Universidad Industrial de Santander

FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

Geometría fractal

Programa Círculos Matemáticos

27 de septiembre de 2024

UIS - Bucaramanga

Nombre:____ ID:_______________

Taller

Fractales en el plano: El triángulo y la carpeta de Sierpiński[1]

Objetivo: Se espera que a partir de medidas tomadas "paso a paso" y de la identificación de patrones generales en dichas medidas, deduzcas cuál es el perímetro y el área del triángulo de Sierpiński y de la carpeta de Sierpiński.

Actividades:

1. **Explorando el perímetro del triángulo de Sierpiński**.

   1.1 Recuerda la descripción del proceso de construcción del triángulo de Sierpiński: "... a continuación los pasos a seguir para la construcción geométrica básica del triángulo de Sierpiński: dibujar la superficie de un triángulo (preferiblemente equilátero, aunque esto no es indispensable), marcar el punto medio de cada uno de sus lados, conectar dichos puntos mediante tres segmentos que particionen el triángulo en cuatro subtriángulos y, por último, eliminar el subtriángulo central. Al finalizar esta primera etapa de construcción se obtiene la superficie de tres triángulos cuyos lados miden exactamente la mitad de la longitud de cada uno de los lados del triángulo inicial y cada par de triángulos comparten un único vértice que es tocado por el iniciador o semilla (triángulo inicial). Luego se aplica el mismo procedimiento a cada uno de los tres triángulos. La etapa básica (producción) se repite sucesivamente hasta producir un subconjunto de puntos en el plano (la "figura límite" o cosecha), denominado "triángulo" o "curva triangular de Sierpiński".

   ▷ ¿Al menos cuáles puntos con certeza van a quedar en la cosecha?, ¿serán los únicos que van a quedar?, ¿por qué? Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

   Observación. El triángulo de Sierpiński tiene dimensión euclidiana igual a 1 y dimensión fractal $\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,584$; estos datos nos dicen que el triángulo de Sierpiński en realidad no es un triángulo.

   1.2 Por comodidad en los cálculos, asumiremos que el triángulo semilla es equilátero y de lado 1 (el razonamiento es totalmente análogo si se toma cualquier otra longitud del lado). Observa y completa el Cuadro 1.

   Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

   1.3 ¿Hasta qué etapa se pueden realizar los cálculos de la tabla anterior? Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

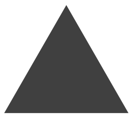
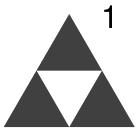
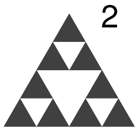
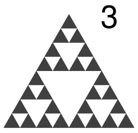
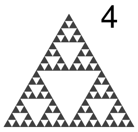
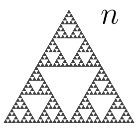
   1.4 Observa atentamente los números de la última columna de la tabla. ¿Cómo se comporta esta sucesión de números? (quizá para observar mejor si los números de esta sucesión van creciendo o decreciendo, te puede ayudar escribir las fracciones en forma decimal, con la ayuda de una calculadora). Explica tu respuesta. Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

   1.5 ¿Cuál es entonces la longitud o perímetro de la curva triangular de Sierpiński? Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

   1.6 ¿Es la curva triangular de Sierpiński un conjunto acotado?, esto es, ¿se puede encerrar en una región como un disco o círculo? Explica y compara este hecho con la longitud de la curva. ¿Qué observas? Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

[1] Taller tomado del texto: Sonia M. Sabogal P., "Geometría fractal en secundaria".

1.7 Encuentra al menos dos semejanzas y dos diferencias entre la curva de Koch y la curva triangular de Sierpiński, relacionadas con sus medidas; escríbelas en tu cuaderno, comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

