

# ¡PREPÁRATE PARA LAS OMU!

## DESAFÍO SEMANAL 2

### Apreciado estudiante:

A continuación, te presentamos tres retos en distintos niveles de dificultad. La idea es que entrenes a tu propio ritmo y elijas el nivel que mejor se adapte a tu preparación.

Te invitamos a resolverlos, probar diferentes estrategias y discutir tus ideas con compañeros y profesores. Lo importante no es solo encontrar la respuesta, sino también descubrir formas ingeniosas y bien fundamentadas de llegar a ella.

#### NIVEL BÁSICO. Desafío cartesiano: el cuadrado oculto

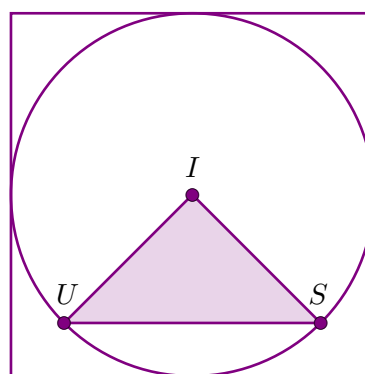
Los lados de un cuadrado son paralelos a los ejes del plano cartesiano. Si los puntos  $(3, 5)$ ,  $(7, 2)$  y  $(10, 8)$  se encuentran ubicados sobre tres de los lados del cuadrado, determine:

- (a) El área del cuadrado.
- (b) El perímetro del cuadrado.
- (c) Las coordenadas de los cuatro vértices.

#### NIVEL MEDIO. Un triángulo llamado UIS

En la siguiente figura, la circunferencia con centro en  $I$  está inscrita en un cuadrado de lado  $L$ . Los puntos  $U$  y  $S$  son intersecciones de las diagonales del cuadrado con la circunferencia.

- (a) Determine la medida de los ángulos internos del triángulo  $\triangle UIS$ .
- (b) Exprese el área y el perímetro del triángulo  $\triangle UIS$  en términos de  $L$ .



#### NIVEL AVANZADO. Rompecabezas de las áreas proporcionales

En un triángulo  $ABC$ , los puntos  $E$  y  $F$  están sobre sus lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$ , respectivamente; de tal manera que  $AE = 6\text{ cm}$ ,  $EB = 3\text{ cm}$ ,  $AF = 4\text{ cm}$  y  $FC = 8\text{ cm}$ . Si el área de  $EBCF$  es  $35\text{ cm}^2$ , ¿cuál es el área del triángulo  $ABC$ ?

### Informes:

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel.: 6344000 ext. 1229, 2316.

 Olimpiadas Matemáticas UIS.

 @edumat.uis

# SOLUCIONARIO DESAFÍO SEMANAL 1

## SOLUCIÓN NIVEL BÁSICO.

Santiago y Daniela están explorando un artículo sobre los **números palíndromos**, popularmente conocidos como *capicúas*. Estos números poseen la fascinante propiedad de leerse de igual forma tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda.

Colabora con ellos para resolver los desafíos que plantea el artículo:

- (a) ¿Cuántos números capicúas existen que tengan exactamente 4 cifras?
- (b) ¿Cuántos de los números capicúas de 4 cifras son pares?
- (c) ¿Cuál es el mayor número capicúa de 4 cifras que es múltiplo de 3?
- (d) ¿Cuál es el menor número capicúa de 5 cifras que es múltiplo de 5 y todas sus cifras son números primos?
- (e) ¿Cuántos números capicúas de 3 cifras son, a su vez, números primos?
- (f) ¿Cuántos números capicúas de 5 cifras están compuestos por exactamente dos dígitos diferentes? (Ejemplos: 12121 o 55855).

### Solución:

- (a) ¿Cuántos números capicúas existen que tengan exactamente 4 cifras?

Un número capicúa de 4 cifras debe tener la estructura  $ABBA$ . Para hallar el total de combinaciones, analizamos las opciones para cada dígito:

- **Cifra A:** Puede tomar valores del  $\{1, 2, \dots, 9\}$ . Son **9 opciones** (la primera cifra no puede ser 0).
- **Cifra B:** Puede tomar valores del  $\{0, 1, \dots, 9\}$ . Son **10 opciones**.

