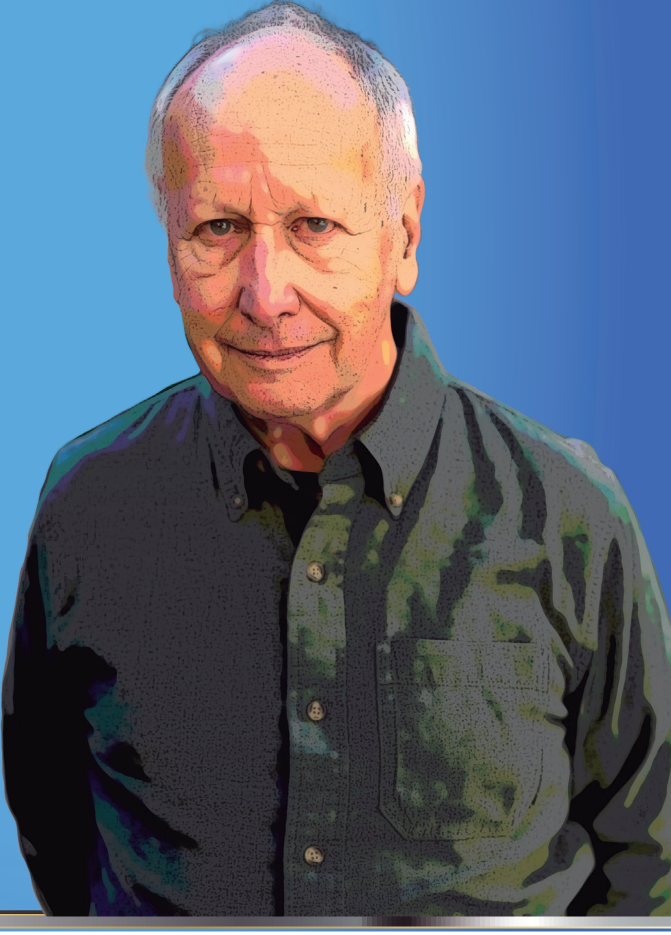
XV Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Secundaria / 2023



Luis Ángel Caffarelli es un matemático argentino, con doble ciudadanía, nacionalizado y radicado en Estados Unidos. Líder en el campo de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y sus aplicaciones. En 2023 la Academia Noruega de Ciencias le concedió el Premio Abel, es el primer latinoamericano en ganar este premio.

INFORMES

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel.: 6344000, ext.: 2316

Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

ORM Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Grupo Educación Matemática UIS EDUMAT

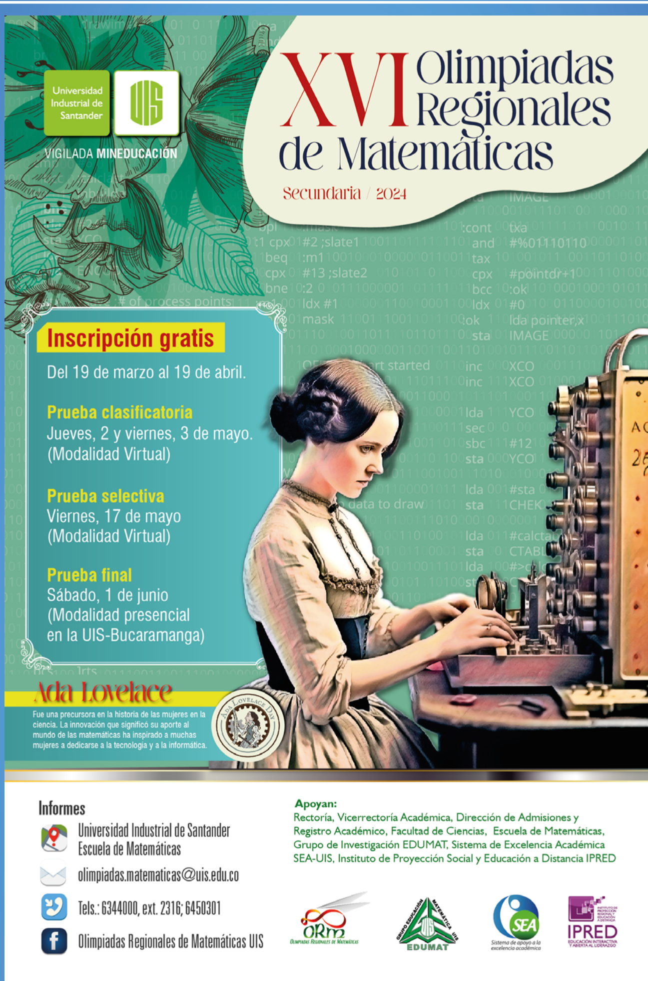
SEA Sistema de apoyo a la excelencia académica

IPRED Instituto de Proyección Regional y Educación a Distancia. Educación interactiva y abierta al liderazgo

Vicerrectoría Académica

Universidad Industrial de Santander

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"



Apoyan:

Rectoría, Vicerrectoría Académica, Dirección de Admisiones y Registro Académico, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Grupo de Investigación EDUMAT, Sistema de Excelencia Académica SEA-UIS, Instituto de Proyección Social y Educación a Distancia IPRED

Vicerrectoría Académica

Universidad Industrial de Santander

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

Decimoquintas Olimpiadas Regionales de Matemáticas Secundaria

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga

2023

Edición

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas - 2023.

