya la base dual $\mathcal{B}^{\#}$.

Solución: $\mathcal{B}^{\#} = \{\phi_1, \phi_2\}$, donde

$$\phi_1(x, y) = \frac{x - y}{2}, \quad \phi_1(x, y) = \frac{x + y}{2}.$$

Teorema de Riesz en dimensión finita

Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial. Si $f \in V^{\#}$ es común usar la notación $\langle f, v\rangle$ para indicar la acción de f en un elemento $v \in V$. Por otro lado, si $u, v \in \mathbb{K}^n$ denotamos por $\langle u, v\rangle$ el producto interno usual de los vectores u y v.

Teorema de Riesz en dimensión finita

Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial. Si $f \in V^{\#}$ es común usar la notación $\langle f, v\rangle$ para indicar la acción de f en un elemento $v \in V$. Por otro lado, si $u, v \in \mathbb{K}^n$ denotamos por $\langle u, v\rangle$ el producto interno usual de los vectores u y v.

Theorem

Si $f \in (\mathbb{K}^n)^{\#}$, entonces existe un único vector $u_f \in \mathbb{K}^n$ tal que $f(v) = \langle u_f, v\rangle$ para todo $v \in \mathbb{K}^n$.

Teorema de Riesz en dimensión finita

Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial. Si $f \in V^{\#}$ es común usar la notación $\langle f, v \rangle$ para indicar la acción de f en un elemento $v \in V$. Por otro lado, si $u, v \in \mathbb{K}^n$ denotamos por $\langle u, v \rangle$ el producto interno usual de los vectores u y v.

Theorem

Si $f \in (\mathbb{K}^n)^{\#}$, entonces existe un único vector $u_f \in \mathbb{K}^n$ tal que $f(v) = \langle u_f, v \rangle$ para todo $v \in \mathbb{K}^n$.

Proof.

Ejercicio. $\square$

Dualidad

Theorem

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base para V. Entonces valen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} [v]_{\mathcal{B}} &= [v_1^*(v), \ldots, v_n^*(v)] \quad y \\ [v^*]_{\mathcal{B}^\#} &= [v^*(v_1), \ldots, v^*(v_n)], \end{aligned}$$

para todo $v \in V$ y $v^* \in V^\#$.

Dualidad

Theorem

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base para V. Entonces valen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} [v]_{\mathcal{B}} &= [v_1^*(v), \ldots, v_n^*(v)] \quad y \\ [v^*]_{\mathcal{B}^\#} &= [v^*(v_1), \ldots, v^*(v_n)], \end{aligned}$$

para todo $v \in V$ y $v^* \in V^\#$.

Proof.

Ejercicio. $\square$

Dualidad

Theorem

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base para V. Entonces valen las siguientes relaciones

$$[v]_{\mathcal{B}} = [v_1^*(v), \ldots, v_n^*(v)] \quad y$$
$$[v^*]_{\mathcal{B}^\#} = [v^*(v_1), \ldots, v^*(v_n)],$$

para todo $v \in V$ y $v^* \in V^\#$.

Proof.

Ejercicio. $\square$

Theorem

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $\mathcal{B}_1$ una base para $V^\#$. Entonces existe una única base $\mathcal{B}$ de V tal que $\mathcal{B}^\# = \mathcal{B}_1$.

Problema de aplicación

Example

Encontrar un polinomio P de grado dos tal que $P(0) = 3$, $P(1) = 2$, y $P(2) = 5$.

Problema de aplicación

Example

Encontrar un polinomio P de grado dos tal que $P(0) = 3$, $P(1) = 2$, y $P(2) = 5$.

Solución: note que las condiciones que satisface el polinomio P que debemos encontrar pueden ser escritas en la siguiente forma: $\delta_0(P) = 3$, $\delta_1(P) = 2$ y $\delta_2(P) = 3$, donde $\delta_a \colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ es el funcional definido como

$$\delta_a(Q) = Q(a) \quad \text{para todo } Q \in \mathbb{R}_2[x].$$

Problema de aplicación

Example

Encontrar un polinomio P de grado dos tal que $P(0) = 3$, $P(1) = 2$, y $P(2) = 5$.