Debido a la simetría del número, las posiciones restantes quedan automáticamente determinadas por las primeras (tienen solo 1 opción). Visualmente, el conteo de posibilidades es:

$$\underbrace{\textcircled{9}}_A \times \underbrace{\textcircled{10}}_B \times \underbrace{\textcircled{1}}_B \times \underbrace{\textcircled{1}}_A$$

Por lo tanto, existen  $9 \times 10 \times 1 \times 1 = 90$  números capicúas de 4 cifras.

- (b) ¿Cuántos de los números capicúas de 4 cifras son pares?

Para que un número sea par, su última cifra debe pertenecer al conjunto  $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ . En un capicúa de forma  $ABBA$ , la cifra  $A$  ocupa la primera y la última posición.

- **Restricción para A:** No puede ser 0 (por ser inicio de número) y debe ser par (por ser el final). Así,  $A \in \{2, 4, 6, 8\}$ , dándonos **4 opciones**.
- **Restricción para B:** Puede ser cualquier dígito sin restricciones,  $B \in \{0, 1, \dots, 9\}$ , dándonos **10 opciones**.

El esquema de conteo es:

$$\underbrace{\textcircled{4}}_A \times \underbrace{\textcircled{10}}_B \times \underbrace{\textcircled{1}}_B \times \underbrace{\textcircled{1}}_A = 40$$

Existen **40** números capicúas pares de 4 cifras.

**¡Ojo aquí!** Aunque el 0 es par, no pudimos incluirlo en la cifra  $A$  porque los números de 4 cifras no pueden empezar por cero (ejemplo: 0220 es en realidad el número 220, que solo tiene 3 cifras).

- (c) ¿Cuál es el mayor número capicúa de 4 cifras que es múltiplo de 3?

El mayor número capicúa de 4 cifras que es múltiplo de 3 es: 9999.

### Informes:

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel.: 6344000 ext. 1229, 2316.

 **Olimpiadas Matemáticas UIS.**

 **@edumat.uis**



(d) ¿Cuál es el menor número capicúa de 5 cifras que es múltiplo de 5 y todas sus cifras son números primos?

Buscamos un número de la forma  $ABCBA$  bajo las siguientes condiciones:

- **Cifras primas:**  $A, B, C \in \{2, 3, 5, 7\}$ .
- **Múltiplo de 5:** La última cifra  $A$  debe ser 0 o 5. Como 0 no es primo, entonces  $A = 5$ .

Para que el número sea el menor posible, minimizamos las cifras de izquierda a derecha ( $B$  y  $C$ ):

$$5 \quad \underline{B} \quad \underline{C} \quad \underline{B} \quad 5$$

- a) Elegimos el primo más pequeño para  $B$ : **2**.
- b) Elegimos el primo más pequeño para  $C$ : **2**.

El número resultante es **52225**.

(e) ¿Cuántos números capicúas de 3 cifras son, a su vez, números primos?

Para que un número capicúa de la forma  $ABA$  sea primo, su última cifra  $A$  debe ser impar y distinta de 5. Por tanto,  $A \in \{1, 3, 7, 9\}$ . Para cada caso, aplicamos criterios de divisibilidad y el test de la raíz cuadrada ( $\sqrt{n}$ ).

**Caso  $A = 1$ :**

- **Primos:** 101, 131, 151, 181, 191.
- **Descartes:** 111, 141, 171 (múltiplos de 3), 121 ( $11^2$ ), 161 ( $7 \times 23$ ).

**Caso  $A = 7$ :**

- **Primos:** 727, 757, 787, 797.
- **Descartes:** 707 ( $7 \times 101$ ), 737 ( $11 \times 67$ ).

**Caso  $A = 3$ :**

- **Primos:** 313, 353, 373, 383.
- **Descartes:** 323 ( $17 \times 19$ ), 343 ( $7^3$ ).

**Caso  $A = 9$ :**

- **Primos:** 919, 929.
- **Descartes:** 949 ( $13 \times 73$ ), 959 ( $7 \times 137$ ).

**Respuesta:** Existen **15** números capicúas de 3 cifras que son primos.

**Tip:** Para descartar rápidamente, suma las cifras; si da un múltiplo de 3, el número no es primo. ¡Esto eliminó 14 candidatos de un solo golpe!

**Tip Pro: El Test de la Raíz** Para saber si un número  $n$  es primo, solo necesitas probar divisibilidad con los números primos menores o iguales a  $\sqrt{n}$ .

Si ninguno de esos primos divide a  $n$  de forma exacta, entonces  $n$  es **primo**.

**¿Por qué?** Porque si  $n = a \times b$ , es imposible que ambos factores  $a$  y  $b$  sean mayores que  $\sqrt{n}$ ; al menos uno de ellos debe ser menor o igual a la raíz.

