Universidad Industrial de Santander

VIGILADA MINEDUCACIÓN

XVI Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Secundaria / 2024

Ada Lovelace

Fue una precursora en la historia de las mujeres en la ciencia. La innovación que significó su aporte al mundo de las matemáticas ha inspirado a muchas mujeres a dedicarse a la tecnología y a la informática.

INFORMES

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel.: 6344000, ext.: 2316

Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

ORM Olimpiadas Regionales de Matemáticas · Grupo Educación Matemática UIS EDUMAT · SEA Sistema de apoyo a la excelencia académica · IPRED Instituto de Proyección Regional y Educación a Distancia · Educación Interactiva y Abierta al Liderazgo

Vicerrectoría Académica

Universidad Industrial de Santander

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

XVI Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Secundaria / 2024

Apoyan:
Rectoría, Vicerrectoría Académica, Dirección de Admisiones y Registro Académico, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Grupo de Investigación EDUMAT, Sistema de Excelencia Académica SEA-UIS, Instituto de Proyección Social y Educación a Distancia IPRED

Vicerrectoría Académica

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

Decimosextas Olimpiadas Regionales de Matemáticas Secundaria

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga

2024

Elaboración y edición

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas - 2024.

Director

Gilberto Arenas Díaz

Coordinador

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Monitores

Brayan Isaac Vásquez Portocarrero

Cesar Derian Duvan García Padilla

Daniel Eduardo Naranjo Garzón

Daniel Santiago Jaimes Portilla

David Santiago Guzmán Díaz

Javier Mauricio Sierra Villabona

Jefferson Sneyder Moreno Toloza

José Camilo Rueda Niño

Juan Esteban Bahamón Rueda

Luis Fernando Muñoz Gutiérrez

Mateo Rincón Pinzón

Sergio Andrés Caicedo Araque

Thomas Javier Carrillo Basto

Introducción

"La máquina analítica no tiene pretensiones de crear nada. Puede hacer cualquier cosa que sepamos ordenarle que realice."

-Ada Lovelace.

La Universidad Industrial de Santander, como institución de educación superior del ámbito regional, forma ciudadanos como profesionales integrales, éticos, con sentido político e innovadores; apropia, utiliza, crea, transfiere y divulga el conocimiento por medio de la investigación, la innovación científica, tecnológica y social, la creación artística y la promoción de la cultura, buscando de este modo el fortalecimiento de una sociedad democrática, participativa, deliberativa y pluralista, con justicia y equidad social, comprometida con la preservación del medio ambiente y el buen vivir.

En el marco de esta misión institucional, la Escuela de Matemáticas ofrece a la sociedad santandereana y de la región de influencia de la Universidad, un escenario de alta calidad para el cultivo de las matemáticas, promoviendo entre los integrantes de la comunidad académica una actitud creativa y rigurosa, y construyendo un ambiente académico basado en la solidaridad, la empatía y el reconocimiento de los otros en su dignidad humana. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado, sino también por su participación activa y crucial en la formación de los estudiantes de otros programas de la Universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a los diversos retos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las habilidades matemáticas en el nororiente colombiano, la Escuela de Matemáticas ha diseñado y ejecutado desde 2009 el proyecto Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (ORM-UIS), para secundaria y primaria, a través del for-

talecimiento de las competencias matemáticas de los estudiantes y la capacitación simultánea de los profesores que orientan dichos procesos.
Las ORM-UIS abordan cinco (5) áreas, a saber: i) teoría de números; ii) combinatoria; iii) álgebra; iv) lógica, y v) geometría. Por otra parte, las ORM-UIS se desarrollan en tres (3) niveles, según el grado de escolaridad de los participantes, de la formación básica secundaria y media vocacional, así:

- **Nivel Básico:** grados sexto y séptimo,
- **Nivel Medio:** grados octavo y noveno,
- **Nivel Avanzado:** grados décimo y undécimo.

La cartilla que tiene en sus manos compendia los problemas matemáticos propuestos por el equipo de trabajo de las ORM-UIS en las distintas fases de la Decimosexta versión del certamen, desarrollada durante el año 2024, dirigido a estudiantes de educación media vocacional. En esta oportunidad se contó con la participación de 205 colegios, para un total de 11207 estudiantes en competencia, provenientes de 71 municipios de Colombia.

Esta versión de las ORM-UIS destacó a *Augusta Ada King, condesa de Lovelace,* más conocida como **Ada Lovelace,** mujer pionera en la ciencia de la programación aplicada a lo que denominados "computadores". En el siglo XIX existía lo que se llamaba "la máquina analítica", creada por el matemático de la Universidad de Cambridge, Charles Babbage. En un contexto académico en el que la mujer estaba excluida, Ada buscó la manera de comprender el funcionamiento de la máquina de Babbage e imaginar lo que incluso el propio creador no pudo anticipar. En este sentido, para Doron Swade, historiador de la informática, Ada no diseñó los primeros algoritmos para "la máquina", no hay que mentirnos, sino que fue el mismo Babbage quien lo hizo. Sin embargo, Lovelace se aventuró a pensar que con este novedoso lenguaje se podían calcular más que números y en las correcciones a la *Nota G de Babbage,* inauguró los que podríamos nombrar como *la ciencia del software.* Las ORM-UIS consideran que Ada es, además, un referente para promover la reducción de la brecha de género en la formación STEM y una evidencia clara de que la naturaleza dota por igual, a hombres y mujeres, del potencial maravilloso de la imaginación científica, aunque la cultura se obstine a menudo por negarlo.

Este documento consta de tres (3) capítulos, cada uno correspondiente a un nivel de la competencia: nivel básico, nivel medio y nivel avanzado. En cada uno de ellos el lector encontrará los problemas y una solución, de las distintas soluciones que puede tener cada uno. Por esa razón, el equipo de trabajo de las ORM-UIS recomienda e incentiva a quien desee enfrentar nuevamente estos problemas, a descubrir y proponer métodos alternativos de solución que se destaquen por su sencillez, ingenio y belleza matemática.

La Escuela de Matemáticas, a través del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la UIS (EDUMAT), reconoce la labor esencial del maestro en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las competencias matemáticas de los estudiantes, y por ello elabora esta cartilla para su utilización en el aula de clase, que incluye, también, la preparación y discusión creativa entre pares en los espacios de formación docente. Esperamos que los participantes de la educación básica secundaria y media vocacional, los profesores, y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, disfrute tanto como nosotros lo hicimos, el hermoso y milenario ejercicio del pensamiento matemático.

Las ORM-UIS no son una mera competencia, implican una puesta en escena colectiva para que los niños, niñas y adolescentes desplieguen sus capacidades, fortalezcan sus habilidades y se reconozcan como sujetos capaces de enfrentar problemas y solucionarlos. Esto fomenta la autopercepción como sujetos con comprensión de su entorno, y esa es la exigencia que hace hoy la humanidad. Creemos firmemente que allí debemos dirigir todos nuestros esfuerzos, al fortalecimiento de ciudadanías que, gracias al pensamiento crítico que se desarrolla desde el ejercicio matemático, puedan enfrentarse a la diversidad de problemáticas que enfrenta la sociedad actual y que requieren de una mirada no solo crítica, sino, además, creativa para ser solucionadas.

El proyecto ORM-UIS agradece y destaca al grupo de estudiantes de Santander y Norte de Santander que participaron de esta versión, y que han demostrado ser capaces de asumir el reto de pensar y sentir problemas sencillos y bellos de matemáticas, con pasión y con rigor.

Índice general

Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

En la biblioteca de un colegio, $\frac{2}{9}$ de los libros que hay son de matemáticas, $\frac{3}{5}$ son de literatura, $\frac{1}{7}$ son de ciencias sociales y el resto de idiomas. ¿Cuál es la menor cantidad de libros de idiomas que puede haber en la biblioteca?

(a) 11 (b) 15 (c) 315 (d) 7

Solución: La cantidad de libros de idiomas es

$$1 - \frac{2}{9} - \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{11}{315}$$

del total de la biblioteca. Pero, como esta cantidad y las cantidades de libros de cada área deben ser números enteros, entonces la cantidad mínima de libros en la biblioteca debe ser 315 (el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones). Por lo tanto, la menor cantidad de libros de idiomas que puede haber en la biblioteca es 11.

PROBLEMA 2.

Ada Lovelace fue una precursora en la historia de las mujeres en la ciencia. La innovación que significó su aporte al mundo de las matemáticas ha inspirado a muchas mujeres a dedicarse a la tecnología y a la informática.

En el siguiente Alphametic, letras diferentes representan dígitos diferentes. Si $D = 4A$, $V < C$ y $O = 0$, ¿Cuál es el valor de $L + O + V + E$?

$$\begin{array}{cccccc} & & & A & D & A \\ & & L & O & V & E \\ + & & L & A & C & E \\ \hline & G & E & N & I & O \end{array}$$

(a) 15 (b) 16 (c) 19 (d) 20

Solución: Usando las igualdades del enunciado llegamos a

$$\begin{array}{cccccc} & & & A & 4A & A \\ & & L & 0 & V & E \\ + & & L & A & C & E \\ \hline & G & E & N & I & 0 \end{array}$$

Como cada letra diferente representa un dígito diferente y $D = 4A$, podemos concluir que $A = 1$ o $A = 2$. Además notemos que $A + E + E$ es par puesto que el resultado termina en 0. Dado que $E + E = 2E$ es par, A debe ser par, así $A = 2$ y $D = 8$.

$$\begin{array}{cccccc} & & & 2 & 8 & 2 \\ & & L & 0 & V & E \\ + & & L & 2 & C & E \\ \hline & G & E & N & I & 0 \end{array}$$

Notemos que la parte de la suma

$$\begin{array}{ccc} & & L \\ + & & L \\ \hline & G & E \end{array}$$

se puede hacer directamente puesto que no se "lleva" ninguna unidad de sumas anteriores. Concluimos que $G = 1$ ya que no hay ninguna suma de dos dígitos que de 20 o más, $L > 5$ y E es par, pero recordando algo dicho anteriormente $2+E+E$ es un número terminado en 0, es decir, un múltiplo de 10, y las únicas posibilidades para que E cumpla esto son $E = 4$ o $E = 9$, pero como E debe ser par, entonces $E = 4$. De lo anterior, solo queda una posibilidad para L y es $L = 7$.

$$\begin{array}{cccccc} & & & 2 & 8 & 2 \\ & & 7 & 0 & V & 4 \\ + & & 7 & 2 & C & 4 \\ \hline & 1 & 4 & N & I & 0 \end{array}$$

Podemos asegurar que $N = 5$ o $N = 6$ puesto que no puede ser 4, luego entre V, C e I están el 3 y el 9, notemos que si $I = 9$, $N = 5$ y quedarían el 3 y el 6 para la V y la C en algún orden, es decir, $8 + 3 + 6 = 19$, pero esto no es cierto, luego I no puede ser 9, de igual forma se descarta que I sea 5 o 6, luego $I = 3$, así $N = 6$ y como $V < C$, entonces $V = 5$ y $C = 9$.

$$\begin{array}{cccccc} & & & 2 & 8 & 2 \\ & & 7 & 0 & 5 & 4 \\ + & & 7 & 2 & 9 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 6 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ O & G & A & I & E & V & N & L & D & C \end{array}$$

Finalmente, tenemos que $L + O + V + E = 7 + 0 + 5 + 4 = 16$.

PROBLEMA 3.

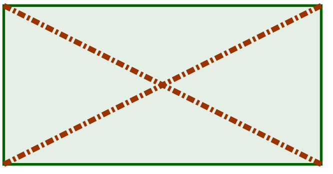
Con una duración de 1 año y 10 meses, los elefantes tienen el período de gestación más largo de cualquier otro mamífero. Si a finales de un mes de marzo la elefanta Jumbo completó un onceavo de su período de gestación, ¿en qué mes nació su elefantito?

(a) enero (b) octubre (c) noviembre (d) diciembre

Solución: 1 año y 10 meses son 22 meses, luego $\dfrac{1}{11}$ de este tiempo serían 2 meses, es decir, a finales del mes de marzo la elefanta lleva 2 meses de gestación, entonces sumando 20 meses a esto llegamos a finales del mes de noviembre.

PROBLEMA 4.

Para implementar el pastoreo rotativo del ganado, un granjero divide una parcela rectangular, cuyo largo es el doble del ancho, en cuatro corrales triangulares mediante el trazado de sus diagonales. Si el área de uno de los corrales es de $98\,\mathrm{dm}^2$, ¿cuál es el perímetro de la parcela?



(a) $42\,\mathrm{dm}$ (b) $56\,\mathrm{dm}$ (c) $84\,\mathrm{dm}$ (d) $112\,\mathrm{dm}$

Solución: Note que todos los corrales tienen igual área, luego, el área total de la parcela es $98 \times 4\,\mathrm{dm}^2$. Si llamamos x al ancho de la parcela, entonces el largo es $2x$, así tendríamos que

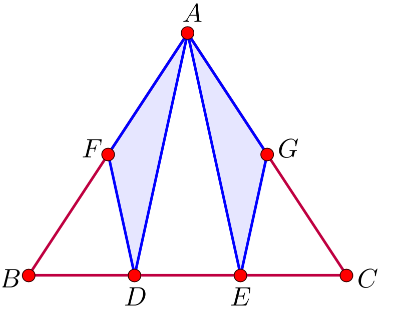
$$\begin{aligned} x \times 2x &= 98 \times 4 \\ x^2 &= 196 \\ x &= 14. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el perímetro de la parcela es

$$x + 2x + x + 2x = 6x = 6 \times 14 = 84\,\mathrm{dm}.$$

PROBLEMA 5.

En la siguiente figura los puntos D y E dividen al segmento $\overline{BC}$ en tres partes iguales, mientras que F y G son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si el área del triángulo ABC es $60\,cm^2$, ¿cuál es el área de las regiones sombreadas?



(a) $15\,cm^2$ (b) $20\,cm^2$ (c) $24\,cm^2$ (d) $30\,cm^2$

Solución: Como los puntos D y E dividen en tres partes iguales a $\overline{BC}$, se tiene que el área del triángulo BDA, si tomamos el segmento $\overline{BD}$ como base y llamamos h a la altura, es

$$\frac{\overline{BD}\times h}{2}=\frac{\frac{\overline{BC}}{3}\times h}{2}=\frac{\frac{\overline{BC}\times h}{2}}{3}$$

En otras palabras, el área del triángulo BDA es un tercio del área de BCA, es decir, $\dfrac{60cm^2}{3}=20\,cm^2$.

Con el mismo argumento podemos probar que el triángulo AFD tiene la mitad del área del triángulo ABD, es decir, $10\,cm^2$.

Finalmente con un proceso análogo al anterior, el triángulo AEG también tiene área igual a $10\,cm^2$, así la suma del área de las regiones sombreadas es

$$10\,cm^2+10\,cm^2=20\,cm^2.$$

Problema 6.