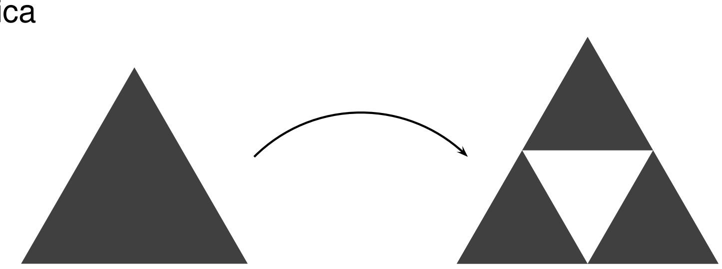
Datos para la curva triangular de Sierpiński				
Etapa	Número de triángulos	Número de lados	Longitud de cada lado	Longitud total
 0	1	3	1	3
 1	3	3^2	$\frac{1}{2}$	$3^2\frac{1}{2} = 3\left(\frac{3}{2}\right)$
 2	3^2	$3 \cdot 3^2$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	$3^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2$
 3				
 4				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
 n				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Cuadro 1: Deducción de la longitud de la curva triangular de Sierpiński.

2. **Explorando el área de la curva triangular de Sierpiński**.

2.1 Puesto que nuestra curva triangular de Sierpiński tiene perímetro infinito, ¿cómo crees que será su área? Explica, comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

2.2 Nuevamente por comodidad en los cálculos, tomaremos ahora como semilla un triángulo equilátero de área 1 (cualquier unidad cuadrada de superficie). De esta manera el cálculo del área que buscamos se simplifica



un poco si tenemos en cuenta que cada vez que se aplica el procedimiento de tomar un triángulo (en cualquier etapa de la construcción), digamos, de área a unidades cuadradas y unir los puntos medios de sus lados, entonces:

- ▷ ¿En cuántos triángulos queda dividido el triángulo tomado?
- ▷ Al descartar el triángulo central (el que queda invertido), ¿cuántos triángulos quedan?, ¿qué tienen en común los triángulos que quedan?
- ▷ Como el área del triángulo tomado es a, ¿cuál es el área de cada triángulo que queda?
- ▷ ¿Cuál es el área total de la figura que queda?

Comparte y discute tus respuestas con tus compañeros y tu profesor.

2.3 Elabora una tabla semejante a la de la actividad 1.3, titulada de nuevo “Datos para la curva triangular de Sierpiński” y con columnas: Etapa, número de triángulos, área de cada triángulo y área total de la etapa. Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

2.4 Observa los valores de la última columna, ¿qué va ocurriendo con los números de esta sucesión? El patrón general para el área de la etapa n es $\left(\frac{3}{4}\right)^n$. Compara con el patrón que obtuviste, ¿es el mismo?

2.5 ¿Cuál es el límite de la sucesión de números $\left(\frac{3}{4}\right)^n$, es decir, hacia qué valor se acerca a medida que se van tomando valores cada vez más grandes para n?

2.6 ¿Cuánto mide entonces el área del triángulo de Sierpiński?, ¿este valor de área refuerza o no la preferencia por llamar a este fractal curva triangular de Sierpiński en lugar de triángulo de Sierpiński?, ¿por qué? Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

2.7 Otra forma de calcular el área del triángulo de Sierpiński sería calculando el área de lo que se va quitando para luego restar de 1 (área de la semilla) el área total eliminada. Verifica y completa:

- ▷ Área eliminada en la etapa 1: $\frac{1}{4}$
- ▷ Área eliminada en la etapa 2: $\frac{1}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2$
- ▷ Área eliminada en la etapa 3: $\frac{1}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3^2\left(\frac{1}{4}\right)^3$
- ▷ Área eliminada en la etapa 4: ________________
- ▷ Área eliminada en la etapa n: ________________

Observa que cada sumando es de la forma:

$$3^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 3^{-1}3^n\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Área total eliminada:

$$\begin{aligned}
A_T &= \frac{1}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + 3^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \cdots \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}} - 1\right) = \frac{1}{3}(4-1) = 1
\end{aligned}$$

2.8 Verifica las “cuentas” anteriores. Se obtiene entonces que ¡el área total eliminada es 1!, por tanto, ¿cuál es el área del triángulo de Sierpiński?, ¿coincide con el valor que obtuviste en 2.6? Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

3. Explorando el perímetro de la carpeta de Sierpiński.

3.1 Recuerda la descripción del proceso de construcción de la carpeta de Sierpiński.

3.2 Podemos asumir que la semilla es un cuadrado de lado 1, de manera que si denotamos por P_n el perímetro de la etapa n, entonces $P_0 = 4$. ¿Cuál es el valor de P_1?, ¿y el de P_2? Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