- a) **Analizando el 191:** Como  $\sqrt{191} \approx 13,8$ , solo probamos con primos hasta el 13. Al verificar divisibilidad por  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$  y ver que ninguna es exacta, concluimos que **191 es primo**.
- b) **Analizando el 323:** Como  $\sqrt{323} \approx 17,9$ , probamos los primos hasta el 17. Al llegar al 17, vemos que:

$$323 \div 17 = 19$$

Como tiene un divisor distinto de 1 y sí mismo, **323 no es primo**.

(f) ¿Cuántos números capicúas de 5 cifras están compuestos por exactamente dos dígitos diferentes? (Ejemplos: 12121 o 55855).

Un número capicúa de cinco cifras tiene la forma  $ABCBA$ . Para que posea exactamente dos dígitos distintos ( $A$  y  $B$ ), existen tres configuraciones posibles:

$$ABABA, \quad AABAA \quad \text{y} \quad ABBBA.$$

En los tres casos, el conteo se realiza de la siguiente manera:

- El dígito  $A$  tiene 9 opciones ( $A \in \{1, \dots, 9\}$ ), pues no puede ser cero.
- El dígito  $B$  Se puede elegir de 9 maneras. Puede ser cualquier dígito del  $\{0, 1, \dots, 9\}$  excepto el valor ya elegido para  $A$  (para asegurar que sean exactamente dos dígitos diferentes).

Así, por cada configuración tenemos  $9 \times 9 = 81$  posibilidades. Al ser 3 casos distintos, el total de números que cumplen las condiciones es:

$$3 \times 81 = 243$$

#### Informes:

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel.: 6344000 ext. 1229, 2316.

 **Olimpiadas Matemáticas UIS.**

 **@edumat.uis**



## NIVEL MEDIO. La anatomía del factorial

El **factorial** de un número entero positivo  $n$  se denota por  $n!$  y se define como el producto de todos los números enteros positivos menores o iguales a  $n$ :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

Por ejemplo,  $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ . A partir de esta definición, responde las siguientes preguntas:

- (a) ¿Cuántos divisores positivos tiene  $12!$ ?
- (b) ¿Cuántos cuadrados perfectos existen que sean divisores de  $12!$ ?
- (c) ¿En cuántos ceros termina la representación decimal de  $12!$ ?
- (d) ¿En cuántos ceros termina la representación decimal de  $100!$ ? ¿y  $2026!$ ?

*Solución:*

- (a) ¿Cuántos divisores positivos tiene  $12!$ ?

Para hallar la cantidad de divisores, primero obtenemos la descomposición en factores primos de  $12!$ :

$$12! = 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7^1 \times 11^1$$

Cualquier divisor de  $12!$  tiene la forma  $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times 11^e$ . El número de opciones para cada exponente es:

- Para el 2: hay 11 opciones  $(0, 1, \dots, 10)$ .
- Para el 3: hay 6 opciones  $(0, 1, \dots, 5)$ .
- Para el 5: hay 3 opciones  $(0, 1, 2)$ .
- Para el 7: hay 2 opciones  $(0, 1)$ .
- Para el 11: hay 2 opciones  $(0, 1)$ .

Por el principio multiplicativo, el número total de divisores es:

$$N = 11 \times 6 \times 3 \times 2 \times 2 = 792$$

**Regla General:** Si la descomposición de un número es  $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ , la cantidad de divisores es  $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_k + 1)$ .

- (b) ¿Cuántos cuadrados perfectos existen que sean divisores de  $12!$ ?

Un divisor es un cuadrado perfecto si y solo si todos los exponentes de su descomposición prima son números pares. Analizamos la descomposición de  $12!$ :

$$12! = 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7^1 \times 11^1$$

Buscamos las potencias pares para cada factor primo que no excedan el límite:

- Para el 2: los exponentes pueden ser  $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$  (6 opciones).
- Para el 3: los exponentes pueden ser  $\{0, 2, 4\}$  (3 opciones).
- Para el 5: los exponentes pueden ser  $\{0, 2\}$  (2 opciones).
- Para el 7: solo el exponente  $\{0\}$  (1 opción).
- Para el 11: solo el exponente  $\{0\}$  (1 opción).

Por el principio multiplicativo, el total de cuadrados perfectos es:

$$6 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 36$$

- (c) ¿En cuántos ceros termina la representación decimal de  $12!$ ?