La edad de Karol deja residuo 5 cuando se divide entre 8 y la edad de su hermano deja residuo 6 cuando se divide entre 8. ¿Cual es el residuo que dejan la suma de las edades de Karol y su hermano, al dividirse entre 8?

(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 11

Solución: Si llamamos K a la edad de Karol y H a la edad de su hermano, al usar la prueba de la división, tenemos que

$$K=8q+5$$
$$H=8f+6,$$

en donde q y f son los cocientes de las divisiones. Sumando las dos edades tenemos:

$$\begin{aligned}H+K&=8(q+f)+11,\\&=8(q+f)+8+3,\\&=8(q+f+1)+3.\end{aligned}$$

Luego el residuo que deja dividir la suma de las edades de Karol y su hermano entre 8 es 3.

Problema 7.

Tania, Oliva y David están explorando el número 210.

- Tania escribe todos los divisores de 210.
- Oliva escribe los productos de dos primos distintos que dividen a 210.
- David escribe los productos de tres primos distintos que dividan a 210.

Si Tania escribió A números; Oliva, B números y David, C números; entonces se cumple que:

(a) $A+B+C=26$

(b) $A-C=B+C$

(c) $C=B-2A$

(d) $A-B-C=5$

Solución: La descomposición prima de 210 es:

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$210 = 2\times 3\times 5\times 7.$$

Calcularemos la cantidad de divisores de 210, es decir los posibles productos entre los factores primos de 210, dado que cada uno de los cuatro factores primos, podría estar o no estar , entonces, por el principio multiplicativo, la cantidad de divisores de 210 es:

$$2\times 2\times 2\times 2=16.$$

Por lo tanto $A=16$.

Ahora calcularemos los productos de dos primos distintos que dividen a 210, esto es lo mismo que escoger 2 números primos entre los cuatro posibles en la descomposición de 210, es decir [1],

$$\binom{4}{2} = 6.$$

Luego, Olivia escribió $B = 6$ números.

El caso de David es parecido al de Olivia, puesto que se trata de escoger 3 números entre los 4 primos divisores de 210, esto es

$$\binom{4}{3} = 4.$$

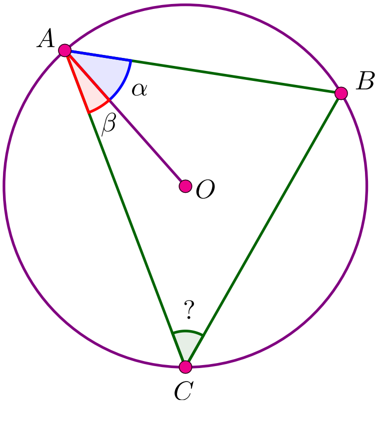
Entonces David escribió $C = 4$ números.

Finalmente, comprobamos que la única opción correcta es:

$$A + B + C = 16 + 6 + 4 = 26.$$

Problema 8.

En la siguiente figura, el triángulo ABC tiene sus vértices sobre el círculo con centro en O. Si $\alpha = 40°$ y $\beta = 30°$, ¿cuál es la medida del ángulo C?



(a) $70°$ (b) $60°$ (c) $40°$ (d) $50°$

[1] **El número combinatorio**

El número combinatorio $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \times k!}$ indica cuántas formas hay de elegir k elementos diferentes de un conjunto de n elementos, donde $0 \leq k \leq n$, sin importar el orden en que se elijan.

Solución: Si trazamos los segmentos $\overline{CO}$ y $\overline{OB}$ se forma un triángulo isósceles puesto que estos segmentos son radios del círculo.
Además[2] el ángulo COB debe ser el doble del ángulo $CAB = \alpha + \beta = 40° + 30° = 70°$, esto por un resultado que dice que el ángulo central de la circunferencia es el doble del ángulo inscrito que subtiende al mismo arco, luego el ángulo $COB = 140°$.
Usando que el triángulo COB es isósceles, tenemos que los ángulos BCO y OBC deben ser iguales, así cada uno de ellos debe ser de $20°$ para que sumen $180°$ junto con el ángulo COB.
Lo siguiente es notar que el triángulo AOC es isósceles también, así el ángulo β es igual al ángulo OCA y este último debe valer $30°$.
Finalmente el ángulo buscado es la suma de los ángulos OCA y BCO, es decir, $30° + 20° = 50°$.

Problema 9.

¿Cuántos números pares de dos cifras tienen la particularidad de que sus dígitos son diferentes entre sí y también diferentes a los dígitos del número 2024?

(a) 12 (b) 8 (c) 18 (d) 14

Solución: Los dígitos que no están en el número 2024 son 1, 3, 5, 6, 7, 8 y 9, de los cuales 6 y 8 son pares. Entonces, los posibles números pares que podemos construir son 12 en total, a saber: 16, 36, 56, 76, 86, 96, 18, 38, 58, 68, 78, 98.

[2] En un círculo, un ángulo central es aquel cuyo vértice coincide con el centro del círculo y cuyos lados son dos radios que interceptan un arco. Por otro lado, un ángulo inscrito es aquel que tiene su vértice sobre la circunferencia y cuyos lados son cuerdas del mismo círculo.
El Teorema del ángulo central establece que: *La amplitud de un ángulo central es el doble de la amplitud de cualquier ángulo inscrito que intercepte el mismo arco.*

1.2. Prueba Selectiva

PROBLEMA 1.

Al escribir el número $0,2024$ como una fracción irreducible, ¿cuál es la diferencia positiva entre el numerador y el denominador?

(a) 997 (b) 1024 (c) 1503 (d) 7976

Solución: El número $0{,}2024$ tiene cuatro cifras decimales, por lo que puede expresarse como:

$$0{,}2024 = \frac{2024}{10000}.$$

Simplificando esta fracción a su forma irreducible, obtenemos:

$$0{,}2024 = \frac{253}{1250}.$$

Por lo tanto, la diferencia positiva entre el numerador y el denominador es:

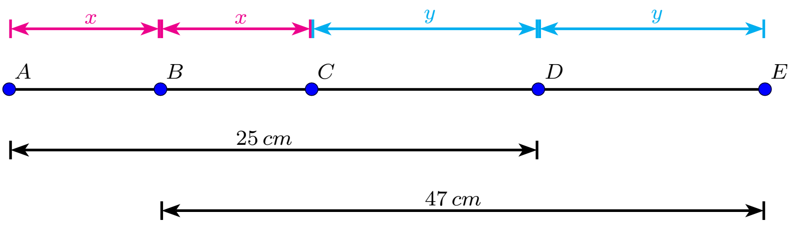
$$1250 - 253 = 997.$$

PROBLEMA 2.

Los puntos A, B, C, D y E están sobre una recta. Se sabe que B y D son los puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$, respectivamente. Si $AD = 25\,cm$ y $BE = 47\,cm$, ¿cuál es la distancia entre los puntos B y D?

(a) $18\,cm$ (b) $24\,cm$ (c) $36\,cm$ (d) $48\,cm$

Solución: Se ilustra la situación:



Observe que:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 25 + 47 - x - y, \\ 3(x+y) &= 72. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{BD} = x + y = 24\,cm$.

Problema 3.

Para nivelar una balanza, solo disponemos de pesas de $3\,kg$ y $7\,kg$. ¿Cuál es la menor cantidad de pesas necesarias para equilibrar un peso de $36\,kg$?

(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12

Solución: Buscamos minimizar la cantidad total de pesas, por lo que intentamos utilizar el mayor número posible de pesas de 7 kg. El máximo número de pesas de 7 kg que podemos usar es 5.

- Si tomamos 5 pesas de 7 kg, suman 35 kg, por lo que faltaría 1 kg para nivelar. Sin embargo, solo disponemos de pesas de 3 kg, por lo que esta opción no es posible.
- Si tomamos 4 pesas de 7 kg, el peso total sería $7 \times 4 = 28$ kg, por lo que faltarían $36 - 28 = 8$ kg. No es posible completar 8 kg con las pesas disponibles.
- Si tomamos 3 pesas de 7 kg, suman $7 \times 3 = 21$ kg, por lo que faltarían $36 - 21 = 15$ kg. Esto se puede completar con 5 pesas de 3 kg, para un total de 8 pesas.

Por lo tanto[3], la menor cantidad de pesas necesarias es 8.

Problema 4.

En el restaurante *La Italiana*, conocido por elaborar la auténtica pizza napolitana desde 1889, las cajas rectangulares utilizadas para empacar sus domicilios deben cumplir con ciertas especificaciones. Se requiere que la distancia más corta desde cada borde de la caja hasta el borde de la pizza sea exactamente $2\,cm$, mientras que la altura de la caja debe ser de $4\,cm$. Suponiendo que el área total de una pizza circular mediana es $196\pi\,cm^2$, ¿cuál es el volumen que ocupa cada caja?

(a) $1024\,cm^3$ (b) $1296\,cm^3$ (c) $3600\,cm^3$ (d) $4096\,cm^3$

[3] Si bien el peso también se podría equilibrar con 12 pesas de 3 kg, no es necesario analizar más casos, ya que hemos priorizado el uso de las pesas de mayor peso. Al encontrar una solución con 8 pesas, cualquier otra combinación requeriría un número mayor de ellas.

Solución: La pizza es circular y conocemos su área, entonces podemos conocer su radio r, usando la fórmula del área de un círculo:

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= 196\pi \\ r &= 14\, cm. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el cuadrado de la base de la caja debe ser de $14 + 14 + 2 + 2 = 32\, cm$. Finalmente, el volumen de la caja rectangular se obtiene multiplicando sus dimensiones:

$$\begin{aligned} V &= \text{Largo} \times \text{Ancho} \times \text{Altura} \\ &= 32 \times 32 \times 4 = 4096\, cm^3. \end{aligned}$$

Problema 5.

Un número capicúa de cuatro cifras es divisible entre 15. ¿Cuál es el residuo que deja la suma de las dos cifras centrales de este número al dividirse entre 3?
Un número capicúa es aquel que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. En otras palabras, es un número simétrico en su escritura. Por ejemplo, los números 55, 121 *y* 4884 *son capicúas.*

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) No se puede determinar

Solución: Si un número es divisible por 15, entonces debe ser divisible tanto por 3 como por 5.

Dado que es divisible por 5, su última cifra debe ser 0 o 5. Sin embargo, si terminara en 0, al ser un número capicúa, también comenzaría con 0, lo que lo convertiría en un número de solo tres cifras. Por lo tanto, debe terminar en 5, y su forma es

$$5aa5.$$

Para que sea divisible por 3, la suma de sus cifras debe ser un múltiplo de 3. Calculamos esta suma:

$$5 + a + a + 5 = 10 + 2a.$$

Buscamos valores de a que hagan $10 + 2a$ un múltiplo de 3. Probamos las distintas opciones y encontramos que los únicos valores posibles de a son $1, 4, 7$.

Así, los posibles números son 5115, 5445 y 5775, y en cualquiera de los tres casos, la suma de las dos cifras centrales deja residuo 2 al dividirse entre 3.

Problema 6.

En un colegio se planeó un almuerzo para los estudiantes de sexto, séptimo y octavo grado. Hay 40 estudiantes en sexto, 56 en séptimo y 72 en octavo. Los profesores desean organizar el comedor de manera que cada mesa tenga solo estudiantes del mismo grado y que todas las mesas tengan el mismo número de estudiantes. ¿Cuál es la menor cantidad de mesas que necesitarán los profesores?

(a) 8 (b) 15 (c) 21 (d) 42

Solución: El máximo común divisor (MCD) de $40, 56$ y 72 es:

$$MCD\left(2^3 \cdot 5, 2^3 \cdot 7, 2^3 \cdot 3^2\right) = 2^3 = 8.$$

Esto significa que la máxima cantidad de estudiantes por mesa es 8.

Dado que el número total de estudiantes es: $40+56+72 = 168$, entonces, la menor cantidad de mesas necesarias es $168 \div 8 = 21$.

Problema 7.

Al completar la siguiente cuadrícula con un número entero positivo en cada casilla, de modo que el producto de los números ubicados en cada fila, en cada columna y en cada diagonal, sea el mismo, ¿cuál es la suma de los números en las casillas U, I y S?

5	9	U
		I
3		S

Solución: Sea X, Y y Z los números en las casillas siguientes:

5	9	U
X	Y	I
3	Z	S

Dado que el producto en cada fila, columna y diagonal es el mismo, tenemos:

$$3 \cdot Y \cdot U = 5 \cdot 9 \cdot U \quad \Rightarrow \quad Y = 15.$$

También,

$$5 \cdot X \cdot 3 = X \cdot Y \cdot I \quad \Rightarrow \quad 15X = 15X \cdot I \quad \Rightarrow \quad I = 1.$$

Además,

$$9 \cdot Y \cdot Z = 3 \cdot Z \cdot S \quad \Rightarrow \quad 9 \cdot Y = 3 \cdot S \quad \Rightarrow \quad 9 \cdot 15 = 3 \cdot S \quad \Rightarrow \quad S = 45.$$

Por último,

$$9 \cdot 5 \cdot U = 5 \cdot 15 \cdot 45 \quad \Rightarrow \quad U = 75.$$

Por lo tanto,

$$U + I + S = 75 + 1 + 45 = \mathbf{121}.$$

Problema 8.

¿Cuántos números de dos cifras cumplen que el dígito de las unidades es mayor que el dígito de las decenas?

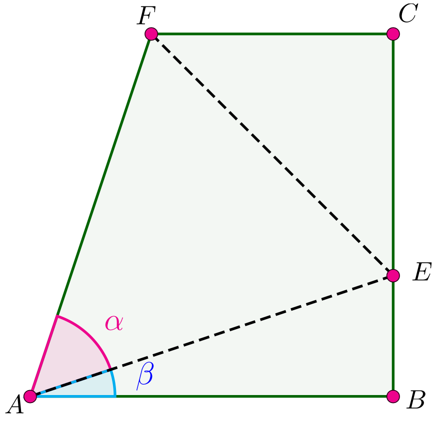
Solución: Sea ab, un número de dos cifras, donde a es el dígito de las decenas y b es el dígito de las unidades, entonces $a \neq 0$ y $b > a$. Para cada valor de a, contamos los valores posibles de b:

a	Valores posibles de b (donde $b > a$)	Cantidad de opciones
1	$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	8
2	$3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	7
3	$4, 5, 6, 7, 8, 9$	6
4	$5, 6, 7, 8, 9$	5
5	$6, 7, 8, 9$	4
6	$7, 8, 9$	3
7	$8, 9$	2
8	9	1
9	$-$	0

Por lo tanto, la cantidad de números de dos cifras en los que el dígito de las unidades es mayor que el dígito de las decenas es $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$.