Director

Gilberto Arenas Díaz

Coordinador

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Monitores

Brayan Isaac Vásquez Portocarrero
Cesar Derian Duvan García Padilla
Daniel Eduardo Naranjo Garzón
Daniel Santiago Jaimes Portilla
David Santiago Guzmán Díaz
Jamir Santiago Castellanos Mantilla
Javier Mauricio Sierra Villabona
Jefferson Sneyder Moreno Toloza
José Camilo Rueda Niño
Juan Esteban Bahamón Rueda
Julián David Rueda Flórez
Luis Fernando Muñoz Gutiérrez
Mateo Rincón Pinzón
Sergio Andrés Caicedo Araque
Thomas Javier Carrillo Basto

Introducción

> *"Las ecuaciones son herramientas que los científicos utilizan para predecir el comportamiento del mundo físico. Muchas leyes naturales pueden expresarse en forma de "ecuaciones diferenciales parciales" o EDP, un tipo de ecuación que describe el modo en que distintas variables cambian entre sí. Ningún otro matemático vivo ha aportado más contribuciones a nuestra comprensión de las EDP que Luis Ángel Caffarelli, matemático argentino estadounidense. Él ha introducido nuevas e ingeniosas técnicas, ha mostrado un brillante conocimiento geométrico y ha aportado muchos resultados fundamentales".*
>
> **-Premio Abel (2023).**

La Universidad Industrial de Santander, como institución de educación superior del ámbito regional, forma ciudadanos como profesionales integrales, éticos, con sentido político e innovadores; apropia, utiliza, crea, transfiere y divulga el conocimiento por medio de la investigación, la innovación científica, tecnológica y social, la creación artística y la promoción de la cultura, buscando de este modo el fortalecimiento de una sociedad democrática, participativa, deliberativa y pluralista, con justicia y equidad social, comprometida con la preservación del medio ambiente y el buen vivir.

En el marco de esta misión institucional, la Escuela de Matemáticas ofrece a la sociedad santandereana y de la región de influencia de la Universidad, un escenario de alta calidad para el cultivo de las matemáticas, promoviendo entre los integrantes de la comunidad académica una actitud creativa y rigurosa, y construyendo un ambiente académico basado en la solidaridad, la empatía y el reconocimiento de los otros en su dignidad humana. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado, sino también por su participación crucial en la formación de los estudiantes de otros programas de la Universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a los diversos retos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las habilidades matemáticas en el nororiente colombiano, la Escuela de Matemáticas ha diseñado y ejecutado desde el 2009, el proyecto Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (ORM-UIS), para secundaria y primaria, a través del fortalecimiento de las competencias matemáticas de los estudiantes y la capacitación simultánea de los profesores que orientan dichos procesos. Las ORM-UIS abordan cinco (5) áreas, a saber: i) teoría de números; ii) combinatoria; iii) álgebra, iv) lógica, y v) geometría. Por otra parte, las ORM-UIS se desarrollan en tres (3) niveles, según el grado de escolaridad de los participantes, de la formación básica secundaria y media vocacional, así:

- **Nivel Básico:** grados sexto y séptimo,
- **Nivel Medio:** grados octavo y noveno,
- **Nivel Avanzado:** grados décimo y undécimo.

Esta cartilla compendia los problemas matemáticos propuestos por el equipo de trabajo de las ORM-UIS en las distintas fases de la Decimoquinta versión del certamen, desarrollada durante el año 2023, dirigido a estudiantes de educación media vocacional. En esta oportunidad se contó con la participación de 141 colegios, para un total de 7946 estudiantes en competencia, provenientes de 60 municipios de los departamentos de Santander, Norte de Santander, Boyacá y Cesar.

En esta versión las ORM-UIS, como siempre lo hace con alguien en especial, destacó la obra del matemático argentino-estadounidense Luis Ángel Caffarelli (1948), el primer latinoamericano ganador del *Premio Abel*, otorgado por la Academia Noruega de Ciencias en el 2023, el más prestigioso en el campo de las matemáticas. Se destaca el profesor Caffarelli por su aporte en el área de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Otros premios concedidos a Caffarelli a lo largo de su vida son el *Premio Rolf Schock* 2005, el *Premio Steele* 2009 a la trayectoria otorgado por la Sociedad Matemática Americana, el *Premio Wolf* 2012, la Medalla *Solomon Lefschetz* 2013 y el *Premio Shaw* 2018. En 1991 fue elegido para la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos y es miembro de varias otras academias nacionales. Ha ejercido como profesor de ecuaciones diferenciales en las universidades de Texas en Austin, Nueva York, Chicago y Minnesota en EEUU.