Un número termina en cero por cada factor 10 en su composición, y como  $10 = 2 \times 5$ , buscamos cuántas parejas de estos primos existen.

En la descomposición de  $12!$ :

$$12! = 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7^1 \times 11^1$$

- Cantidad de factores 2: 10
- Cantidad de factores 5: 2

### Informes:

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel.: 6344000 ext. 1229, 2316.

 Olimpiadas Matemáticas UIS.

 @edumat.uis



El número de parejas posibles está limitado por el factor que menos veces aparece (en este caso, el 5). Como hay solo dos cincos, podemos formar exactamente **dos** factores 10:

$$2^{10} \times 5^2 = (2^2 \times 5^2) \times 2^8 = 10^2 \times 2^8$$

**Respuesta:** 12! termina en **2** ceros.

**Tip para factoriales grandes:** En cualquier factorial  $n!$ , el primo 5 siempre aparecerá menos veces que el primo 2. Por lo tanto, para saber cuántos ceros tiene  $n!$ , basta con contar cuántos factores 5 tiene.

(d) ¿En cuántos ceros termina la representación decimal de 100!? ¿y 2026!?

En este caso, hallar la descomposición en factores primos no es una estrategia viable porque sería un proceso muy largo. Sin embargo, note que, en la pregunta anterior, la cantidad de factores 10 depende directamente de la cantidad de factores 5 que encontremos en el producto.

Con esto en mente, cada múltiplo de 5 en 100! nos aportará un 5, cada múltiplo de  $25 = 5^2$  nos aportará un segundo 5 adicional, cada múltiplo de  $125 = 5^3$  otro más, y así sucesivamente. Basta entonces con responder las siguientes preguntas considerando solo la parte entera de las divisiones:

- ¿Cuántos múltiplos de 5 hay del 1 al 100? Rta:  $100/5 = 20$
- ¿Cuántos múltiplos de 25 hay del 1 al 100? Rta:  $100/25 = 4$
- ¿Cuántos múltiplos de 125 hay del 1 al 100? Rta:  $100/125 = 0$

Luego, sumando estos resultados obtenemos que hay  $20 + 4 = 24$  factores 5 multiplicándose en 100!. Esto quiere decir que 100! **terminará en 24 ceros**.

Análogamente para 2026!:

- ¿Cuántos múltiplos de 5 hay del 1 al 2026? Rta:  $\lfloor 2026/5 \rfloor = 405$
- ¿Cuántos múltiplos de 25 hay del 1 al 2026? Rta:  $\lfloor 2026/25 \rfloor = 81$
- ¿Cuántos múltiplos de 125 hay del 1 al 2026? Rta:  $\lfloor 2026/125 \rfloor = 16$
- ¿Cuántos múltiplos de  $625 = 5^4$  hay del 1 al 2026? Rta:  $\lfloor 2026/625 \rfloor = 3$
- ¿Cuántos múltiplos de  $3125 = 5^5$  hay del 1 al 2026? Rta:  $\lfloor 2026/3125 \rfloor = 0$

Sumando los aportes:

$$405 + 81 + 16 + 3 = 505$$

Así, en 2026! habrá 505 factores 5 multiplicándose; por lo tanto, 2026! **terminará en 505 ceros**.

**Regla de Legendre:** Para hallar cuántas veces aparece un número primo  $p$  en el factorial de  $n$ , divide  $n$  sucesivamente por  $p$ , luego por  $p^2$ , después por  $p^3$ , y así sucesivamente hasta que el cociente sea 0.

La suma de todos esos cocientes te dará el exponente exacto de  $p$  en la descomposición prima de  $n!$ .

**Ejemplo:** Para el exponente del 3 en 12!:

$$\lfloor 12/3 \rfloor + \lfloor 12/9 \rfloor = 4 + 1 = 5$$

El 3 aparece 5 veces ( $3^5$ ).

### SOLUCIÓN NIVEL AVANZADO.

Definimos que un número es **creciente** si cada una de sus cifras, a partir de la segunda, es mayor o igual que la cifra inmediata a su izquierda. Por ejemplo, el número 1225 es creciente, mientras que el 1324 no lo es.

Resuelve los siguientes desafíos:

- (a) Si sumamos todas las cifras de un número creciente de tres cifras y el resultado es 6, ¿cuántos números cumplen esta condición?
- (b) ¿Cuántos números crecientes de cuatro cifras están formados por dígitos todos diferentes entre sí?
- (c) ¿Cuántos números crecientes de cuatro cifras son pares?
- (d) ¿Cuántos números crecientes de cuatro cifras tienen la propiedad de que todos sus dígitos son números primos?
- (e) ¿Cuántos números crecientes de cuatro cifras existen en total?