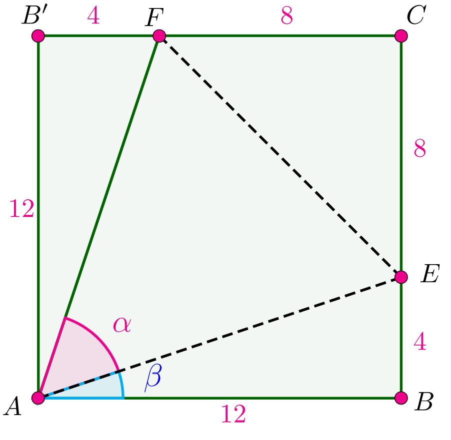
Problema 9.

Un granjero dividió su finca por donde muestran las rectas punteadas del siguiente plano:



Si $AF = AE$, $AB = 12$, $BE = 4$ y $\alpha + 2\beta = 90°$, ¿cuál es el área del terreno triangular AEF?

Solución: Trasladando el triángulo ABE, como se muestra en la figura,



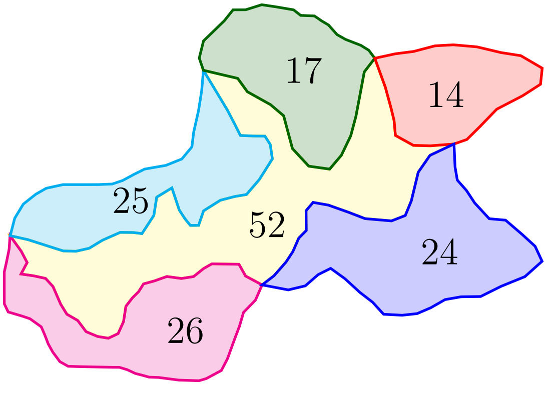
podemos completar un cuadrado de lado 12. Así, el área del triángulo AEF se obtiene restando del área del cuadrado $AB'CB$ las áreas de los triángulos $AB'F$, FCE y EBA, de la siguiente manera:

$$12^2 - \frac{12 \times 4}{2} - \frac{8 \times 8}{2} - \frac{12 \times 4}{2} = 64.$$

1.3. Prueba Final

Problema 1.

En la figura, se muestra el mapa de una isla cuyo territorio ha sido conquistado por seis países. Cada región del mapa corresponde a un país diferente y el número en el interior de cada región representa el perímetro del territorio (en miles de kilómetros), declarado por el país conquistador. A partir de estos datos, calcule el perímetro total de la isla.



Solución: Si sumamos los perímetros de los países que conforman la frontera, obtenemos el perímetro de la isla más el perímetro del país interno. Es decir, el perímetro de la isla está dado por:

$$25 + 17 + 14 + 24 + 26 - 52 = \boxed{\text{54 mil kilómetros}}$$

Problema 2.

En la primera casilla del tablero está escrito el número 30 y en la décima, el 2024.

30									2024

Complete el tablero escribiendo un número en cada casilla vacía, de modo que el número escrito en cada casilla, a partir de la tercera, sea igual a la suma de los números de las dos casillas inmediatamente anteriores.

Solución: Si llamamos x al valor de la segunda casilla, podemos rellenar las demás en términos de x:

30	x	$30+x$	$30+2x$	$60+3x$	$90+5x$	$150+8x$	$240+13x$	$390+21x$	2024

Así,

$$(240 + 13x) + (390 + 21x) = 630 + 34x = 2024,$$

luego $x = 41$ y los números en cada casilla son:

30	41	71	112	183	295	478	773	1251	2024

Problema 3.

Natalia tiene una pista circular de autos con tres carriles. Ella notó que, al ubicar el carrito amarillo en el primer carril, este demora 15 segundos en dar la vuelta completa a la pista. Si el carrito azul ocupa el segundo carril, este demora 30 segundos en dar la vuelta, y si el carrito rojo está en el tercer carril, este demora 40 segundos en completar la vuelta. ¿Cuántas veces se encontrarán los tres carritos en la línea de meta, sin contar el momento de partida, si todos inician en esta línea, al mismo tiempo y dan vueltas durante 11 minutos?

Solución: El Mínimo Común Múltiplo (MCM) de los 3 tiempos, será el menor tiempo que les toma a los carritos volverse a encontrar.

$$\begin{array}{ccc|c} 15 & 30 & 40 & 2 \\ 3 & 15 & 20 & 2 \\ 1 & 3 & 10 & 2 \\ & 1 & 5 & 5 \\ & & 1 & 3 \end{array}$$

Entonces el MCM es $2^3 \cdot 5 \cdot 3 = 120\ seg = 2\ min$, es decir los carritos se encontrarán cada dos minutos y como dan vueltas durante 11 minutos, entonces se encontrarán $\boxed{5 \text{ veces}}$ en total.

Problema 4.

Geppetto tenía un cubo macizo de madera de lado n centímetros, donde n es un número entero desconocido. Pintó la superficie del cubo de color rojo y luego lo dividió en n^3 cubitos de lado $1\,cm$ para crear un armatodo o juego de bloques. Al clasificar los cubitos, Geppetto notó que la cantidad de cubitos cuya superficie no estaba pintada era el triple de la cantidad de cubitos que tenían exactamente dos caras pintadas. ¿Cuál es el valor de n?

Solución: Como cada cubito es de $1\,cm$ de lado entones hay n cubitos en cada arista, pero solo $n-2$ de ellos tienen exactamente dos caras pintadas, pues las esquinas tienen 3 caras pintadas. El cubo tiene 12 aristas, entonces hay $12\cdot(n-2)$ cubitos con exactamente dos caras pintadas de rojo.

Los cubos que no tienen caras pintadas son los que no se encontraban en la superficie, es decir, $(n-2)^3$, de modo que,

$$\begin{aligned} 12\cdot(n-2)\cdot 3 &= (n-2)^3 \\ 36 &= (n-2)^2 \\ 6 &= n-2 \\ 8 &= n. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.

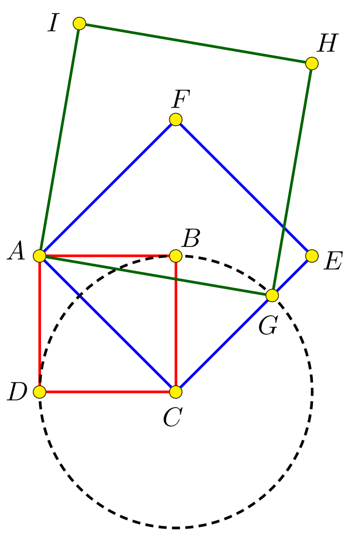
Atenas hace la siguiente construcción con su escuadra y su compás.

(i) Bosqueja un cuadrado $ABCD$ de lado $1\,cm$.

(ii) Luego construye el cuadrado $AFEC$.

(iii) Después, con el compás, traza una circunferencia con centro de C y radio CB, y marca el punto G, de intersección entre la circunferencia con el segmento $\overline{CE}$.

(iv) Finalmente, también traza el cuadrado $AIHG$.



Determine el área de cada uno de los tres cuadrados construidos por Atenas.

Solución:

- El área del cuadrado $ABCD$ es

$$1\,cm \times 1\,cm = 1\,cm^2.$$

- Observe que una mitad del cuadrado $ABCD$ coincide con un cuarto del cuadrado $AFEC$. Por lo tanto, el área del cuadrado $AFEC$ es

$$4 \cdot \frac{1}{2}\, cm^2 = 2\, cm^2.$$

- Usando el Teorema de Pitágoras en el triángulo ACG (que tiene ángulo recto en C), tenemos:

$$AG^2 = AC^2 + CG^2 = 2 + 1 = 3\, cm^2.$$

  Por lo tanto, el área del cuadrado $AIHG$ es $3\, cm^2$.

Problema 6.

¿Cuántos divisores positivos del número $N = 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^6$ son cuadrados perfectos?

Solución: En la descomposición prima de un cuadrado perfecto, todos sus factores primos tienen potencias pares. Luego, podemos contar los cuadrados perfectos que dividen a N, usando el principio multiplicativo, así:

$$\underbrace{\text{2 opciones}}_{\substack{3^0\\ 3^2}} \times \underbrace{\text{3 opciones}}_{\substack{5^0\\ 5^2\\ 5^4}} \times \underbrace{\text{4 opciones}}_{\substack{7^0\\ 7^2\\ 7^4\\ 7^6}} = 24$$

Por lo tanto, N tiene 24 divisores positivos que son cuadrados perfectos.

Capítulo 2

Nivel Medio

2.1. Prueba Clasificatoria

PROBLEMA 1.

Se ha realizado una competencia de atletismo en la que se clasificaron 36 atletas en tres niveles de habilidad: élite, experimentado y amateur. ¿Cuál de las siguientes opciones podría ser el resultado de la competencia?

(a) $\frac{1}{4}$ de los atletas se ubicaron en la categoría élite, $\frac{4}{9}$ en experimentado y $\frac{1}{6}$ en amateur.

(b) $\frac{4}{15}$ de los atletas se ubicaron en la categoría élite, $\frac{1}{3}$ en experimentado y $\frac{2}{5}$ en amateur.

(c) $\frac{1}{9}$ de los atletas se ubicaron en la categoría élite, $\frac{2}{3}$ en experimentado y $\frac{2}{9}$ en amateur.

(d) $\frac{1}{6}$ de los atletas se ubicaron en la categoría élite, $\frac{1}{4}$ en experimentado y $\frac{2}{3}$ en amateur.

Solución: La respuesta correcta debe cumplir con dos condiciones: la suma de las fracciones debe ser igual a la unidad y cada denominador debe ser un divisor de 36, ya que en cada categoría debe haber un número entero de atletas. La opción que satisface estas condiciones es: $\dfrac{1}{9}$ de los atletas en la categoría élite, $\dfrac{2}{3}$ en experimentado y $\dfrac{2}{9}$ en amateur.

Problema 2.

Ada Lovelace fue una precursora en la historia de las mujeres en la ciencia. La innovación que significó su aporte al mundo de las matemáticas ha inspirado a muchas mujeres a dedicarse a la tecnología y a la informática.
En el siguiente Alphametic, letras diferentes representan dígitos diferentes. Si $D = 4A$, $V < C$ y $O = 0$, ¿cuál es el valor de $L + O + V + E$?

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & A & D & A \\
 & & L & O & V & E \\
+ & & L & A & C & E \\
\hline
 & G & E & N & I & O
\end{array}
$$

(a) 15 (b) 16 (c) 19 (d) 20

Solución: Usando las igualdades del enunciado llegamos a

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & A & 4A & A \\
 & & L & 0 & V & E \\
+ & & L & A & C & E \\
\hline
 & G & E & N & I & 0
\end{array}
$$

Como cada letra diferente representa un dígito diferente y $D = 4A$, podemos concluir que $A = 1$ o $A = 2$. Además notemos que $A + E + E$ es par puesto que el resultado termina en 0. Dado que $E + E = 2E$ es par, A debe ser par, así $A = 2$ y $D = 8$.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 2 & 8 & 2 \\
 & & L & 0 & V & E \\
+ & & L & 2 & C & E \\
\hline
 & G & E & N & I & 0
\end{array}
$$

Notemos que la parte de la suma

$$
\begin{array}{ccc}
 & & L \\
+ & & L \\
\hline
 & G & E
\end{array}
$$

se puede hacer directamente puesto que no se "lleva" ninguna unidad de sumas anteriores. Concluimos que $G = 1$ ya que no hay ninguna suma de dos dígitos que de 20 o más, $L > 5$ y E es par, pero recordando algo dicho anteriormente $2+E+E$ es un número terminado en 0, es decir, un múltiplo de 10, y las únicas posibilidades para que E cumpla esto son $E = 4$ o $E = 9$, pero como E debe ser par, entonces $E = 4$. De lo anterior, solo queda una posibilidad para L y es $L = 7$.

$$\begin{array}{cccccc} & & & 2 & 8 & 2 \\ & & 7 & 0 & V & 4 \\ + & & 7 & 2 & C & 4 \\ \hline & 1 & 4 & N & I & 0 \end{array}$$

Podemos asegurar que $N = 5$ o $N = 6$ puesto que no puede ser 4, luego entre V, C e I están el 3 y el 9, notemos que si $I = 9$, $N = 5$ y quedarían el 3 y el 6 para la V y la C en algún orden, es decir, $8 + 3 + 6 = 19$, pero esto no es cierto, luego I no puede ser 9, de igual forma se descarta que I sea 5 o 6, luego $I = 3$, así $N = 6$ y como $V < C$, entonces $V = 5$ y $C = 9$.

$$\begin{array}{cccccc} & & & 2 & 8 & 2 \\ & & 7 & 0 & 5 & 4 \\ + & & 7 & 2 & 9 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 6 & 3 & 0 \end{array}$$

Finalmente, tenemos que $L + O + V + E = 7 + 0 + 5 + 4 = 16$.

Problema 3.

Daniela ha programado dos robots para escribir por turnos una lista de números. Cada Robot escribe tres números por turno. El Robot A, escribe los enteros positivos consecutivos en orden ascendente, mientras que el Robot B repite los números escritos por el robot A, pero en orden descendente y con signo contrario. La sucesión de números que escriben los robots comienza así:

$$\overbrace{1,\ 2,\ 3,}^{\text{Robot A}}\underbrace{-3,\ -2,\ -1,}_{\text{Robot B}}\overbrace{4,\ 5,\ 6,}^{\text{Robot A}}\underbrace{-6,\ -5,\ -4,}_{\text{Robot B}}\ \ldots$$

¿Cuál es la suma de los primeros 1001 términos de esta sucesión?

(a) 167 (b) 333 (c) 499 (d) 997

Solución: Cada ciclo consta de seis números cuya suma es cero. En los primeros

1001 términos, tenemos:

$$\frac{1001}{6} = 166 \text{ ciclos completos } + 5 \text{ términos restantes.}$$

Dado que la suma de cada ciclo es 0, los primeros 996 términos (166 ciclos completos) no contribuyen a la suma total.

Para determinar el número con el que inicia el ciclo 167, es decir, el número en la posición 997 de la lista, observamos el patrón de inicio de los ciclos:

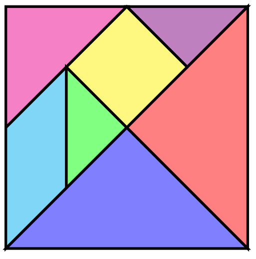
Ciclo	Número de inicio
1	$1 = 3(0) + 1$
2	$4 = 3(1) + 1$
3	$7 = 3(2) + 1$
4	$10 = 3(3) + 1$
$\vdots$	$\vdots$
n	$3(n-1) + 1$

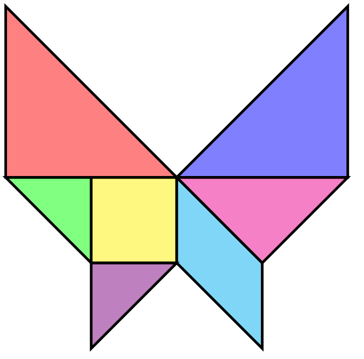
Luego, el ciclo 167 inicia con el número $3(166 - 1) + 1 = 499$ y los últimos cinco números de la lista son $499,\ 500,\ 501,\ -501,\ -500$. Por lo anterior, la suma de los primeros 1001 términos de la sucesión es

$$499 + 500 + 501 - 501 - 500 = 499.$$

Problema 4.