Es interesante reconocer cómo un ser humano dedica tanto tiempo y pasión a un tema, en este caso a los fluidos, explorando y entendiendo cómo se comportan, haciendo de este problema la curiosidad principal de su investigación, el propósito consistente en comprender cómo ese bello mundo teórico, el de los números, explica el comportamiento del mundo físico, real, que se aparece todos los días en la vida cotidiana. Le han llamado "el Messi de las matemáticas" y sobre este punto el profesor Caffarelli ha dicho "para mí es un gran halago. Messi tiene un control total de la pelota. En mi caso sería el control de las ecuaciones".

Finalmente, que un latinoamericano haya obtenido este reconocimiento internacional es una motivación para romper los obstáculos mentales que determinan nuestros condicionantes para hacer ciencia. Cualquier persona con curiosidad y dedicación puede ser el mejor matemático del mundo.

Este documento consta de tres (3) capítulos, cada uno correspondiente a un nivel de la competencia: nivel básico, nivel medio y nivel avanzado. En cada uno de ellos el lector encontrará los problemas y una solución, de las distintas soluciones que puede tener cada uno. Por esa razón, el equipo de trabajo de las ORM-UIS recomienda e incentiva a quien desee enfrentar nuevamente estos problemas, a descubrir y proponer, métodos alternativos de solución que se destaquen por su sencillez, ingenio y belleza matemática.

La Escuela de Matemáticas, a través del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la UIS (EDUMAT), reconoce la labor esencial del maestro en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las competencias matemáticas de los estudiantes, y por ello elabora esta cartilla para su utilización en el aula de clase, que incluye, también, la preparación y discusión creativa entre pares en los espacios de formación docente. Esperamos que los participantes de la educación básica secundaria y media vocacional, los profesores, y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, disfrute tanto como nosotros lo hicimos, el hermoso y milenario ejercicio del pensamiento matemático.

Las ORM-UIS no son una mera competencia, implican una puesta en escena colectiva para que los niños, niñas y adolescentes desplieguen sus capacidades, fortalezcan sus habilidades y se reconozcan como sujetos capaces de enfrentar problemas y solucionarlos. Esto psicológicamente fomenta la autopercepción como sujetos con comprensión de su entorno, y esa es la exigencia que hace hoy la humanidad. Creemos firmemente que allí debemos dirigir todos nuestros esfuerzos, al fortalecimiento de ciudadanías que, gracias al pensamiento crítico que se desarrolla desde el ejercicio matemático, puedan enfrentarse a la diversidad de problemáticas que enfrenta la sociedad actual y que requieren de una mirada no solo crítica, sino, además, creativa para ser solucionadas.

El proyecto ORM- UIS agradece y destaca al grupo de estudiantes de Santander y Norte de Santander, que participaron de esta versión, y que han demostrado ser capaces de asumir el reto de pensar y sentir problemas sencillos y bellos de matemáticas, con pasión y con rigor.

Índice general

Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

PROBLEMA 1.

La maestra le pidió a Carlos que restara 3 de cierto número y luego dividiera el resultado por 6. Pero, Carlos restó 6 al número y luego dividió el resultado entre 3, dando una respuesta de 37. ¿Cuál hubiera sido su respuesta si hubiera realizado las operaciones correctamente?

(a) 19 (b) 16,5 (c) 21 (d) 117 (e) No sé

Solución: A partir de la respuesta de Carlos, hallamos el número inicial realizando las operaciones inversas a las que él llevó a cabo:

$$37 \times 3 = 111$$
$$111 + 6 = 117$$

Ahora efectuamos las operaciones correctas indicadas por la maestra:

$$117 - 3 = 114$$
$$114 \div 6 = 19$$

Por lo tanto, si Carlos hubiese realizado las operaciones correctamente, la respuesta correcta habría sido 19.

PROBLEMA 2.

¿Qué día de la semana fue el 31 de diciembre del año N si el día 200 del año $N+1$ fue lunes?

(a) miércoles (b) viernes (c) jueves (d) sábado (e) No sé

Solución: Dado que los días de la semana siguen un ciclo de 7 días, realizamos una división de 200 entre 7, obteniendo un cociente de 28 y un residuo de 4. Esto indica que hasta el día 200 del año $N+1$ han transcurrido 28 semanas y 4 días. Al retroceder estas 28 semanas, llegamos al día 4 de enero, que corresponde a un lunes. Luego, retrocedemos 4 días adicionales, alcanzando el 31 de diciembre del año N, que sería un jueves.