Solución: note que las condiciones que satisface el polinomio P que debemos encontrar pueden ser escritas en la siguiente forma: $\delta_0(P) = 3$, $\delta_1(P) = 2$ y $\delta_2(P) = 3$, donde $\delta_a \colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ es el funcional definido como

$$\delta_a(Q) = Q(a) \quad \text{para todo } Q \in \mathbb{R}_2[x].$$

Observe que el conjunto $\mathcal{B}_1 = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ es una base para $\mathbb{R}_2[x]^{\#}$. Si lográramos encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $\mathcal{B}^{\#} = \mathcal{B}_1$, el problema estará resulto.

Por el teorema anterior, existe una base $\mathcal{B} = \{P_0, P_1, P_2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $\mathcal{B}^{\#} = \mathcal{B}_1$.

Por el teorema anterior, existe una base $\mathcal{B} = \{P_0, P_1, P_2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $\mathcal{B}^{\#} = \mathcal{B}_1$.
De tal suerte que

$$P_0^* = \delta_0$$
$$P_1^* = \delta_1$$
$$P_2^* = \delta_2$$

Por el teorema anterior, existe una base $\mathcal{B} = \{P_0, P_1, P_2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $\mathcal{B}^{\#} = \mathcal{B}_1$.
De tal suerte que

$$
\begin{aligned}
P_0^* &= \delta_0 \\
P_1^* &= \delta_1 \\
P_2^* &= \delta_2
\end{aligned}
$$

Para encontrar P_0, observe que las ecuaciones anteriores implican que

$$
\begin{aligned}
1 &= \delta_0(P_0) = P_0(0) \\
0 &= \delta_1(P_0) = P_0(1) \\
0 &= \delta_2(P_0) = P_0(2)
\end{aligned}
$$

Luego $P_0(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$. De modo análogo se encuentra que $P_1(x) = -x(x-2)$ y $P_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$.

Luego $P_0(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$. De modo análogo se encuentra que $P_1(x) = -x(x-2)$ y $P_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$.

De modo que la representación del polinomio P en términos de la base $\mathcal{B}$ es

$$\begin{aligned} [P]_{\mathcal{B}} &= [P_0^*(P), P_1^*(P), P_2^*(P)] \\ &= [\delta_0^*(P), \delta_1^*(P), \delta_2^*(P)] \\ &= [3, 2, 5]. \end{aligned}$$

Luego $P_0(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$. De modo análogo se encuentra que $P_1(x) = -x(x-2)$ y $P_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$.

De modo que la representación del polinomio P en términos de la base $\mathcal{B}$ es

$$\begin{aligned} [P]_{\mathcal{B}} &= [P_0^*(P), P_1^*(P), P_2^*(P)] \\ &= [\delta_0^*(P), \delta_1^*(P), \delta_2^*(P)] \\ &= [3, 2, 5]. \end{aligned}$$

Es decir, $P(x) = \frac{3}{2}(x-1)(x-2) - 2x(x-2) + \frac{5}{2}x(x-1)$.

Luego $P_0(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$. De modo análogo se encuentra que $P_1(x) = -x(x-2)$ y $P_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$.

De modo que la representación del polinomio P en términos de la base $\mathcal{B}$ es

$$\begin{aligned}[P]_{\mathcal{B}} &= [P_0^*(P), P_1^*(P), P_2^*(P)] \\ &= [\delta_0^*(P), \delta_1^*(P), \delta_2^*(P)] \\ &= [3, 2, 5].\end{aligned}$$

Es decir, $P(x) = \frac{3}{2}(x-1)(x-2) - 2x(x-2) + \frac{5}{2}x(x-1)$.

Resuelva: encontrar un polinomio P de grado tres tal que $P(1) = 3$, $P(2) = 1$, $P(-1) = 2$ y $P(-2) = 4$.