Con un cartón cuadrado de lado $12\,cm$, Lucía construyó un Tangram, pintó sus fichas de colores y luego armó una mariposa con ellas, como se muestra a continuación:





Nota: las piezas del Tangram, son cinco triángulos rectángulos isósceles, un paralelogramo y un cuadrado.
¿Cuál es el perímetro de la mariposa?

(a) $6\left(8+3\sqrt{2}\right)\ cm$

(b) $48\,cm$

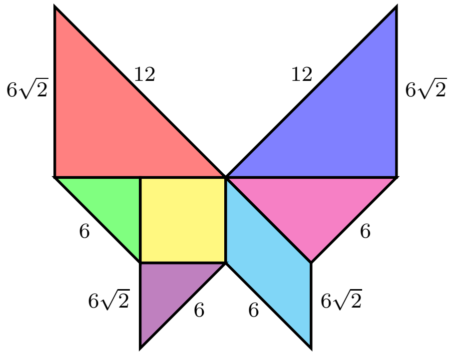
(c) $3\left(8+3\sqrt{2}\right)\ cm$

(d) $66\,cm$

Solución: Aplicando el Teorema de Pitágoras, encontramos que la diagonal del cuadrado con el que se fabricó el Tangram es:

$$\sqrt{12^2+12^2}=\sqrt{144+144}=\sqrt{288}=12\sqrt{2}\,cm.$$

De modo que, las medidas de los lados de las fichas que conforman el contorno de la mariposa son:

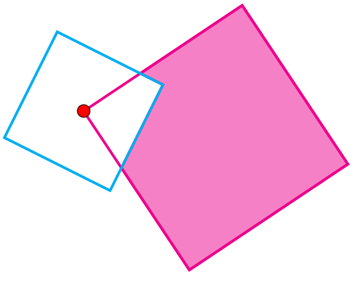


Por lo tanto, el perímetro de la mariposa es:

$$48 + 24\sqrt{2} = 6\left(8 + 3\sqrt{2}\right)\ cm.$$

Problema 5.

En la figura, un vértice del cuadrado grande coincide con el centro del cuadrado más pequeño, y el lado del cuadrado grande es el doble del cuadrado pequeño. Dado que el perímetro del cuadrado pequeño es $24\,cm$, ¿cuál es el área de la región sombreada?



(a) $42\,cm^2$ (b) $63\,cm^2$ (c) $90\,cm^2$ (d) $135\,cm^2$

Solución: El perímetro del cuadrado pequeño es $24\,cm$, luego cada uno de sus lados mide $24 \div 4 = 6\,cm$ y cada lado del cuadrado grande mide $2 \times 6 = 12\,cm$.

Para determinar el área sombreada, observemos que esta corresponde al área del cuadrado grande menos un cuarto del área del cuadrado pequeño. Esto se puede visualizar trazando segmentos perpendiculares desde el centro del cuadrado pequeño hasta sus lados que cortan a los lados del cuadrado grande.

Así, el área sombreada es:

$$12^2 - \frac{1}{4} \times (6^2) = 144 - \frac{36}{4} = 135\, cm^2.$$

PROBLEMA 6.

Un artesano elaboró una escultura en forma de cubo macizo y para pintar su superficie empleó 7 tarros de pintura. Al artesano le encargan replicar la misma escultura pero con un volumen igual a 8 veces el volumen de la escultura original. ¿Cuántos tarros de pintura necesitará para pintar la réplica de la escultura?

(a) 14 (b) 28 (c) 56 (d) 21

Solución: Sea s la longitud de la arista del cubo original, entonces su volumen está dado por $V = s^3$. Para la réplica, el volumen es 8 veces el volumen original, es decir:

$$V' = 8s^3 = (2s)^3,$$

Luego, la nueva escultura es un cubo de arista $2s$, es decir, el doble de la arista del cubo original.

Ahora, calculemos su área superficial. La superficie de un cubo de arista s es $A = 6s^2$. Para la réplica con arista $2s$, el área superficial es:

$$A' = 6(2s)^2 = 6 \times 4s^2 = 4 \times 6s^2 = 4A.$$

Es decir, la superficie de la nueva escultura es 4 veces la superficie de la escultura original.

Como el artesano utilizó 7 tarros de pintura para cubrir la escultura original, la cantidad de tarros necesarios para la réplica es $4 \times 7 = 28$.

PROBLEMA 7.

¿Cuántos números naturales al ser divididos entre 13, producen un residuo igual al triple del cociente correspondiente?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) infinitos

Solución: Sea N un número que al dividirse entre 13 deja un residuo r igual al triple de su correspondiente cociente q, entonces

$$N = 13q + r,$$

donde $r = 3q$ y además $0 \leq r < 13$. Es decir, r es un múltiplo de 3, mayor o igual a cero y menor que 13. Luego, $r \in \{0, 3, 6, 9, 12\}$. Por lo tanto, hay 5 números naturales que al ser divididos entre 13, producen un residuo igual al triple del cociente correspondiente.

PROBLEMA 8.

Valentina descubrió una propiedad interesante en algunos números enteros: entre los divisores positivos del número, excluyendo 1 y el propio número, el mayor es 21 veces el menor. ¿Cuántos enteros positivos cumplen esta propiedad?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) infinitos

Solución: Sea N un entero positivo que cumple la propiedad. Denotemos por d al menor de sus divisores distinto de 1, entonces el mayor de sus divisores, distinto de él mismo, será $21d$, lo que significa que la lista ordenada de divisores de N tiene la siguiente forma:

$$\{1, d, \ldots, 21d, N\}.$$

Como $21 = 3 \times 7$, es claro que 3 debe ser un divisor de N. En consecuencia, d solo puede ser 2 o 3, ya que si d fuera mayor que 3, entonces 3 sería un divisor de N menor que d y distinto de 1, lo que contradice la definición de d.

Así, los únicos valores posibles para $N = d \times 21d$, son: $2 \times 21 \times 2 = 84$ o $3 \times 21 \times 3 = 189$. Por lo tanto, existen exactamente 2 números que cumplen la propiedad.

PROBLEMA 9.

María José compartió en sus redes sociales una lista de los 10 libros que desea leer. Su amigo David quiere regalarle 2 de estos libros en su cumpleaños. ¿De cuántas formas puede David elegir los dos libros para el regalo de María José?

(a) 90 (b) 20 (c) 45 (d) 19

Solución: El problema consiste en calcular de cuántas maneras se pueden seleccionar 2 libros de una lista de 10. Como el orden en que se eligen los libros no importa, entonces el total de formas en que David puede elegir los libros es[1]:

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2} = \frac{90}{2} = 45.$$

[1]**El número combinatorio**
El número combinatorio $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \times k!}$ indica cuántas formas hay de elegir k elementos diferentes de un conjunto de n elementos, donde $0 \leq k \leq n$, sin importar el orden en que se elijan.

2.2. Prueba Selectiva

Problema 1.

La profesora Cecilia entrega las notas finales de matemáticas a su curso de octavo grado. Como incentivo, les ofrece siete décimas adicionales para la calificación final de su asignatura a cada uno de sus estudiantes que resuelvan un reto adicional. Antes de este incentivo, el promedio del grupo era de $4{,}05$. Sin embargo, solo $\frac{4}{7}$ de los estudiantes del grupo lograron resolver correctamente el reto adicional. ¿Cuál es el nuevo promedio del grupo después de aplicar este incentivo?

(a) $4{,}35$ (b) $4{,}40$ (c) $4{,}45$ (d) $4{,}75$

Solución: Por definición de promedio, se tiene que:

$$4{,}05 = \frac{\text{Suma de las 28 calificaciones}}{28} = \frac{S}{28}.$$

De esta ecuación, se obtiene que la suma total de las calificaciones iniciales es $S = 4{,}05 \times 28$.
De los 28 estudiantes, $\dfrac{4}{7}$ de ellos, es decir, 16 estudiantes, obtuvieron un aumento de $0{,}7$ en su calificación final. Por lo tanto, la nueva suma total de calificaciones es

$$S + 0{,}7 \times 16.$$

Así, el nuevo promedio del grupo está dado por:

$$\frac{S + 0{,}7 \times 16}{28} = \frac{4{,}05 \times 28 + 0{,}7 \times 16}{28} = 4{,}45.$$

Problema 2.

Samuel y Carlos compitieron en una carrera de natación. Al término de la competencia, se les informó que Samuel cruzó la meta justo antes que el doble del número de nadadores que superaron a Carlos, mientras que Carlos finalizó exactamente antes que $1{,}5$ veces el número de nadadores que superaron a Samuel. Además, se precisó que Samuel se ubicó en el puesto número 27. ¿Cuántos nadadores participaron en total en la competencia?

(a) 54 (b) 56 (c) 53 (d) 40

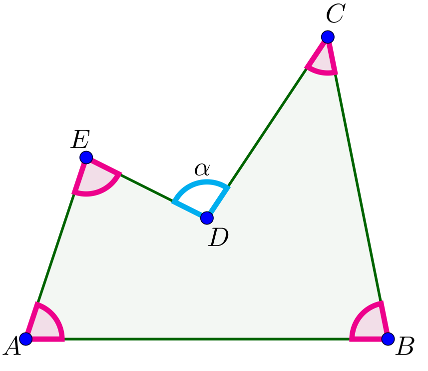
Solución: Dado que Samuel ocupó el puesto 27, significa que 26 nadadores lo superaron. Según el enunciado, este número es el doble de los nadadores que superaron a Carlos, por lo que el número de nadadores que llegaron antes que Carlos es $26 \div 2 = 13$.

Por otro lado, los nadadores que finalizaron después de Carlos son $1{,}5 \times 26 = 39$. En otras palabras, antes de Carlos llegaron 13 nadadores, luego llegó Carlos, y después finalizaron otros 39 nadadores. Por lo tanto, el número total de nadadores en la competencia fue:

$$13 + 1 + 39 = 53.$$

Problema 3.

En la siguiente figura la suma de las medidas de los ángulos coloreados A, B, C y E, es $275°$. ¿Cuál es la medida del ángulo α, señalado en la figura?



(a) $85°$ (b) $95°$ (c) $97°$ (d) $137°$

Solución: La suma de las medidas de los ángulos internos de un pentágono es[2] $540°$.

En la figura, se sabe que la suma de ciertos ángulos internos del pentágono es $275°$, por lo que el ángulo $\angle EDC$ (interno al pentágono) mide:

$$540° - 275° = 265°.$$

Dado que α es el ángulo exterior correspondiente a $\angle EDC$, su medida es:

$$360° - 265° = 95°.$$

[2]Recuerde que la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono con n lados, está dada por: $180°n - 360° = 180°(n-2)$.

Problema 4.

Freddy dejó su teléfono sobre el teclado de su computadora mientras tomaba su merienda. Al regresar, se dio cuenta de que el teléfono estaba presionando la tecla con el número 7, lo que resultó en la escritura de un número con 2024 sietes en el documento en el que estaba trabajando en su computadora. ¿Cuál es el residuo que deja este número al dividirse entre 9?

(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 7

Solución: La suma de las cifras del número es $7 \times 2024 = 14168$. Para encontrar el residuo de 14168 al dividirlo entre 9, sumamos sus dígitos:

$$1 + 4 + 1 + 6 + 8 = 20.$$

Luego, sumamos nuevamente los dígitos de 20: $2 + 0 = 2$.

Dado que 14168 deja un residuo de 2 al dividirse entre 9, el residuo que deja el número $7777\ldots7$ (con 2024 cifras) al dividirse entre 9 también es 2.

Recuerde que, el residuo que deja un número al dividirse entre 9 es el mismo residuo que deja la suma de sus cifras al dividirse entre 9. Esto simplifica el cálculo del residuo (al dividir entre 9) sin necesidad de realizar la división completa.

Problema 5.

Lucía tiene cubos azules de $63\,mm$ de arista y cubos rojos de $48\,mm$ de arista. Quiere construir dos torres de igual altura, una azul y una roja, apilando sus cubos uno encima del otro. ¿Cuál es la cantidad mínima de cubos que Lucía necesitará?

(a) 16 (b) 21 (c) 37 (d) 1008

Solución: La altura común de las torres debe ser un múltiplo común de 63 y 48. Dado que:

$$63 = 3^2 \times 7, \quad 48 = 2^4 \times 3,$$

el mínimo común múltiplo de 63 y 48 es:

$$mcm(63, 48) = 2^4 \times 3^2 \times 7 = 1008.$$

Por lo tanto, la altura mínima que debe tener cada torre es $1008\,mm$.
Ahora, para construir la torre de cubos azules con esta altura, se necesitan:

$$\frac{1008}{63} = 16 \text{ cubos.}$$

Para la torre de cubos rojos, se necesitan:

$$\frac{1008}{48} = 21 \text{ cubos.}$$

Finalmente, la cantidad mínima de cubos que Lucía necesitará es $16 + 21 = 37$.

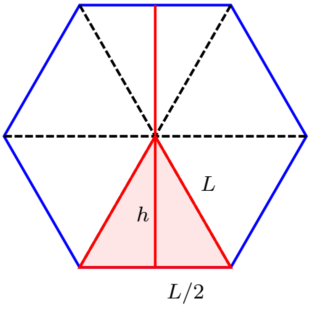
Problema 6.

La distancia entre dos lados opuestos de un hexágono regular es $3\,cm$. ¿Cuál es el perímetro del hexágono?

(a) $6\sqrt{3}\,cm$ (b) $9\sqrt{3}\,cm$ (c) $18\sqrt{3}\,cm$ (d) $12\sqrt{3}\,cm$

Solución:

Dado que el hexágono es regular, podemos dividirlo en seis triángulos equiláteros al trazar sus diagonales, como se muestra en la figura.
Note que, la distancia entre dos lados opuestos del hexágono regular corresponde a al doble de la altura h de uno de los triángulos equiláteros, luego $h = \dfrac{3}{2}$.



Si llamamos L al lado del hexágono, por el Teorema de Pitágoras, tenemos:

$$\begin{aligned} L^2 &= h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ L^2 - \frac{L^2}{4} &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ L^2 &= 3 \\ L &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Finalmente, el perímetro del hexágono es $6L = 6 \times \sqrt{3}\,cm$.

Problema 7.

Los números reales x y y cumplen las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{cases} (x+2)(y+2) = 20, \\ (x+3)(y+3) = 30. \end{cases}$$

¿Cuál es el valor de $(x+4)(y+4)$?