M	X	J	V	S	D	L
194	195	196	197	198	199	200
187	188	189	190	191	192	193
					$\cdots$	$200-7\times 2$
					$\cdots$	$200-7\times 3$
					$\vdots$	$\vdots$
		31	1	2	3	$200-7\times 28$

PROBLEMA 3.

La edad de Lucía es el mayor número natural tal que ciento cincuenta veces este número es menor que 2023. ¿Cuál es la edad de Lucía?

(a) 13 (b) 14 (c) 12 (d) 11 (e) No sé

Solución: Denotemos la edad de Lucía como x. La información proporcionada se puede expresar con la siguiente desigualdad:

$$150x < 2023.$$

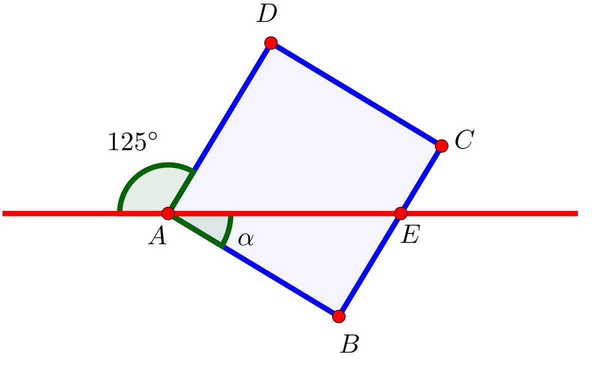
Ahora, resolvamos la desigualdad para encontrar el mayor número natural x:

$$x < \frac{2023}{150} \approx 13{,}4866.$$

Dado que x debe ser un número natural, tomamos la parte entera de $13{,}4866$, que es 13. Por lo tanto, la edad de Lucía es 13 años.

Problema 4.

En la figura $ABCD$ es un cuadrado. ¿Cuál es la medida del ángulo α?

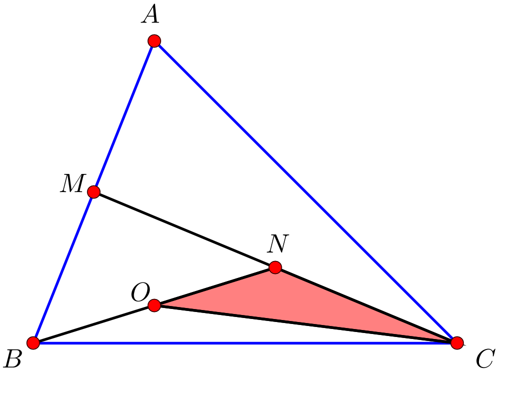


(a) $55°$ (b) $25°$ (c) $30°$ (d) $35°$ (e) No sé

Solución: Observemos que $\measuredangle DAE = 180° - 125° = 55°$. Dado que $ABCD$ es un cuadrado, cada uno de sus ángulos internos mide $90°$. Por lo tanto, la medida del ángulo α es $90° - 55° = 35°$.

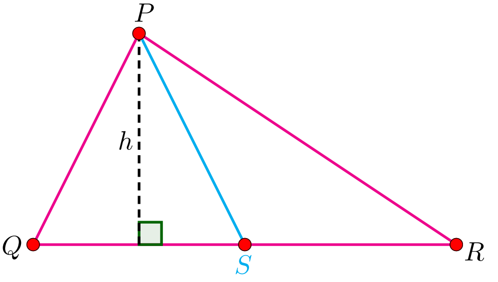
Problema 5.

En la siguiente figura, M, N y O son los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CM}$ y $\overline{BN}$, respectivamente. Si el área del triángulo ABC es $56\,cm^2$ ¿cuál es el área de la región sombreada?



(a) $10\,cm^2$ (b) $7\,cm^2$ (c) $8\,cm^2$ (d) $9\,cm^2$ (e) No sé

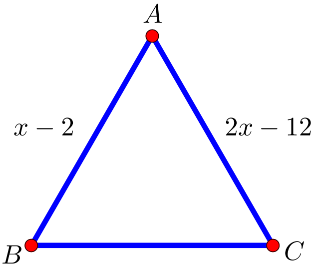
Solución: Al trazar una mediana en un triángulo, este se divide en dos triángulos, cada uno con la mitad del área del triángulo original. Considere la siguiente figura, en la que S es el punto medio de $\overline{QR}$, es decir, $\overline{PS}$ es una mediana del triángulo QPR:



Observe que los triángulos PQS y PSR comparten la misma altura h y la misma base $QS = SR$. Por lo tanto, ambos triángulos tienen áreas iguales, de ahí que, el área de cada uno es la mitad del área del triángulo original.
Si aplicamos el resultado anterior al triángulo de nuestro problema, tenemos que el área del triángulo CMB es $56 \div 2 = 28\,cm^2$; el área del triángulo BNC es $28 \div 2 = 14\,cm^2$; y así, el área del triángulo sombreado es $14 \div 2 = 7\,cm^2$.