Aplicación a las series de potencias

Sea $\mathcal{F}[t]$ la colección de todas las series formales de potencias en la variable t y con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Aplicación a las series de potencias

Sea $\mathcal{F}[t]$ la colección de todas las series formales de potencias en la variable t y con coeficientes en $\mathbb{K}$.
Es decir, un elemento $f \in \mathcal{F}[t]$ es de la forma

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad \text{donde } a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En $\mathcal{F}[t]$ definimos la adicción y multiplicación como sigue: si $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ y $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, entonces

$$f(t) + g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) t^k,$$

y

$$f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad \text{donde } c_k = \textstyle\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Considere el espacio vectorial $V = \mathbb{K}[x]$. Se mostrará que todo elemento de $\mathcal{F}[t]$ puede ser identificado con un elemento de $V^{\#}$.

Considere el espacio vectorial $V = \mathbb{K}[x]$. Se mostrará que todo elemento de $\mathcal{F}[t]$ puede ser identificado con un elemento de $V^{\#}$.

Observe que el conjunto $\{1, x, \ldots, x^n, \ldots\}$ es una base para $\mathbb{K}[x]$. Si $f \in \mathcal{F}[t]$, definimos

$$\langle f(t), x^n \rangle = a_n, \quad \text{si } f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k.$$

Example

Sea $f(t) = t^k$, donde $k \in \mathbb{N}$. ¿A qué elemento corresponde f en $V^{\#}$?

Example

Sea $f(t) = t^k$, donde $k \in \mathbb{N}$. ¿A qué elemento corresponde f en $V^{\#}$?

Solución: $\langle t^k, p(x) \rangle = p^{(k)}(0)$, para todo $p \in \mathbb{K}[x]$.

Ahora veamos que a todo elemento $L \in V^{\#}$ le corresponde un elemento $f_L \in \mathcal{F}[t]$.

Ahora veamos que a todo elemento $L \in V^{\#}$ le corresponde un elemento $f_L \in \mathcal{F}[t]$.

Definamos

$$f_L(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle L, x^k \rangle}{k!} t^k.$$

Ahora veamos que a todo elemento $L \in V^{\#}$ le corresponde un elemento $f_L \in \mathcal{F}[t]$.

Definamos

$$f_L(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle L, x^k \rangle}{k!} t^k.$$

Theorem

La correspondencia $L \mapsto f_L$ define un isomorfismo entre los espacios vectoriales $V^{\#}$ y $\mathcal{F}[t]$.

Example

Considere el funcional $\delta_a \in V^{\#}$ dado por $\delta_a(p) = p(a)$. Encontrar f_{δ_a}.

Example

Considere el funcional $\delta_a \in V^{\#}$ dado por $\delta_a(p) = p(a)$. Encontrar f_{δ_a}.

Solución: $f_{\delta_a}(t) = e^{at}$.

Example

Si $a, b \in \mathbb{K}$, encontrar el producto de los funcionales δ_a y δ_b.

Example

Si $a, b \in \mathbb{K}$, encontrar el producto de los funcionales δ_a y δ_b.

Solución: $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

Example

Encontrar el funciónal $f(t)$ tal que

$$\langle f(t), p(x)\rangle = \int_0^\infty p(u)e^{-u}\,du, \quad \text{para todo } p \in \mathbb{K}[x]. \tag{1}$$

Example

Encontrar el funciónal $f(t)$ tal que

$$\langle f(t), p(x) \rangle = \int_0^\infty p(u)e^{-u}\, du, \quad \text{para todo } p \in \mathbb{K}[x]. \tag{1}$$

Solución: $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$.

Example

Encontrar el funciónal $f(t)$ tal que

$$\langle f(t), p(x)\rangle = \int_0^a p(u)\,du, \quad \text{para todo } p \in \mathbb{K}[x]. \tag{2}$$

Example

Encontrar el funciónal $f(t)$ tal que

$$\langle f(t), p(x) \rangle = \int_0^a p(u)\,du, \quad \text{para todo } p \in \mathbb{K}[x]. \tag{2}$$

Solución: $f(t) = \dfrac{e^{at} - 1}{t}$.

Bibliografía

S. Roman, *Advanced linear algebra.* Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 135. Springer, New York, 2008.