Solución: Aplicando la propiedad distributiva en las ecuaciones dadas, obtenemos:

$$xy + 2x + 2y + 4 = 20,$$
$$xy + 3x + 3y + 9 = 30.$$

Restando la primera ecuación de la segunda, se tiene:

$$x + y + 5 = 10, \quad \text{es decir,} \quad x + y = 5.$$

Ahora, sumando las dos ecuaciones iniciales:

$$\begin{aligned} 2xy + 5x + 5y + 13 &= 50, \\ 2xy + 5(x+y) &= 37, \\ 2xy + 5(5) &= 37, \\ 2xy &= 12, \\ xy &= 6. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el producto $(x+4)(y+4)$ se calcula como:

$$\begin{aligned} (x+4)(y+4) &= xy + 4x + 4y + 16 \\ &= xy + 4(x+y) + 16 \\ &= 6 + 4(5) + 16 = 42. \end{aligned}$$

Problema 8.

¿Cuántos números enteros entre 1000 y 2024 tienen todos sus dígitos distintos?

Solución: Dividimos el conteo en dos casos:

Caso 1. Números de 1000 a 1999. La primera cifra es 1, y las tres cifras restantes deben ser distintas entre sí y distintas de 1, por lo tanto

- la segunda cifra, puede ser cualquier dígito de $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (9 opciones),
- la tercer cifra, puede ser cualquier dígito que no sea 1 ni la segunda cifra (8 opciones); y
- la cuarta cifra, puede ser cualquier dígito que no sea 1, la segunda ni la tercera cifra (7 opciones).

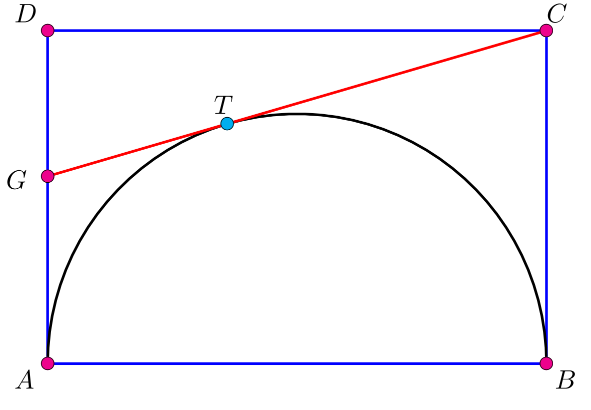
El total de números en este caso, por el principio multiplicativo, es $9 \times 8 \times 7 = 504$.

Caso 2. Números de 2000 a 2024. La primera cifra es 2, la segunda es 0, la tercera es 1 y la cuarta podría ser 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9. Por lo tanto, en este caso, tendremos 7 números posibles.

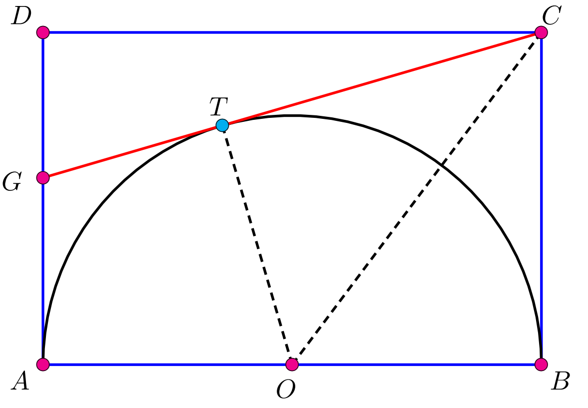
Sumamos los dos casos, la cantidad de números que cumplen las condiciones son $504 + 7 = 511$.

PROBLEMA 9.

En la siguiente figura el segmento $\overline{CG}$ es tangente, en el punto T, a la semicircunferencia de diámetro $AB = 13\,cm$. Si el área del rectángulo $ABCD$ es $91\,cm^2$, ¿cuál es la medida de $\overline{CT}$, en centímetros?



Solución: Al trazar el radio OT y el segmento OC, como se muestra en la figura,



observamos que los triángulos OTC y OBC son congruentes. Esto se debe a que $\measuredangle OTC = \measuredangle OBC = 90°$, $\overline{OT} = \overline{OB}$ por ser radios del mismo círculo, y OC es la hipotenusa común en ambos triángulos. Por lo tanto, aplicando el Teorema de Pitágoras, los catetos CT y CB tienen la misma longitud.
Además, dado que el área del rectángulo es $\overline{AB} \times \overline{CB} = 91$ cm^2 y $\overline{AB} = 13$ cm, se obtiene que:

$$\overline{CT} = \overline{CB} = \frac{91}{13} = 7 \text{ cm.}$$

2.3. Prueba Final

Problema 1.

Daniel, Mateo e Isaac, juegan a ser detectives y para crear sus claves secretas seleccionaron tres dígitos: a, b y c, tal que $a > b > c$. Daniel decidió que su clave sería el número abc, Mateo eligió el cba, mientras que Isaac optó por el cab, que justamente representa la diferencia entre la contraseña de Daniel y la de Mateo. ¿Cuál es la contraseña de Isaac?

Solución: Consideremos la siguiente resta:

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ - & c & b & a \\ \hline & c & a & b \end{array}$$

Restando de esta manera, como $a > c$, entonces debemos "prestarle 1 a la c" obtenido:

$$10 + c - a = b.$$

Continuando con al siguiente columna, recordemos que la b "prestó 1", entonces también debemos "prestarle 1 a la b" así tenemos que $10 + b - 1 - b = a$, es decir $9 = a$. Finalmente, en la tercera columna nos queda $a - 1 - c = c$, luego $9 - 1 = 2c$, es decir $c = 4$, y volviendo a la primera ecuación tenemos: $10 + 4 - 9 = b$, esto es $b = 5$. Por lo tanto, la contraseña de Isaac es 495.

Problema 2.

Karla ha pensado dos números enteros distintos, mayores que 1; y reta a sus hermanos a adivinarlos. A su hermana Sara le ha contado en secreto cuál es la suma de los números y a su hermano David le ha dicho en secreto el producto de los números. Luego los hermanos mantienen la siguiente conversación:

- **David:** *Ya sé cuáles son los dos números.*
- **Sara:** *¿Verdad? Pues, yo no los sabía, pero ahora los sé, ya que la suma es* 15.

¿Cuáles son los números que pensó Karla?

Solución: A partir del comentario de David, deducimos que el número es el producto de dos primos, ya que, de no ser así, no podría afirmar lo que dijo. Por otro lado, el comentario de Sara nos indica que la suma de estos dos primos es 15. La única pareja de números primos que cumple esta condición es 13 y 2.

Problema 3.

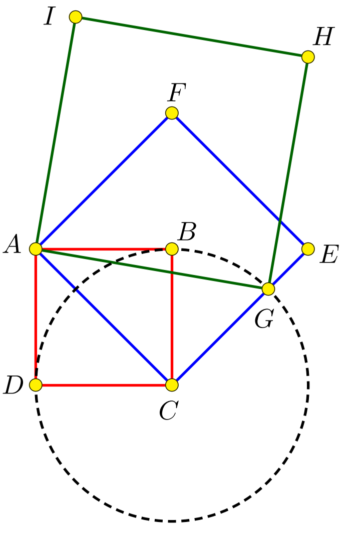
Atenas hace la siguiente construcción con su escuadra y su compás.

(i) Bosqueja un cuadrado $ABCD$ de lado $1\,cm$.

(ii) Luego construye el cuadrado $AFEC$.

(iii) Después, con el compás, traza una circunferencia con centro de C y radio CB, y marca el punto G, de intersección entre la circunferencia con el segmento $\overline{CE}$.

(iv) Finalmente, también traza el cuadrado $AIHG$.



Determine el área de cada uno de los tres cuadrados construidos por Atenas.

Solución:

- El área del cuadrado $ABCD$ es: $1\,cm \times 1\,cm = 1\,cm^2$.

- Observe que una mitad del cuadrado $ABCD$ coincide con un cuarto del cuadrado $AFEC$. Por lo tanto, el área del cuadrado $AFEC$ es

$$4 \cdot \frac{1}{2}\,cm^2 = 2\,cm^2.$$

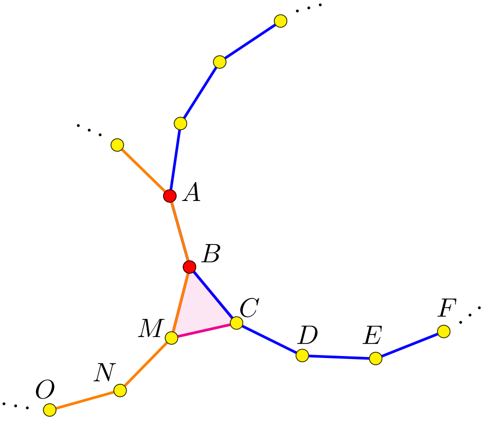
- Usando el Teorema de Pitágoras en el triángulo ACG (que tiene ángulo recto en C), tenemos:

$$AG^2 = AC^2 + CG^2 = 2 + 1 = 3\,cm^2.$$

Por lo tanto, el área del cuadrado $AIHG$ es $3\,cm^2$.

Problema 4.

En la siguiente figura, se alcanza a apreciar una parte de dos polígonos regulares que tienen en común el lado $\overline{AB}$. Si el polígono $ABCD\ldots$ tiene 15 lados y el triángulo BCM es equilátero, ¿cuántos lados tiene el polígono $ABMN\ldots$?



Solución: Dado que el triángulo BMC es equilátero, entonces $\measuredangle MBC = 60°$. Además, dado que el polígono regular $ABCD$... tiene 15 lados, entonces[3] $\measuredangle CBA = \dfrac{180° \cdot 15 - 360°}{15} = 156°$. De modo que $\measuredangle ABM = 360° - 60° - 156° = 144°$. Por lo tanto, si el polígono $ABMN$... tiene n lados, entonces se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{180°n - 360°}{n} &= 144° \\ 180°n - 360° &= 144°n \\ 36° &= 360° \\ n &= 10. \end{aligned}$$

[3] Recuerde que la suma de los ángulos internos de un polígono regular con n lados, está dada por $180°n - 360°$. Por lo tanto, cada uno de sus ángulos internos mide $\dfrac{180°n - 360°}{n}$.

PROBLEMA 5.

Encuentre un número capicúa de 4 cifras que sea múltiplo de 15 y tenga exactamente 24 divisores positivos.

Un número capicúa es aquel que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. En otras palabras, es un número simétrico en su escritura. Por ejemplo, los números 55, 121 *y* 4884 *son capicúas.*

Solución: Si un número es divisible por 15, entonces debe ser divisible tanto por 3 como por 5.

Dado que es divisible por 5, debe terminar en 0 o 5. Sin embargo, si terminara en 0, al ser un número capicúa, también debería comenzar con 0, lo que implicaría que es un número de solo tres cifras. Por lo tanto, debe terminar en 5, y su forma es $5aa5$.

Además, para que sea divisible por 3, la suma de sus cifras debe ser un múltiplo de 3. Así, tenemos:

$$5 + a + a + 5 = 10 + 2a.$$

Para que $10 + 2a$ sea múltiplo de 3, los posibles valores de a son 1, 4 y 7.

Ahora, queda determinar la cantidad de divisores de los tres números posibles:

5115	3	5445	3	5775	3
1705	5	1815	3	1925	5
341	11	605	5	385	5
31	31	121	11	77	7
1		11	11	11	11
		1		1	

- El número $5115 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$, tiene $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ positivos[4].
- $5445 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11^2$, tiene $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ divisores positivos.

[4] ¿Cómo contar la cantidad de divisores positivos de un número?
Si un número entero n se descompone en factores primos como

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdots p_k^{e_k},$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son factores primos distintos y $e_1, e_2, \ldots, e_k$ son sus respectivos exponentes, entonces la cantidad de divisores positivos de n se obtiene mediante la fórmula:

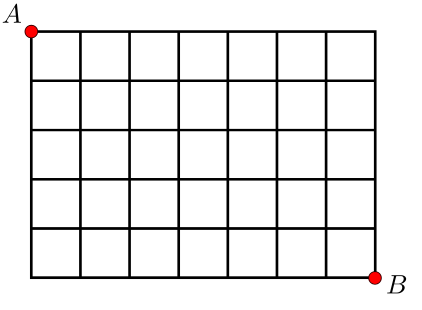
$$(e_1 + 1)(e_2 + 1)(e_3 + 1) \cdots (e_k + 1).$$

- $5775 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$, tiene $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ divisores positivos.

Por tanto, el número buscado es 5775.

PROBLEMA 6.

Una hormiga camina por una rejilla de 7 por 5 cuadrados, como la que se muestra en la figura:



¿De cuántas maneras puede la hormiga ir desde el punto A hasta el punto B, recorriendo la menor distancia posible?

Solución: Note que sin importar qué camino escoja la hormiga, esta siempre debe moverse 7 veces a la derecha y 5 veces hacia abajo, es decir, un total de 12 movimientos, luego puede pensarse como la cantidad de formas de acomodar 5 movimientos hacia abajo entre 12 totales, lo cual es

$$\binom{12}{5} = 792.$$

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

Un robot explorador avanza con pasos regulares de $\frac{2}{5}$ de metro cada paso. Si realiza 2 pasos cada 3 segundos, ¿qué distancia habrá recorrido en media hora?

(a) 480 metros

(b) 1440 metros

(c) 288 metros

(d) 960 metros

Solución: Media hora equivale a $30 \times 60 = 1800$ segundos. Por lo tanto, el robot habrá dado

$$\frac{2}{3} \times 1800 = 1200$$

pasos en ese tiempo. Como en cada paso avanza $\frac{2}{5}$ de metro, la distancia total recorrida en media hora es

$$1200 \times \frac{2}{5} = 480\, m.$$

Problema 2.

¿Para cuántos enteros positivos n se cumple que la fracción $\dfrac{3n+11}{2n-5}$ es mayor que 4?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

Solución: Queremos encontrar los enteros positivos n que satisfacen la desigualdad:

$$\frac{3n+11}{2n-5} > 4.$$

Resolvemos la desigualdad considerando los casos según el signo del denominador:

Si $2n-5>0$: esto es $2n>5$ o $n>\dfrac{5}{2}$

$$\begin{aligned} 3n+11 &> 4(2n-5) \\ 3n-8n &> -20-11 \\ -5n &> -31 \\ n &< \frac{31}{5} = 6{,}2 \end{aligned}$$

En este caso, los enteros positivos que cumplen $\dfrac{5}{2} < n < \dfrac{31}{5}$ son: $3, 4, 5$ y 6.

Si $2n-5<0$: esto es $2n<5$ o $n<\dfrac{5}{2}$

$$\begin{aligned} 3n+11 &< 4(2n-5) \\ 3n-8n &< -20-11 \\ -5n &< -31 \\ n &> \frac{31}{5} = 6{,}2 \end{aligned}$$

Pero en este caso, no existen enteros que cumplan simultáneamente $n<\dfrac{5}{2}$ y $n>6{,}2$.

Por lo anterior, los enteros positivos que cumplen la condición son 4 en total.