PROBLEMA 6.

En la siguiente figura el triángulo ABC es equilátero. Si el lado $\overline{AB}$ mide $x-2$ centímetros y el lado $\overline{AC}$ mide $2x-12$ centímetros, ¿cuál es el perímetro del triángulo?



(a) $24\,cm$ (b) $30\,cm$ (c) $10\,cm$ (d) $16\,cm$ (e) No sé

Solución: Dado que el triángulo es equilátero, se cumple que $x-2 = 2x-12$, al resolver esta ecuación tenemos:

$$x - 2 = 2x - 12$$
$$-2 + 12 = 2x - x$$
$$10 = x.$$

Entonces, cada lado del triángulo mide $10 - 2 = 8\,cm$, y su perímetro es $8 \times 3 = 24\,cm$.

PROBLEMA 7.

El primero de marzo de este año, la Universidad Industrial de Santander cumplió 75 años de existencia, como patrimonio académico y cultural de los santandereanos. Sean U, I y S enteros positivos distintos tales que

$$U \times I \times S = 75.$$

¿Cuál es el mayor valor posible de la suma $U + I + S$?

(a) 43 (b) 13 (c) 21 (d) 29 (e) No sé

Solución: La descomposición de 75 en factores primos es $75 = 3 \times 5 \times 5$. Al buscar tres enteros positivos distintos U, I y S que multiplicados den 75 y cuya suma sea máxima, elegimos $\{U, I, S\} = \{1, 3, 25\}$. Por lo tanto, $U + I + S = 29$.

Nota: Otra posibilidad para $\{U, I, S\}$ es $\{1, 5, 15\}$. Sin embargo, en este caso, la suma es 21, que no es el valor máximo, por ello se descarta.

PROBLEMA 8.

Salomón quiere colocar 120 naranjas y 84 mangos en canastas iguales, de modo que todas las canastas tengan la misma cantidad de frutas, sin mezclar las frutas y sin que sobre alguna. ¿Cuál es la menor cantidad de canastas que necesita Salomón?

(a) 12 (b) 7 (c) 17 (d) 34 (e) No sé

Solución: Para encontrar la menor cantidad de canastas que Salomón necesita, debemos buscar el máximo común divisor (MCD) de 120 y 84, ya que el MCD nos dará el número máximo de frutas que puede colocar en cada canasta.

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5,$$
$$84 = 2^2 \times 3 \times 7.$$

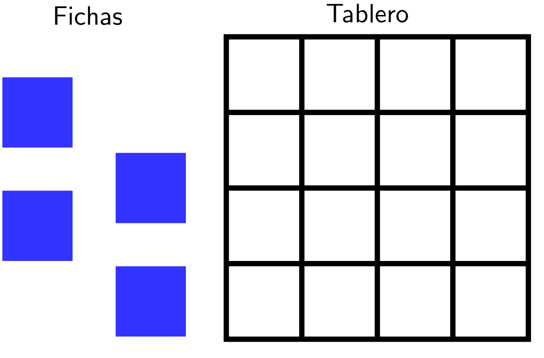
El MCD es $2^2 \times 3 = 12$. Esto significa que Salomón puede poner 12 frutas en cada canasta. Ahora, para determinar la cantidad mínima de canastas, dividimos el total de frutas entre el MCD:

$$120 \div 12 = 10 \qquad \text{canastas para las naranjas,}$$
$$84 \div 12 = 7 \qquad \text{canastas para los mangos.}$$

Por lo tanto la menor cantidad de canastas que Salomón necesita para acomodar, como se indican, las naranjas y los mangos es 17.

Problema 9.

Alexander debe ubicar 4 fichas iguales en un tablero como el que aparece en la imagen, de modo que en cada fila y en cada columna haya solo una ficha. Cada ficha debe cubrir exactamente una casilla. ¿De cuántas formas distintas puede ubicar Alexander las 4 fichas?



(a) 24 (b) 10 (c) 12 (d) 16 (e) No sé

Solución: Acomodando las fichas por filas, observamos que la primera ficha puede colocarse en la primera fila de 4 formas diferentes. Para la segunda ficha, esta debe ir en la segunda fila y puede acomodarse solo de 3 formas distintas, ya que no se puede utilizar la columna donde se haya colocado la primera ficha. De manera análoga, la tercera ficha puede acomodarse de solo 2 formas en la tercera fila, y la cuarta ficha solo puede colocarse de una forma en la cuarta fila. Así, aplicando el principio multiplicativo, Alexander puede disponer las fichas de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ formas distintas.

1.2. Prueba Selectiva

PROBLEMA 1.

Para realizar un análisis estadístico en una ciudad compuesta por 13 barrios, una encuestadora debe entrevistar a un grupo de personas seleccionadas al azar. Sin embargo, se establece como condición indispensable que en la muestra seleccionada se encuentren al menos 7 personas que vivan en un mismo barrio. ¿Cuál es el número mínimo de personas requeridas en la muestra?

