Universidad Industrial de Santander

**ESCUELA DE MATEMÁTICAS**
TERCEROS CÍRCULOS MATEMÁTICOS
UIS/IPRED-2024.

# TALLER 1

## SAPOS EN CAJONES

Abel conversa con Jacobi (matemático $1804 - 1851$ que trabajó sobre la teoría de las funciones elípticas), emocionado por mostrarle un nuevo truco de magia. Para hacerlo, dibuja la siguiente tabla en un pizarrón:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 1 | 7 | 3 | 15 | 13 | 11 | 5 | 9 |
| $R_2$ | 2 | 15 | 11 | 6 | 10 | 14 | 7 | 3 |
| $R_3$ | 15 | 5 | 4 | 6 | 12 | 7 | 13 | 14 |
| $R_4$ | 12 | 8 | 10 | 14 | 9 | 13 | 15 | 11 |

Después de espaldas al pizarrón, le pide a Jacobi que escoja un número entre $1$ y $15$, y que le indique en qué renglones aparece el número que eligió. Con esta información, Abel adivina el número de Jacobi. Repiten el juego varias veces y Abel siempre logra acertar.

1. Cómo logra Abel deducir el número que elige Jacobi? No está viendo la tabla y no se la sabe de memoria. Hay algo especial en ella? Qué patrones o características se pueden observar?

2. Qué pasaría si se cambiara el orden de los números en cada renglón? Por qué?

Para poder comprender el truco de Abel, veamos otro problema, que aunque parezca lejano, guarda con éste una relación más estrecha de lo que aparenta. Anolis es un mago que ha dedicado su vida entera al sutil estudio de los anfibios. Dentro de sus muchas excentricidades, tiene el objetivo de encontrar alguno de los míticos muebles perdidos del legendario carpintero Irelet. Hasta ahora, de los muebles no habían escuchado

más que rumores: mesas que tiene único lado, jarras que se contienen a sí mismas, alacenas más grandes por dentro que por fuera y bibliotecas que guardan celosamente sus libros  en otra ciudad. Después de innumerables

años de seguir pistas sin éxito, Anolis dio finalmente con un bifé que llevaba la marca secreta de Irelet. Era un simple bifé con cuatro cajones verticales. Su delirante entusiasmo inicial decayó paulatinamete al no lograr encontrar nada inusual en él, hasta que finalmente se resignó a que era un mueble común y lo usó para guardar a los sapos que estudiaba.
Sin embargo, pronto notó que al meter sapos al mueble, desaparecían de unos cajones y aparec

- Sólo es posible meter sapos en el cajón de hasta arriba.
- Conforme se van introduciendo sapos en el primer cajón, cada vez que se acumulan dos sapos en alguno de los primeros tres cajones (numerados de arriba hacia abajo), éstos se fusionan en un único sapo, que desaparece de ese cajón y aparece en el cajón de abajo.
- Podrán encontrarse dos sapos (o más) en un mismo cajón, sin que éstos se fusionen, pero únicamente estando en el cajón de hasta abajo.
- Habiendo observado lo anterior, cada vez que mete un cierto número de sapos en el primer cajón, Anolis establece una forma de describir la distribución final de sapos que queda en el mueble (después de que se hayan realizado todas las fusiones): numera los cajones de arriba a abajo - el cajón de hasta arriba es el $1$, y el de hasta abjo el $4$ -, y escribe un número de cuatro dígitos que indique el número de sapos que hay en cada cajón; si hay $N_1$ sapos en el primer cajón, $N_2$ en segundo, $N_3$ en el tercero y $N_4$ en el cuarto, escribe el número $N_4N_3N_2N_1$. Por ejemplo, si hay un sapo en cajón $3$ y un sapo en el cajón $4$, escribirá el número $1100$.

**Informes:**
circulos.matematicos@uis.edu.co
*Tel.:* $6344000$ *ext.* $2316$.

1. Tomemos una configuración de sapos en el bifé, considerando que ya se han fusionado todos los sapos que era posible. Hay un único número de sapos que al ser introducidos al primer cajón derivan en esa configuración?

2. Cuántos sapos tenemos que guardar en el mueble si buscamos que en cada cajón tengamos o bien un sapo o bien ninguno?

3. Qué configuraciones produce meter dos sapos? Y tres sapos, cuatro, cinco?

   Después de observar todo esto. Anolis decide trabajar únicamente con quince sapos. Con ellos hace sus pruebas para ver qué configuraciones resultan de poner distintos números de sapos en primer cajón y las registra en sus notas usando los números asociados a cada configuración.

   Finalmente, Anoliis descubre que hay un método práctico para saber cuántos sapos producen qué configuración, usando el número de cuatro dígitos asociado a ésta.

4. Qué método utiliza Anolis?

5. Cómo se relaciona el mueble de Irelet con el truco de Abel?

6. Podría Abel repetir su truco con una tabla de cinco renglones? Cómo? y con una tabla de seis, siete, $\ldots$?

## Referencias

[1] Neve C., Rosales L., *Por la senda de los círculos*, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2017, Ciudad de México.

**Informes:**
circulos.matematicos@uis.edu.co
*Tel.:* 6344000 *ext.* 2316.