Problema 3.

Ada Lovelace fue una precursora en la historia de las mujeres en la ciencia. La innovación que significó su aporte al mundo de las matemáticas ha inspirado a muchas mujeres a dedicarse a la tecnología y a la informática.
En el siguiente Alphametic, letras diferentes representan dígitos diferentes. Si $D = 4A$, $V < C$ y $O = 0$, ¿cuál es el valor de $L + O + V + E$?

$$\begin{array}{cccccc} & & & A & D & A \\ & & L & O & V & E \\ + & & L & A & C & E \\ \hline & G & E & N & I & O \end{array}$$

(a) 15 (b) 16 (c) 19 (d) 20

Solución: Usando las igualdades del enunciado llegamos a

$$\begin{array}{cccccc} & & & A & 4A & A \\ & & L & 0 & V & E \\ + & & L & A & C & E \\ \hline & G & E & N & I & 0 \end{array}$$

Como cada letra diferente representa un dígito diferente y $D = 4A$, podemos concluir que $A = 1$ o $A = 2$. Además notemos que $A + E + E$ es par puesto que el resultado termina en 0. Dado que $E + E = 2E$ es par, A debe ser par, así $A = 2$ y $D = 8$.

$$\begin{array}{cccccc} & & & 2 & 8 & 2 \\ & & L & 0 & V & E \\ + & & L & 2 & C & E \\ \hline & G & E & N & I & 0 \end{array}$$

Notemos que la parte de la suma

$$\begin{array}{ccc} & & L \\ + & & L \\ \hline & G & E \end{array}$$

se puede hacer directamente puesto que no se "lleva" ninguna unidad de sumas anteriores. Concluimos que $G = 1$ ya que no hay ninguna suma de dos dígitos que de 20 o más, $L > 5$ y E es par, pero recordando algo dicho anteriormente $2+E+E$ es un número terminado en 0, es decir, un múltiplo de 10, y las únicas posibilidades para que E cumpla esto son $E = 4$ o $E = 9$, pero como E debe ser par, entonces $E = 4$. De lo anterior, solo queda una posibilidad para L y es $L = 7$.

$$\begin{array}{cccccc} & & & 2 & 8 & 2 \\ & & 7 & 0 & V & 4 \\ + & & 7 & 2 & C & 4 \\ \hline & 1 & 4 & N & I & 0 \end{array}$$

Podemos asegurar que $N = 5$ o $N = 6$ puesto que no puede ser 4, luego entre V, C e I están el 3 y el 9, notemos que si $I = 9$, $N = 5$ y quedarían el 3 y el 6 para la V y la C en algún orden, es decir, $8 + 3 + 6 = 19$, pero esto no es cierto, luego I no puede ser 9, de igual forma se descarta que I sea 5 o 6, luego $I = 3$, así $N = 6$ y como $V < C$, entonces $V = 5$ y $C = 9$.

$$\begin{array}{cccccc} & & & 2 & 8 & 2 \\ & & 7 & 0 & 5 & 4 \\ + & & 7 & 2 & 9 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 6 & 3 & 0 \end{array}$$

Finalmente, tenemos que $L + O + V + E = 7 + 0 + 5 + 4 = 16$.

Problema 4.

Los puntos $(1, 3)$, $(x, 6)$ y $(4, y)$ están sobre una recta que pasa por el origen. ¿Cuál es el valor de $x + y$?

(a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 15

Solución: La recta pasa por el origen $(0, 0)$ y por el punto $(1, 3)$, entonces su pendiente es

$$m = \frac{3-0}{1-0} = 3.$$

Dado que el punto $(x, 6)$ también está en la recta, debe cumplir con la ecuación de la pendiente:

$$m = \frac{6-0}{x-0} = 3$$

De ahí que $x = 2$. De manera similar, el punto $(4, y)$ debe cumplir con la ecuación de la pendiente:

$$m = \frac{y-0}{4-0} = 3.$$

Resolviendo se obtiene que $y = 12$. Por lo tanto, $x + y = 2 + 12 = 14$.

Problema 5.

Un rectángulo tiene $7\,cm$ más de largo que de ancho. Si una de sus diagonales mide $13\,cm$, ¿cuál es el área del rectángulo?

(a) $34\,cm^2$ (b) $60\,cm^2$ (c) $84\,cm^2$ (d) $288\,cm^2$

Solución: Sea x el ancho del rectángulo. Entonces, su largo es $x + 7$ y su área es

$$x(x+7) = x^2 + 7x.$$

Dado que la diagonal mide $13\,cm$, aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} x^2 + (x+7)^2 &= 13^2 \\ x^2 + (x^2 + 14x + 49) &= 169 \\ 2x^2 + 14x &= 120 \\ x^2 + 7x &= 60. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área del rectángulo es $60\,cm^2$.

Problema 6.

¿Cuál es la suma de las cifras del número $\left(10^{10}+5\right)^2$?

(a) 17 (b) 25 (c) 8 (d) 9

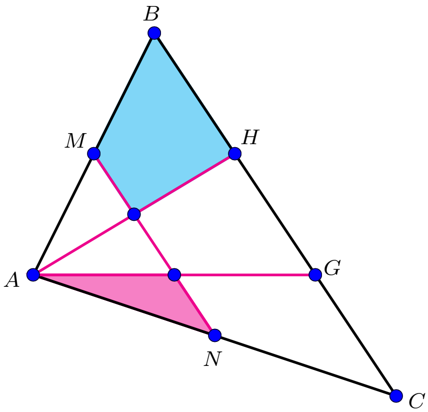
Solución: Note que:

$$\begin{aligned} \left(10^{10}+5\right)^2 &= \left(10^{10}\right)^2 + 2\cdot\left(10^{10}\right)\cdot 5 + 5^2 \\ &= 10^{20} + 10^{11} + 25 \\ &= 1\underbrace{00\ldots00}_{20-ceros} + 1\underbrace{00\ldots00}_{11-ceros} + 25 \\ &= 1\underbrace{00\ldots00}_{8-ceros}1\underbrace{00\ldots00}_{9-ceros}25 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma de las cifras de $\left(10^{10}+5\right)^2$ es $1 + 1 + 2 + 5 = 9$.

PROBLEMA 7.

En la siguiente figura, los puntos H y G dividen $\overline{BC}$ en tres partes iguales, mientras que M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Si el área del triángulo sombreado es $5\,cm^2$, ¿cuál es el área del cuadrilátero sombreado?



(a) $15\,cm^2$ (b) $10\,cm^2$ (c) $12{,}5\,cm^2$ (d) $20\,cm^2$

Solución: Dado que M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, el área del triángulo AMN es $\frac{1}{4}$ del área del triángulo ABC. Además, los tres triángulos en los que se divide AMN tienen la misma área. En particular, el área del triángulo AMP es $5\,cm^2$, donde P es la intersección de los segmentos MN y AH.

Dado que el área de AMP representa un cuarto del área del triángulo ABH, se concluye que los restantes $\frac{3}{4}$ del área de ABH corresponden al cuadrilátero sombreado. Como $\frac{1}{4}$ del área de ABH es $5\,cm^2$, el área del cuadrilátero sombreado es:

$$3 \times 5 = 15\,cm^2.$$

PROBLEMA 8.

Valentina descubrió una propiedad interesante en algunos números enteros: entre los divisores positivos del número, excluyendo 1 y el propio número, el mayor es 21 veces el menor. ¿Cuál es la mayor cantidad de divisores positivos que pueden tener los números que cumplen esta propiedad?

(a) 4 (b) 12 (c) 8 (d) infinitos

Solución: Sea N un entero positivo que cumple la propiedad. Denotemos por d al menor de sus divisores distinto de 1, entonces el mayor de sus divisores, distinto de él mismo, será $21d$, lo que significa que la lista ordenada de divisores de N tiene la siguiente forma:

$$\{1, d, \ldots, 21d, N\}.$$

Como $21 = 3 \times 7$, es claro que 3 debe ser un divisor de N. En consecuencia, d solo puede ser 2 o 3, ya que si d fuera mayor que 3, entonces 3 sería un divisor de N menor que d y distinto de 1, lo que contradice la definición de d.
Así, los únicos valores posibles para $N = d \times 21d$, son: $2 \times 21 \times 2 = 84$ o $3 \times 21 \times 3 = 189$. Note que el $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, tiene 12 divisores positivos[1]. y mientras que el $189 = 3^3 \cdot 7$, apenas tiene 8. Por lo tanto, la mayor cantidad de divisores positivos que pueden tener los números que cumplen esta propiedad es 12.

Problema 9.

La suma de todos los números de tres cifras distintas que se pueden formar con los dígitos: 2, 5 y a es 2220, ¿cuál es el dígito a?

(a) 3 (b) 4 (c) 6 (d) 7

Solución: Los números de tres cifras distintas con los dígitos $2, 5, a$ son:

$$\begin{aligned}
25a &= 100 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + a \\
2a5 &= 100 \cdot 2 + 10 \cdot a + 5 \\
52a &= 100 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + a \\
5a2 &= 100 \cdot 5 + 10 \cdot a + 2 \\
a25 &= 100 \cdot a + 10 \cdot 2 + 5 \\
a52 &= 100 \cdot a + 10 \cdot 5 + 2.
\end{aligned}$$

Note que cada dígito aparece exactamente dos veces en la posición de las centenas, dos veces en la posición de las decenas y dos veces en la posición de las unidades.

[1] ¿Cómo contar la cantidad de divisores positivos de un número?
Si un número entero n se descompone en factores primos como

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdots p_k^{e_k},$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son factores primos distintos y $e_1, e_2, \ldots, e_k$ son sus respectivos exponentes, entonces la cantidad de divisores positivos de n se obtiene mediante la fórmula:

$$(e_1 + 1)(e_2 + 1)(e_3 + 1) \cdots (e_k + 1).$$

Así, la suma de todos estos números se puede expresar como:

$$2(100 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 2) + 2(100 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 5) + 2(100 \cdot a + 10 \cdot a + a) = 2220$$

De donde realizando algunas operaciones:

$$\begin{aligned} 4(100 + 10 + 1) + 10(100 + 10 + 1) + 2a(100 + 10 + 1) &= 2220 \\ 111(14 + 2a) &= 2220 \\ 14 + 2a &= 20 \\ 7 + a &= 10. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a = 3$.

3.2. Prueba Selectiva

PROBLEMA 1.

En una emocionante jornada de pesca, Sara, Daniel e Isaac, capturaron un total de 72 peces. Antes de ir a casa, Sara decide cederle a Daniel tantos peces como pescó Daniel, luego Daniel cede a Isaac tantos peces como pescó Isaac, y finalmente Isaac cede a Sara tantos peces como a ella le quedaban. De esta manera, todos regresan a casa con la misma cantidad de peces. ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de peces que pescó Sara y los que pescó Isaac?

(a) 3 (b) 12 (c) 15 (d) 24

Solución: Sea S, D e I las cantidades de peces que capturaron Sara, Daniel e Isaac, respectivamente. Entonces la cantidad de peces que tiene cada uno cambió de la siguiente manera:

	Inicio	Cede Sara	Cede Daniel	Cede Isaac
Sara	S	$S-D$	$S-D$	$S-D+(S-D)$
Daniel	D	$D+D$	$D+D-I$	$D+D-I$
Isaac	I	I	$I+I$	$I+I-(S-D)$

Del enunciado sabemos que $S+D+I=72$ y que las cantidades de la última columna son iguales, como la cantidad total de peces no cambió, tenemos:

$$\begin{aligned} 2(S-D) &= 24, \\ 2D-I &= 24, \\ 2I-(S-D) &= 24. \end{aligned}$$

De la primera ecuación $S-D=12$, reemplazamos esta expresión en la tercera ecuación: $2I-12=24$, de donde $I=18$. Ahora, reemplazando el valor de I en al segunda ecuación: $2D-18=24$, tenemos que $D=21$. Finalmente, como $S-D=12$, esto es $S-21=12$, entonces $S=33$. Por lo tanto, la diferencia entre la cantidad de peces que pescó Sara S y los que pescó Isaac I es

$$S-I=33-18=15.$$

Problema 2.

Al escribir el número $0,\overline{2024} = 0,202420242024...$ como una fracción irreducible, ¿cuál es la diferencia positiva entre el numerador y el denominador?

(a) 725 (b) 997 (c) 7975 (d) 7976

Solución: Sea $x = 0,\overline{2024} = 0,202420242024...$, entonces:

$$\begin{aligned}
10000x &= 2024,202420242024... \\
10000x &= 2024 + x \\
9999x &= 2024 \\
x &= \frac{2024}{9999} = \frac{184}{909}
\end{aligned}$$

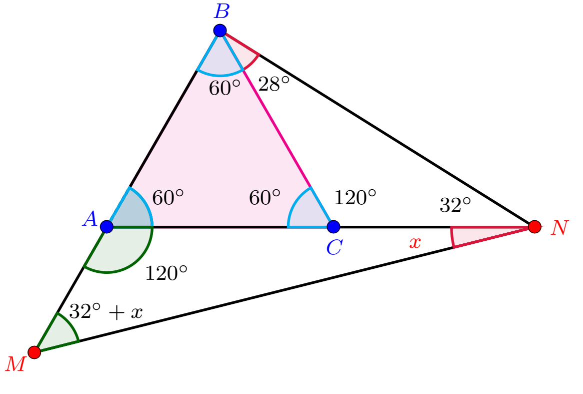
Por lo tanto, el número $0,\overline{2024}$ expresado como fracción irreducible es $\dfrac{184}{909}$ y la diferencia positiva entre el numerador y el denominador es $909 - 184 = 725$.

Problema 3.

En un triángulo equilátero ABC, los lados $\overline{BA}$ y $\overline{AC}$ se prolongan hasta los puntos M y N, respectivamente, de manera que $BM = BN$, con A y C ubicados sobre los segmentos $\overline{BM}$ y $\overline{AN}$, respectivamente. Si el ángulo CBN mide $28°$, ¿cuál es la medida del ángulo ANM?

(a) $23°$ (b) $32°$ (c) $46°$ (d) $14°$

Solución: Considere la siguiente figura:



Dado que el triangulo ABC es equilátero, entonces sus ángulos internos miden, cada uno $60°$. Además $\measuredangle NCB = \measuredangle MAN = 120°$, pues son suplementarios de ángulos de $60°$. La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, aplicando esto en el triángulo BCN, tenemos:

$$\measuredangle BNC = 180° - 28° - 120° = 32°.$$

Por otra parte, si $\measuredangle ANM = x$, dado que el triángulo MBN es isósceles, pues $BM = BN$, entonces,

$$\measuredangle NMA = \measuredangle BNM = 32° + x,$$

Luego, sumando las medidas de los ángulos internos del triángulo AMN, tenemos:

$$\begin{aligned} \measuredangle MAN + \measuredangle ANM + \measuredangle NMA &= 180° \\ 120° + x + 32° + x &= 180° \\ 2x &= 28° \\ x &= 14°. \end{aligned}$$

Por lo anterior, $\measuredangle ANM = 14°$.