(a) 91 (b) 92 (c) 79 (d) 14 (e) No sé

Solución: Dado que las personas son seleccionadas al azar y hay 13 barrios, se deben elegir 79 personas en la muestra para garantizar que haya al menos 7 personas que vivan en un mismo barrio. Note que, en el peor de los casos, con $6 \times 13 = 78$ personas, existe la posibilidad de que solo haya 6 personas de cada barrio. Al agregar una persona más, se asegura que habrá al menos 7 personas de un mismo barrio, según el Principio del Palomar.

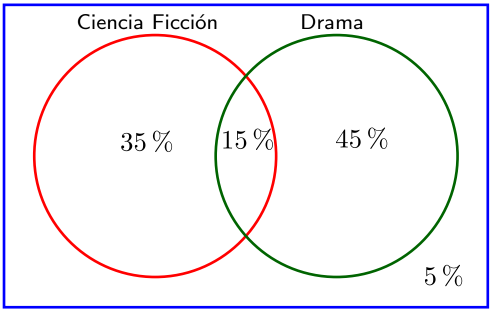
PROBLEMA 2.

Durante un cineforo se llevó a cabo una encuesta entre los asistentes, sobre sus intereses en géneros cinematográficos. Los resultados revelaron que el $60\,\%$ de los participantes tiene interés en películas de drama, el $50\,\%$ muestra interés en películas de ciencia ficción, y el $30\,\%$ de los interesados en películas de ciencia ficción también se interesan por las películas de drama. ¿Qué porcentaje de los encuestados no muestra interés ni en películas de drama ni en películas de ciencia ficción?

(a) $5\,\%$ (b) $10\,\%$ (c) $15\,\%$ (d) $20\,\%$ (e) No sé

Solución: Para abordar este problema, podemos utilizar un diagrama de Venn con dos conjuntos para representar los grupos de interés en películas de ciencia ficción y drama.

Dado que los interesados en ciencia ficción son el $50\,\%$ del total, pero el $30\,\%$ de ellos también les interesa el dama, entonces en la intersección debemos anotar el $30\,\%$ de $50\,\%$, que es $15\,\%$. Luego, para completar $50\,\%$ en el conjunto de ciencia ficción, debemos anotar $35\,\%$ en el parte izquierda. Asimismo, para completar el $60\,\%$ en el conjunto de drama, debemos anotar $45\,\%$ a la derecha, como se ilustra a continuación.



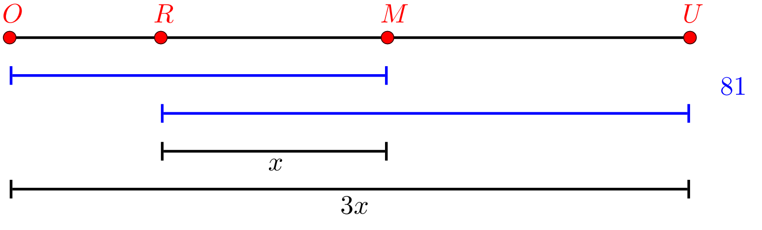
Finalmente, para alcanzar el $100\,\%$, nos falta un $5\,\%$, el cual corresponde a los encuestados que no están interesados ni en películas de ciencia ficción ni en dramas.

PROBLEMA 3.

En cierto momento de una competencia, Óscar, René, Maía y Úrsula se encuentran alineados en ese orden. La distancia entre Óscar y Maía, más la distancia entre René y Úrsula es $81\,m$. Si la distancia entre Óscar y Úrsula es el triple de la distancia entre René y Maía. ¿Cuál es la distancia entre René y Maía?

(a) $16{,}2\,m$ (b) $20{,}25\,m$ (c) $27\,m$ (d) $40{,}5\,m$ (e) No sé

Solución 1: Consideremos el siguiente diagrama, en el que x es la distancia entre René y Maía y por lo tanto la distancia entre Óscar y Úrsula es $3x$:



Observe la distancia entre Óscar y Maía, más la distancia entre René y Úrsula equivale a la distancia entre Óscar y Úrsula, más la distancia entre René y Maía, de este modo, planteamos la siguiente ecuación:

$$81 = 3x + x,$$

de donde $81 = 4x$, esto es $x = \dfrac{81}{4} = 20{,}25\,m$.