### Informes:

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel.: 6344000 ext. 1229, 2316.

 Olimpiadas Matemáticas UIS.

 @edumat.uis



*Solución:*

- (a) Si sumamos todas las cifras de un número creciente de tres cifras y el resultado es 6, ¿cuántos números cumplen esta condición?

Buscamos las soluciones para  $a + b + c = 6$ , donde  $a, b$  y  $c$  son dígitos tales que  $1 \leq a \leq b \leq c$ .

- Para  $a = 1$ :  $b + c = 5$ . Las parejas  $(b, c)$  con  $b \leq c$  son  $(1, 4)$  y  $(2, 3)$ .
- Para  $a = 2$ :  $b + c = 4$ . La única pareja  $(b, c)$  con  $2 \leq b \leq c$  es  $(2, 2)$ .
- Para  $a \geq 3$ : La suma  $a + b + c$  es al menos  $3 + 3 + 3 = 9$ , lo cual supera el límite de 6.

Por lo tanto, existen exactamente **3** números que cumplen la condición:

$$\{114, 123, 222\}.$$

- (b) ¿Cuántos números crecientes de cuatro cifras están formados por dígitos todos diferentes entre sí?

Buscamos números  $abcd$  tales que  $a < b < c < d$ . Veamos:

- El dígito 0 no puede formar parte del número, pues al ser el menor de todos debería ocupar la primera posición ( $a$ ), lo que resultaría en un número de 3 cifras.
- Por tanto, debemos elegir 4 dígitos del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .
- Una vez seleccionados 4 dígitos distintos, existe **exactamente una forma** de ordenarlos de menor a mayor.

El número de formas de elegir 4 elementos de un total de 9 sin importar el orden es:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{(9-4)! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \textcolor{violet}{5}!}{\textcolor{violet}{5}! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126.$$

**Conclusión:** Hay **126** números crecientes con cifras diferentes.

**Pregunta interesante** ¿Cuántos números **decrecientes** de cuatro cifras están formados por dígitos todos diferentes entre sí? *Respuesta:* 210. ¿Por qué?

- (c) ¿Cuántos números crecientes de cuatro cifras son pares?

Queremos hallar la cantidad de números  $abcd$  tales que  $1 \leq a \leq b \leq c \leq d$  y  $d \in \{2, 4, 6, 8\}$ . Veamos:

Para un valor de  $d$  fijo, debemos elegir las cifras  $a, b, c$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, d\}$ . Como el número es creciente, el orden no importa al elegir (se ordenan solos) y se permiten repeticiones. Usamos combinaciones con repetición

$$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k} \text{ con } k = 3:$$

- Si  $d = 2$ :  $\binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = 4$
- Si  $d = 4$ :  $\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$
- Si  $d = 6$ :  $\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$
- Si  $d = 8$ :  $\binom{8+3-1}{3} = \binom{10}{3} = 120$

Por lo tanto, la cantidad de número que cumplen la condición es:

$$4 + 20 + 56 + 120 = 200.$$

**Tip:** Las combinaciones con repetición son ideales cuando el orden está predefinido (como en los números crecientes) porque solo nos importa **qué** elementos elegimos, no en qué orden los sacamos de la bolsa.

- (d) ¿Cuántos números crecientes de cuatro cifras tienen la propiedad de que todos sus dígitos son números primos?

Los dígitos primos son  $\{2, 3, 5, 7\}$ . Para formar un número creciente de 4 cifras ( $a \leq b \leq c \leq d$ ), elegimos 4 elementos del conjunto de 4 primos permitiendo repeticiones:

$$CR_4^4 = \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = 35.$$

- (e) ¿Cuántos números crecientes de cuatro cifras existen en total?

Utilizamos los dígitos del 1 al 9 (el 0 se descarta para mantener las 4 cifras). El total viene dado por las combinaciones con repetición de  $n = 9$  elementos tomados de  $k = 4$  en  $k = 4$ :

$$CR_9^4 = \binom{9+4-1}{4} = \binom{12}{4} = 495.$$

---

#### Informes:

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel.: 6344000 ext. 1229, 2316.

 **Olimpiadas Matemáticas UIS.**

 **@edumat.uis**