PROBLEMA 4.

Una granjera estaba preparando sus manzanas para llevarlas al mercado cuando notó que si las empacaba por docenas, le sobraban 3 manzanas, pero si optaba por empacarlas por quincenas, le quedaban 6 manzanas sobrantes. ¿Cuántas manzanas le sobrarían si decidiera empacarlas por decenas?

(a) 1 (b) 3 (c) 8 (d) 9

Solución: El número de manzanas M, es 3 más que un múltiplo de 12 y 6 más que un múltiplo de 15, esto es:

$$\begin{aligned} M &= 12q + 3 \\ M &= 15k + 6, \end{aligned}$$

donde q y k son números enteros. Multiplicando la primera ecuación por 5 y la segunda por 4, tenemos:

$$\begin{aligned} 5M &= 60q + 15 \\ 4M &= 60k + 24, \end{aligned}$$

Ahora, para estas dos últimas ecuaciones, si restamos la segunda de la primera, tenemos:

$$\begin{aligned} M &= 60(q-k) - 9 & \\ M &= 10(6q-6k) - 9 + 10 - 10 & &\text{Factorizamos el } 10 \text{ y sumamos cero} \\ M &= 10(6q-6k-1) + 1 & &\text{Sumamos } -9+10=1 \text{ y factorizamos el } -10 \\ M &= 10t + 1, & &\text{Sustituimos } t = 6q-6k-1 \end{aligned}$$

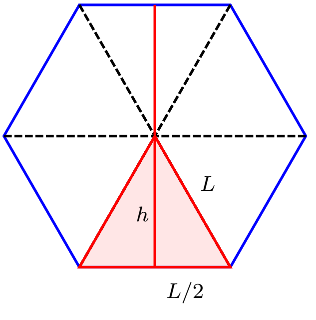
donde $t = 6q - 6k - 1$, es un número entero. Hemos visto que M es uno más que un múltiplo de 10. Por lo tanto, si la granjera empaca las manzanas por decenas, le sobraría 1.

PROBLEMA 5.

La distancia entre dos lados opuestos de un hexágono regular es $2\,cm$. ¿Cuál es el área del hexágono?

(a) $\sqrt{3}\,cm^2$ (b) $2\sqrt{3}\,cm^2$ (c) $3\sqrt{3}\,cm^2$ (d) $6\sqrt{3}\,cm^2$

Solución: Dado que el hexágono es regular, podemos dividirlo en seis triángulos equiláteros al trazar sus diagonales, como se muestra en la figura:



Note que, la distancia entre dos lados opuestos del hexágono regular corresponde a al doble de la altura h de uno de los triángulos equiláteros, luego $h = 1$. Si llamamos

L al lado del hexágono, entonces, por el Teorema de Pitágoras, tenemos:

$$\begin{aligned} L^2 &= h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ \frac{3}{4}L^2 &= 1 \\ L &= \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Finalmente, el área del hexágono sería seis veces el área de uno de los triángulos equiláteros esto es:

$$6\left(\frac{L \times h}{2}\right) = \frac{6\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)(1)}{2} = \frac{6}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\,cm^2.$$

Problema 6.

¿Para cuántos valores enteros de n la expresión $|n^2 - 6n + 5|$ es un número primo?

(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) infinitos

Solución: Factoricemos el trinomio:

$$n^2 - 6n + 5 = (n-1)(n-5).$$

Por lo tanto, la expresión que analizamos es:

$$|(n-1)(n-5)| = |(n-1)||(n-5)|.$$

Dado que esta expresión es el producto de dos factores enteros, para que su valor numérico sea un número primo, debe suceder que uno de los factores es 1.

Caso 1: Si $|(n-1)| = 1$. En este caso, $n - 1 = \pm 1$, lo que implica que $n = 2$ o $n = 0$. Sustituyéndolos en la expresión original para verificar si el resultado es primo, obtenemos:

$$\begin{aligned} |(2-1)(2-5)| &= 3 && \text{válido}, \\ |(0-1)(0-5)| &= 5 && \text{válido}. \end{aligned}$$

Caso 2: Si $|(n-5)| = 1$. En este caso, $n - 5 = \pm 1$, lo que implica que $n = 6$ o $n = 4$. Verificamos estos valores en la expresión:

$$|(6-1)(6-5)| = 5 \qquad \text{válido},$$
$$|(4-1)(4-5)| = 3 \qquad \text{válido}.$$

Por lo tanto, los valores de n para los cuales la expresión dada es un número primo, son 4 en total: $n = 0, 2, 4, 6$.

Problema 7.

Un profesor reta a sus estudiantes con el siguiente acertijo para averiguar la edad de su hijo:
"Al sumar, el residuo que queda al dividir mi edad entre la edad de mi hijo, con el producto de su edad y un cuarto de la edad que tendrá en un año, obtengo 15*. Además, la diferencia entre la edad de mi hijo y el residuo que deja mi edad al dividirse entre su edad es* 6*."*

¿Cuál es la edad del hijo del profesor?

Solución: Sea H la edad del hijo del profesor y r el residuo que deja la edad del profesor al dividirse entre la edad de su hijo. Entonces, se cumple la ecuación:

$$r + H \times \frac{H+1}{4} = 15.$$

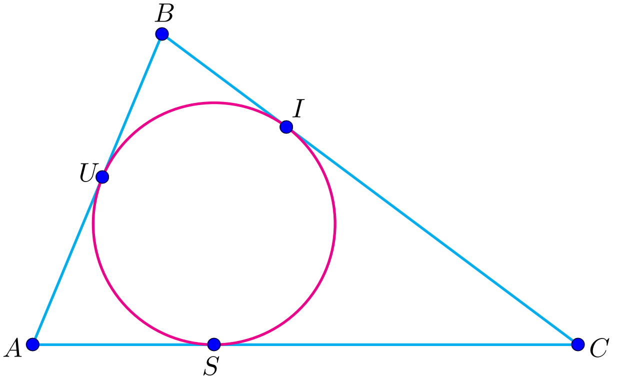
Además, dado que $H - r = 6$, podemos expresar el residuo como $r = H - 6$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación original y resolviendo para H, obtenemos:

$$\begin{aligned} H - 6 + \frac{H(H+1)}{4} &= 15 \\ \frac{4H + H(H+1)}{4} &= 21 \\ H^2 + 5H - 84 &= 0 \\ (H+12)(H-7) &= 0. \end{aligned}$$

De aquí, las soluciones posibles son $H = -12$ o $H = 7$. Como la edad debe ser un número entero positivo, concluimos que $H = 7$. Por lo tanto, el hijo del profesor tiene 7 años.

PROBLEMA 8.

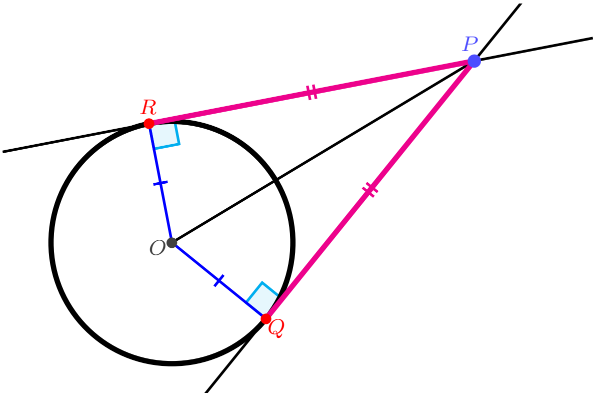
En la figura adjunta, se muestra un triángulo ABC con un círculo inscrito. Los puntos de tangencia entre el círculo y los lados del triángulo se denotan como U, I y S, respectivamente. Si el perímetro del triángulo ABC es 24 y la longitud del lado $\overline{BC}$ es 8, ¿cuál es la longitud de $\overline{AS}$?



Solución:

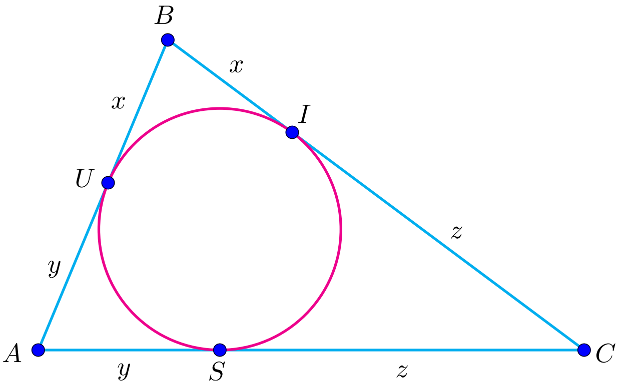
Idea clave: Si desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan dos rectas tangentes a ella, entonces las distancias desde P a los puntos de tangencia son iguales.

Para demostrar esto, consideremos la siguiente construcción:



Note que los triángulos $\triangle ORP$ y $\triangle OQP$ son congruentes. Como consecuencia, sus lados correspondientes son iguales, lo que implica que $\overline{RP} = \overline{QP}$.

Aplicando la idea anterior a nuestro problema tenemos que:



$$\overline{BI} = \overline{BU} = x$$
$$\overline{AU} = \overline{AS} = y$$
$$\overline{CS} = \overline{CI} = z$$

Además, dado que el perímetro del triángulo es 24 y $\overline{BC} = 8$, se cumple que:

$$2x + 2y + 2z = 24, \tag{3.1}$$
$$x + z = 8, \tag{3.2}$$

Luego, de la ecuación (3.1) se tiene que $x + y + z = 12$, pero sustituyendo el valor de $x + z = 8$ en esta última ecuación tenemos:

$$x + y + z = 12$$
$$y + 8 = 12$$
$$y = 4.$$

Por lo anterior, $\overline{AS} = 4$.

PROBLEMA 9.

¿Cuántos números enteros mayores o iguales que 1000 y menores o iguales que 2024 tienen dígitos repetidos?

Solución: Contemos los números enteros en el intervalo $[1000, 2024]$ cuyos dígitos son diferentes, luego restamos estos del total.

Dividimos el conteo en dos casos:

Caso 1. Números de 1000 a 1999. La primera cifra es 1, y las tres cifras restantes deben ser distintas entre sí y distintas de 1, por lo tanto

- la segunda cifra, puede ser cualquier dígito de $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (9 opciones),
- la tercer cifra, puede ser cualquier dígito que no sea 1 ni la segunda cifra (8 opciones); y
- la cuarta cifra, puede ser cualquier dígito que no sea 1, la segunda ni la tercera cifra (7 opciones).

El total de números en este caso, por el principio multiplicativo, es $9 \times 8 \times 7 = 504$.

Caso 2. Números de 2000 a 2024. La primera cifra es 2, la segunda es 0, la tercera es 1 y la cuarta podría ser 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9. Por lo tanto, en este caso, tendremos 7 números posibles.

Entonces, la cantidad de números enteros en el intervalo $[1000, 2024]$ cuyos dígitos son diferentes son: $504 + 7 = 511$.
Por lo tanto, dado que desde el 1000 hasta el 2024, hay 1025 números de los cuales 511 tienen sus cifras diferentes, entonces los que tienen dígitos repetidos en este intervalo son $1025 - 511 = 514$.

3.3. Prueba Final

Problema 1.

Mariana y Diana llevan en total 30000 pesos al parque de diversiones. Incluyendo el costo de las entradas, las golosinas y otros gastos, Mariana gastó un total de 6000 pesos, mientras que Diana gastó 5000 pesos. Si al regresar a casa, Mariana tiene el doble de dinero que tenía Diana al inicio del día, ¿cuál es la cantidad de dinero que le queda a Diana?

Solución: Sean m y d el dinero que tenían inicialmente Mariana y Diana, respectivamente. Entonces $m+d=30000$ y al regresar, el dinero que tiene Mariana es $m-6000=2d$, es decir se cumple que $m-2d=6000$. Al restar la ecuaciones, tenemos que

$$\begin{array}{rc} & m+d=30000 \\ - & (m-2d=6000) \\ \hline & 3d=24000 \end{array}$$

De ahí que $d=8000$. Por lo tanto, al finalizar el día Diana queda con $d-5000=8000-5000=3000$ pesos.

Problema 2.

Si n es un entero positivo tal que 2^n deja residuo 2 al dividirse entre 7, ¿cuál es el residuo que deja n al dividirse entre 3?

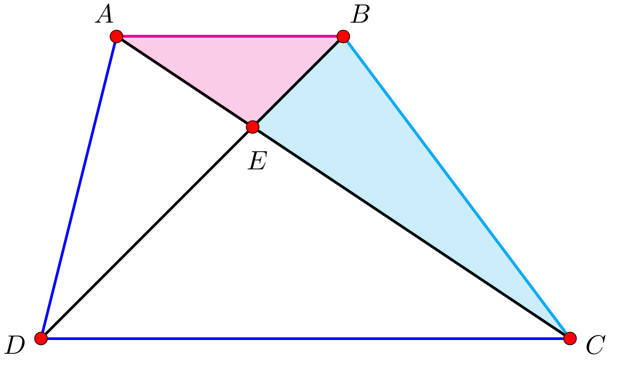
Solución: Considere la siguiente tabla en que la se muestra el residuo al dividir entre 7, de las primeras potencias de 2

Potencia	Residuo
2^1	2
$2^2=4$	4
$2^3=8$	1
$2^4=16$	2
$2^5=32$	4
$2^6=64$	1
$2^7=128$	2
$\vdots$	$\vdots$

Vemos que los residuos tienen un ciclo: 2, 4, 1 que se repite, de modo que cuando el exponente es múltiplo de 3, el residuo es 1, si el exponente excede en 1 a un múltiplo de 3, el residuo es 2 y si el exponente excede en 2 a un múltiplo de 3 el exponente es 4. Dado que 2^n deja residuo 2 cuando se divide entre 7, por nuestro análisis anterior, n excede en 1 a un múltiplo de 3, por lo tanto n deja residuo 1 al dividirse entre 3.

Problema 3.

En la siguiente figura, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son paralelos y E es el punto de intersección de las dos diagonales del cuadrilátero $ABCD$. Si el área del triángulo ABE es $7\,cm^2$ y el área del triángulo BCE es $21\,cm^2$, ¿cuál es el área del cuadrilátero $ABCD$?



Solución: Observemos que los triángulos AEB y BEC comparten una misma altura, a la que llamaremos h. Así, tenemos:

$$\frac{AE \times h}{2} = 7 \quad \text{y} \quad \frac{EC \times h}{2} = 21.$$

De esto se deduce que $EC = 3AE$.

Además, los ángulos $\measuredangle BEA$ y $\measuredangle DEC$ son iguales porque son opuestos por el vértice, y $\measuredangle EAB = \measuredangle ECD$ porque son alternos internos. Por lo tanto, los triángulos AEB y CED son semejantes con un factor de proporcionalidad de 3.