Solución 2: Sean $a = OM$, $b = RU$, $c = OU$ y $x = RM$. Dado que "la distancia entre Oscar y Maía, más la distancia entre René y Úrsula es $81\,m$", y "la distancia entre Oscar y Úrsula es el triple de la distancia entre René y Maía", se tiene que:

$$a + b = 81,$$
$$c = 3x.$$

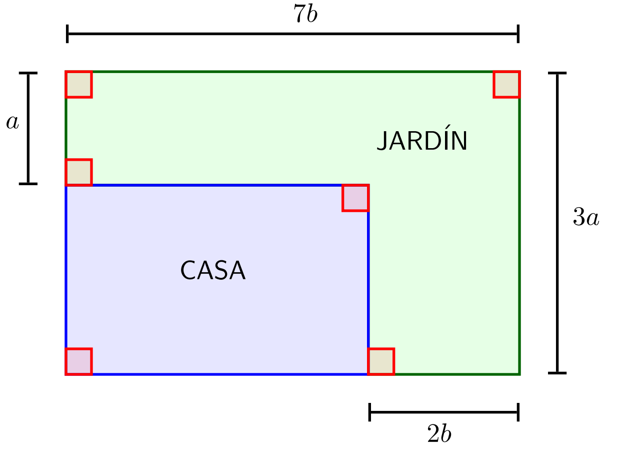
Además, note que c lo podemos reescribir como $c = a + b - x$, luego,

$$a + b = 4x.$$

Finalmente, sustituyendo $a + b$ en la primera ecuación, se concluye que $4x = 81$, esto es la distancia entre René y Maía es $x = 20{,}25\, m$.

PROBLEMA 4.

En la siguiente figura se muestra un plano con la distribución para casa y jardín de un lote de terreno rectangular con perímetro $54\, m$. Si a y b son números enteros, ¿cuál es el área del jardín?



(a) $63\, m^2$ (b) $66\, m^2$ (c) $84\, m^2$ (d) $60\, m^2$ (e) No sé

Solución: Determinemos primero los valores de a y b. Notemos que el perímetro del terreno rectangular está dado por $2(7b + 3a) = 54$, lo que implica $7b + 3a = 27$. Dado que a y b deben ser números enteros positivos, la única opción es $a = 2$ y $b = 3$.

Ahora, para hallar el área del jardín, calculamos el área de todo el terreno y restamos el área de la casa:

$$\textbf{Área del terreno} = 7b \times 3a = 21 \times 6 = 126\, m^2,$$
$$\textbf{Área de la casa} = 2a \times 5b = 4 \times 15 = 60\, m^2.$$

Por lo tanto, el área del jardín es $126 - 60 = 66\, m^2$.

PROBLEMA 5.

Julián vende lapiceros de 7 colores diferentes a \$600, \$900, o \$1000. Cuando los tenía separados por colores, cada grupo tenía la misma cantidad, salvo el grupo de los rojos que tenía 2 más; pero luego decidió separarlos por precios y de esta manera cada grupo quedó con la misma cantidad. Si el total de lapiceros está entre 35 y 70, ¿cuál es la suma de las cifras del número total de lapiceros que tiene Julián?

(a) 11 (b) 10 (c) 9 (d) 6 (e) No sé

Solución: A partir de la afirmación *"Cuando los tenía separados por colores, cada grupo tenía la misma cantidad, salvo el grupo de los rojos que tenía 2 más"*, se deduce que el número total de lapiceros excede en 2 a un múltiplo de 7, ya que hay 7 colores diferentes.

De la afirmación *"Luego decidió separarlos por precios y de esta manera cada grupo quedó con la misma cantidad"*, se deduce que el número total de lapiceros es un múltiplo de 3, ya que hay tres precios diferentes.

Los números entre 35 y 70 que exceden en 2 a un múltiplo de 7 son $37, 44, 51, 58, 65$. De ellos, el único que es múltiplo de 3 es 51. Por lo tanto, Julián tiene 51 lapiceros y la suma de las cifras de este número es $5 + 1 = 6$.

PROBLEMA 6.

Si el máximo común divisor entre a y $2^5 \cdot 3^3$ es $2^2 \cdot 3^2$, ¿cuál es el máximo común divisor entre a^2 y $2^5 \cdot 3^3$?

(a) $2^4 \cdot 3^4$ (b) $2^4 \cdot 3^3$ (c) $2^3 \cdot 3^3$ (d) $2^3 \cdot 3^2$ (e) No sé

Solución: Dado que el MCD entre a y $2^5{\cdot}3^3$ es $2^2{\cdot}3^2$, se sigue que en la factorización prima de a, el 2 tiene exponente 2 y el 3 también tiene exponente 2, es decir, $a = 2^2 \cdot 3^2 \cdots$. Por lo tanto, $a^2 = 2^4 \cdot 3^4 \cdots$ y, en consecuencia, el MCD entre a^2 y $2^5 \cdot 3^3$ es $2^4 \cdot 3^3$.

PROBLEMA 7.

David construye una lista de números de la siguiente manera: primero escribe el 1, luego el 3 y a partir del tercero, cada número que incluye en la lista lo obtiene restando del último número de la lista, el penúltimo, así:

$$1,\ 3,\ \underbrace{2}_{3-1},\ \underbrace{-1}_{2-3},\ldots$$

¿Cuál es la suma de los primeros 100 números de la lista?