3.3 Observa que en cada etapa aparecen nuevos “huecos” en forma de cuadrado, y cada vez más pequeños, ¿cuántos huecos nuevos y de qué tamaño aparecen en cada etapa? El perímetro en cada etapa será la suma del perímetro de la etapa anterior con el perímetro total de los nuevos huecos que aparecen. Verifica y completa a continuación:

- ▷ En la etapa 1 aparece un hueco de lado $\frac{1}{3}$, luego $P_1 = 4 + \frac{4}{3}$
- ▷ En la etapa 2 aparecen 8 nuevos huecos de lado $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, luego $P_2 = 4 + \frac{4}{3} + 4 \cdot 8 \left(\frac{1}{3}\right)^2$.
- ▷ En la etapa 3 aparecen ______ nuevos huecos de lado ______, luego

$$P_3 = 4 + \frac{4}{3} + 4 \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot 8^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

- ▷ En general en la etapa n aparecen 8^{n-1} nuevos huecos de lado $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, luego (con paciencia y cuidado verifica cada paso a continuación):

$$\begin{aligned}
P_n &= 4 + \frac{4}{3} + 4 \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot 8^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + 4 \cdot 8^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= 4 + \frac{4}{3} + 4 \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot 8^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + 4 \cdot 8^{-1} 8^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= 4 + \frac{4}{3} + 4 \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot 8^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \frac{4}{8} 8^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= 4 + \frac{4}{3} + 4 \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot 8^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}\right)^n \\
&= 4 + \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}\right)^1 + \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}\right)^n \\
&= 4 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{8}{3}\right)^1 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{8}{3}\right)^n \right]
\end{aligned}$$

Y así:

$$P_n = 4 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{8}{3}\right)^k.$$

3.4 Pasando al límite, podemos escribir que el perímetro de la carpeta de Sierpiński está dado por

$$P = 4 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8}{3}\right)^k,$$

donde $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8}{3}\right)^k$ es una serie geométrica de razón $\frac{8}{3} > 1$. ¿Esta serie converge o diverge? Explica tu respuesta, comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

3.5 ¿Cuánto mide entonces el perímetro de la carpeta de Sierpiński? ¿al menos cuáles puntos con certeza van a quedar en ella? Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

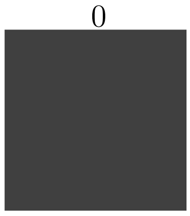
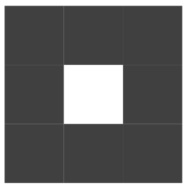
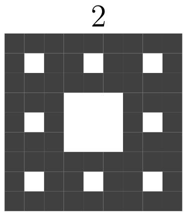
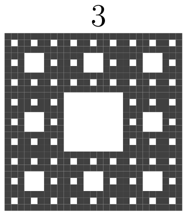
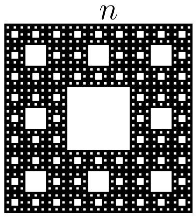
4. **Explorando el área de la carpeta de Sierpiński**

4.1 Completa el Cuadro 2 con los datos para la carpeta de Sierpiński.

4.2 ¿Cuál es entonces el área de la carpeta de Sierpiński? Compara, comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

4.3 De manera similar a como se hizo para la curva triangular de Sierpiński, realiza el procedimiento para calcular de otra forma el área de la carpeta, a saber: calculando el área total eliminada y luego a 1 restarle dicha área. Verifica si obtienes el mismo resultado. Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor.

5. Construya un fractal y calcula el perímetro y el área. Comparte y discute con tus compañeros y tu profesor. Buena suerte y . . . , ¡diviértete!

Datos para la carpeta de Sierpiński			
Etapa	Número de cuadrados	Medida de cada lado	Área total de la etapa
0 	1	1	$A_0 = 1$
1 	8	$\frac{1}{3}$	$A_1 = 8\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^1$
2 		$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$A_2 = 8^2\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{8}{9}\right)^2$
3 	8^3		$A_2 = 8^3\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \left(\frac{8}{9}\right)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n 			$A_n = 8^n\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \left(\frac{8}{9}\right)^n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Cuadro 2: Datos en la construcción de la carpeta de Sierpiński.