Así, el área del triángulo CED es:

$$\frac{3AE \times 3h}{2} = 7 \times 9 = 63 \text{ cm}^2.$$

Por otro lado, dado que $DE = 3EB$ y los triángulos ADE y ABE comparten la misma altura b, el área del triángulo ADE es:

$$\frac{3EB \times b}{2} = 7 \times 3 = 21 \text{ cm}^2.$$

Finalmente, sumando todas estas áreas, obtenemos el área del cuadrilátero $ABCD$:

$$7 + 21 + 21 + 63 = 112 \text{ cm}^2.$$

Problema 4.

El padre de Ana, Benjamín y Carolina les dice en secreto un número entero positivo a cada uno de sus tres hijos y los reta a adivinar los tres números. El padre y sus hijos tienen la siguiente conversación:

- **El padre:** *¡Les doy una pista! Los tres números son enteros positivos cuya suma es* 10*.*
- **Ana:** *No sé los números de mis hermanos, pero estoy segura de que son diferentes.*
- **Benjamín:** *Con lo que acaba de decir Ana, ahora tengo la certeza de que los tres números son diferentes.*
- **Carolina:** *Ohh, entonces ya sé cuáles son los tres números.*

¿Cuáles son los tres números que el padre dijo a sus hijos en secreto?

Solución: Sean A, B y C los números de Ana, Benjamín y Carolina, respectivamente. Del comentario del padre, sabemos que los tres números están entre 1 y 8 (incluyéndolos). Ahora, del comentario de Ana podemos deducir que tiene un impar, porque de esta forma los otros dos números tienen que ser un par y un impar, por tanto las posibilidades para Ana, hasta el momento son:

$$A \in \{1, 3, 5, 7\}.$$

Luego, Benjamín ya está seguro de que los tres son diferentes, veamos las opciones:

- $B \neq 8$, porque podría ocurrir que $A = C = 1$.
- $B \neq 7$, porque entonces $A = 1$ y $C = 2$, y en este caso Benjamín tendría la certeza de que los números son diferentes desde el inicio (sin el comentario de Ana).
- B podría ser el 6, en cuyo caso $A = 1$ y $C = 3$ o $A = 3$ y $C = 1$.

- $B \neq 5$, porque en tal caso, $A = 1$ y $C = 4$ o $A = 3$ y $C = 2$, pero de cualquier modo Benjamín tendría la certeza de que los números son diferentes desde el inicio (sin el comentario de Ana).
- $B \neq 4$, porque podría ocurrir que $A = C = 3$.
- $B \neq 3$, porque podría ocurrir que $A = 3$ también y $C = 4$.
- B podría ser el 2, en cuyo caso $A = 1$ y $C = 7$ o $A = 7$ y $C = 1$ o $A = 3$ y $C = 5$ o $A = 5$ y $C = 3$.
- $B \neq 1$, porque podría ser que también $A = 1$ y $C = 8$.

Hasta el momento, tenemos estos casos posibles:

A	1	3	1	7	3	5
B	6	6	2	2	2	2
C	3	1	7	1	5	3

Después de los comentarios de Ana y Benjamín, entonces Carolina ya está segura de los números, analicemos las opciones (dentro de las posibles):

- Para $C = 1$ o $C = 3$ hay dos opciones diferentes en la tabla, por lo tanto $C \neq 1$ y $C \neq 3$.
- $C \neq 7$, porque si Carolina tuviera el 7, hubiese sabido los tres números solo con el comentario de Ana.

Por lo tanto, la única opción es:

A	3
B	2
C	5

Es decir, los números que el padre dijo en secreto a sus hijos son: a Ana el 3, a Benjamín el 2 y a Carolina el 5.

PROBLEMA 5.

Con el fin de implementar el reciclaje en un colegio, deben comprar una docena de canecas para la basura, de colores azul, verde, gris o rojo. ¿De cuántas maneras puede el colegio adquirir las canecas si deben comprar al menos una de cada color?

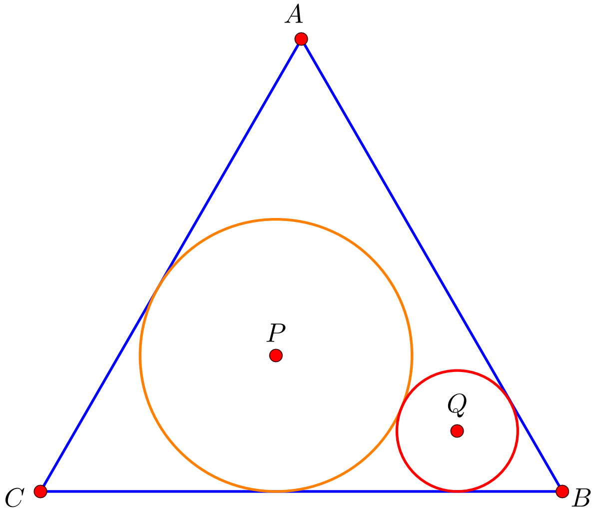
Solución: Observemos que este problema es equivalente a agrupar las canecas por color, ordenarlas en una fila y colocar 3 muros entre ellas para separarlas en 4 grupos, que representan los 4 colores de canecas.

De esta manera, la cantidad de formas en que se pueden comprar las canecas corresponde a la cantidad de maneras en que se pueden ubicar los 3 muros entre los 11 espacios disponibles, lo que se calcula mediante:

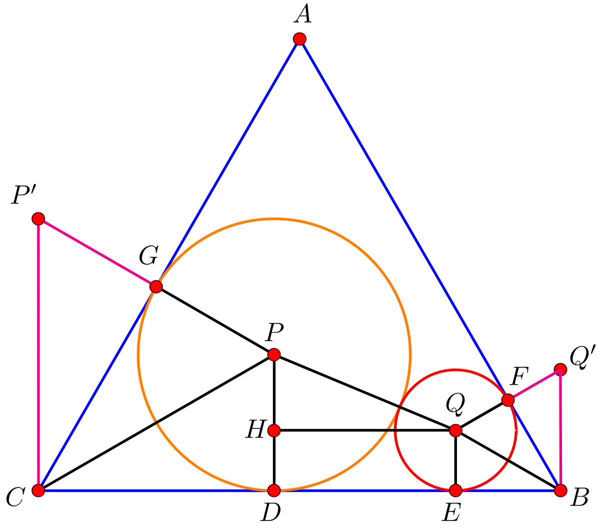
$$\binom{11}{3} = 165.$$

Problema 6.

En la siguiente figura, las circunferencias son tangentes entre sí y a los lados del triángulo equilátero ABC. Si los radios de las circunferencias son $9\,cm$ y $4\,cm$, ¿cuál es el perímetro del triángulo?



Solución: Considere la construcción auxiliar que se muestra figura, en la que hemos trazado algunos segmentos y hemos nombrado D, G, F y E, a los puntos de tangencia de las circunferencias con los lados del triángulo. Para determinar el perímetro del triángulo ABC nos basta conocer la longitud de un solo lado, ya que sus tres lados miden lo mismo. Nos centraremos en hallar las longitudes de CD, DE y EB.



Los triángulos CDP y CGP son congruentes, luego los ángulos $\angle PCG$ y $\angle DCP$ miden lo mismo, y como ambos suman $60°$, entonces cada uno es de $30°$. De modo que al girar el triángulo CPD respecto al punto C hasta que los puntos D y G coincidan, formamos un triángulo equilátero $P'CP$, de lado $CP = 2GP = 2 \times 9\,cm = 18\,cm$ y cuya altura es $CG = CD$. Aplicando Pitágoras, obtenemos:

$$\begin{aligned} CP^2 &= CD^2 + PD^2 \\ 18^2 &= CD^2 + 9^2 \\ \sqrt{324 - 81} &= CD \\ 9\sqrt{3} &= CD. \end{aligned}$$

Análogamente $EB = 4\sqrt{3}$. Ahora observemos que $PQ = 9 + 4 = 13$, $PH = 9 - 4 = 5$, aplicamos Pitágoras nuevamente:

$$\begin{aligned} PQ^2 &= PH^2 + HQ^2 \\ 169 &= 25 + HQ^2 \\ \sqrt{144} &= HQ \\ 12 &= HQ \end{aligned}$$

Finalmente el perímetro sería igual a 3 veces uno de los lados, es decir:

$$3 \cdot (9\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 12) = 39\sqrt{3} + 36\,cm.$$

Apéndice A

Cuadro de Honor

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander felicita a todos los competidores, docentes, familias e instituciones educativas que hicieron posible la realización de la *Decimosexta versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Secundaria.*

En esta edición, $11,207$ estudiantes de diversas instituciones asumieron el reto de poner a prueba sus habilidades matemáticas. Tras un arduo proceso de competencia, algunos lograron destacar por su excepcional desempeño en la prueba final, alcanzando un lugar en el **Cuadro de Honor** de esta versión del certamen.

Extendemos nuestro reconocimiento a estos talentosos jóvenes, quienes con su esfuerzo, disciplina y pasión por las matemáticas, se han posicionado entre los mejores.

A continuación, presentamos a los ganadores:

NIVEL BÁSICO

Puesto	Medalla	Participante
1.^{o}		*Juan Andrés Pizano Cabeza* *Colegio Reggio Amelia, Bucaramanga*
2.^{o}		*Kevin Reyes Vergel* *Gimnasio Superior Empresarial Bilingüe, Bucaramanga.*
3.^{o}		*Valentina García Dulcey* *Colegio El Rosario, San Gil.*
4.^{o}		*Sergio Jerez Sanabria* *Colegio Nuestra Señora de La Paz, San Vicente de Chucurí.*
5.^{o}		*Silvia Gabriela Muñoz Bonilla* *Colegio Luis A. Calvo, Gámbita.*

NIVEL MEDIO

PUESTO	MEDALLA	PARTICIPANTE
1.^{o}		*Camilo Angarita Zambrano* *Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.*
2.^{o}		*Valentina Gutiérrez Pérez* *Colegio Teresiano Reina del Carmelo, Aguachica.*
3.^{o}		*Juan José Velaides Sanabria* *Colegio Técnico Nuestra Señora de La Presentación, San Gil.*
4.^{o}		*Miguel Ángel Castro Rueda* *Institución Educativa Bicentenario, Bucaramanga.*
5.^{o}		*Cesar Andrés Jiménez Jaime* *Col. Deptal. Integrado Nuestra Señora de Lourdes, Betulia.*

NIVEL AVANZADO

PUESTO	MEDALLA	PARTICIPANTE
1.^{o}		*Santiago Mercado Santos* *Aspaen Colegio El Rosario, Barrancabermeja.*
2.^{o}		*Diego Alejandro Barbosa Cuervo* *Institución Educativa Gimnasio Piagetano, San Juan de Girón.*
3.^{o}		*María Paula Betancourth Hernández* *Institución Educativa Técnico Industrial Mariscal Sucre, Boavita.*
4.^{o}		*Kevin Mojica Castellanos* *Colegio Nuestra Señora de Fátima, Onzaga.*
5.^{o}		*Harley Yefrey Cabrales Vargas* *Colegio Eliseo Pinilla Rueda, Villanueva.*

Bibliografía

[1] Bolaños W. *Problemas y Soluciones Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas Universitaria 1998-2019.* Universidad Antonio Nariño y Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[2] Brochero F. y Restrepo J. *Un recorrido por la Teoría de Números.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[3] Burton, D. *Elementary Number Theory*, segunda edición. Brown Publishers, 1989.

[4] Calderón, S., Morales, M. *Analisis Combinatorio*, Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1992.

[5] Castro, J. *Lecciones de matemáticas para biociencias*. Departamento de Matemáticas-Universidad del Valle.

[6] Comellas., Sánchez, Anna., Francesc Fábrega, Josep., Serra, Oriol. *Matemática Discreta*, Edicions UPC, 2001.

[7] García, F. *Un pequeño manual para resolución de problemas*, Priego de cordoba, 2002.

[8] Gómez J., Valdez R. y Vázquez R. *Principio de las Casillas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2011.

[9] Hemmerling E. *Geometría Elemental.* Bakersfield College. Limusa, México, 2009.

[10] Hoyos, D., Perdomo, O. *Geometría Fundamental*. Departamento de Matemáticas-Universidad del Valle, 2006.

[11] Jiménez L., Gordillo J. y Rubiano G. *Teoría de números para principiantes.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.

[12] Madroñero J y Contreras I. *Un recorrido por el Álgebra.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[13] Ministerio de Educación. *Matemáticas Lineamentos Curriculares: Áreas obligatorias y fundamentales*. Libros & libros S.A., 1998.

[14] Rosen, K. *Elementary Number Theory*, quinta edición. MgGraw-Hill.

[15] Rosen, K. *Matemática Discreta y sus aplicaciones*, quinta edición. MgGraw-Hill, 2004.

[16] Serge, L., Gene, M. *Geometry*, second edition. 1988.

[17] Soberón P. *Combinatoria para olimpiadas* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2010.

[18] Restrepo P. *Un recorrido por la Combinatoria I.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

Enlaces de interés

1. Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS
   Pruebas anteriores:
   http://matematicas.uis.edu.co/?q=olimpiadas-secundaria
   Cartillas de los años anteriores:
   http://matematicas.uis.edu.co/?q=descargas
   Página de facebook:
   https://web.facebook.com/OlimpiadasRegionalesDeMatematicasUis
2. Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
   https://www.acmven.org/pruebas/
3. CanadaMath, canal de youtube
   https://www.youtube.com/channel/UCPjak7r62HVJ6rvgsu2xoFA
4. International Mathematical Olympiad (IMO)
   http://www.imo-official.org/problems.aspx
5. Olimpíada Brasileira de matemática das escolas públicas
   http://www.obmep.org.br/banco.htm
6. Olimpiada Matemática Argentina,
   Problemas Semanales: https://www.oma.org.ar/problemas/index.php
   Archivo de enunciados: https://www.oma.org.ar/enunciados/index.htm#omn
   Simulacros en línea: https://www.oma.org.ar/canguro/problemas.html
7. Olimpiada Mexicana de Matemáticas
   https://www.ommenlinea.org/material-de-entrenamiento/introductorio/
8. Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Baja California
   http://ommbc.org/sitio/#/entrenate
9. Olimpiada Panameña de Matemáticas
   https://opm.org.pa/recursos/

10. Olimpiadas de Matemáticas, página de preparación y problemas
http://wpd.ugr.es/~jmmanzano/preparacion/problemas.php

11. Olimpiadas Matemáticas de la Universidad de Antioquia.
https://www.olimpiadasudea.co/matematicas/talleres.html

12. Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico
http://om.pr/

13. Olimpíadas Portuguesas de Matemática
http://olimpiadas.spm.pt/index.php?id=69&tipo=1

14. Olimpíada Brasileira de Matemática
https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/

15. Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño
https://orm.udenar.edu.co/?page_id=1612

16. Toomates Coolección
http://www.toomates.net/