Solución: Calculemos algunos números más de la lista:

$$1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, \ldots$$

Observamos que cada 6 números la secuencia se repite, y la suma de cada 6 números consecutivos es 0. Agrupando los primeros 100 números en grupos de 6, obtenemos 16 grupos cuya suma es 0, y el último grupo tiene 4 números, a saber: $1, 3, 2, -1$, cuya suma es 5.

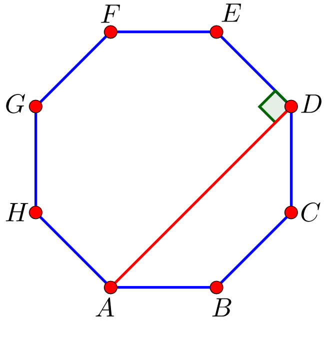
$$\underbrace{1, 3, 2, -1, -3, -2}_{\text{suma: } 0}, \underbrace{1, 3, 2, -1, -3, -2}_{\text{suma: } 0}, \ldots, \underbrace{1, 3, 2, -1, -3, -2}_{\text{suma: } 0}, \underbrace{1, 3, 2, -1}_{\text{suma: } 5}.$$

Por lo tanto, la suma de los primeros 100 números de la lista es 5.

PROBLEMA 8.

Los puntos A, B, C, D y E son vértices consecutivos de un polígono regular. Si la diagonal $\overline{AD}$ es perpendicular al lado $\overline{DE}$, ¿cuántas diagonales tiene el polígono?

Solución: Considere la siguiente figura:



Observamos que el polígono descrito en el enunciado es un octágono regular, esto se deduce del hecho de que la diagonal $\overline{AD}$ es perpendicular al lado $\overline{DE}$; para que esto ocurra, los lados $\overline{AH}$ y $\overline{DE}$ deben ser paralelos. Finalmente, el número de diagonales de un octágono es 20; esto se puede contar manualmente o notando que desde cada vértice salen 5 diagonales y dado que hay 8 vértices, el número total de diagonales se obtiene como $\dfrac{5 \times 8}{2} = 20$. El producto 5×8 se divide entre 2 para obtener el número exacto de diagonales, pues en el producto 5×8, las diagonales se cuentan doble, considerando, por ejemplo, la diagonal que sale de A a C y la que sale de C a A, aunque ambas son la misma diagonal.

PROBLEMA 9.

Un número es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. ¿Cuántos números capicúas de 4 cifras son pares?

Solución: Dado que el número es un capicúa de 4 cifras, es suficiente determinar las dos últimas cifras, ya que las dos primeras deben ser iguales a ellas. Además, como el número debe ser par, la última cifra también debe ser par, excluyendo el 0, ya que si fuera 0, la primera cifra también sería 0, resultando en un número de solo 3 cifras. Por lo tanto, para la última cifra hay 4 opciones $(2, 4, 6, 8)$, y para la cifra de las decenas se puede elegir cualquiera de los 10 dígitos. Por el principio multiplicativo, tenemos un total de $4 \times 10 = 40$ números que cumplen las condiciones del enunciado.

1.3. Prueba Final

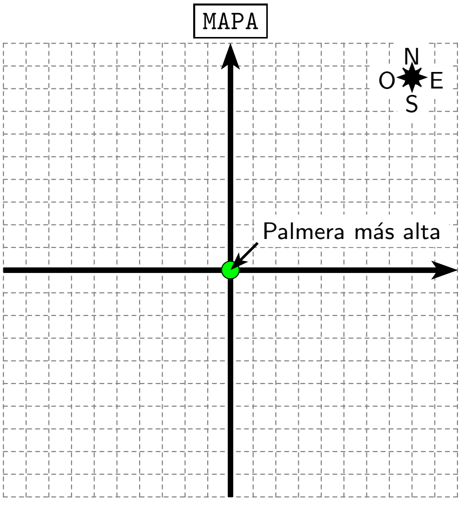
PROBLEMA 1.

En las ruinas de un naufragio, descubrieron el siguiente mensaje:

$$\boxed{\mathrm{N7E5S}\times 11=\mathrm{W5N71S}}$$

`Un botín te espera al recorrer N kilómetros al norte de la palmera más alta de la isla, luego E kilómetros al este, después, S kilómetros al sur y finalmente W kilómetros al oeste.`

Ubique en el mapa el punto donde se encuentra el tesoro, teniendo en cuenta que cada cuadradito de la cuadrícula representa $1\,km^2$ de área y el punto de referencia es la palmera más alta de la isla.



Solución: Resolvamos la multiplicación en modo vertical:

$$\begin{array}{cccccc}
 & N & 7 & E & 5 & S \quad \times \\
 & & & & 1 & 1 \\
\hline
 & N & 7 & E & 5 & S \\
N & 7 & E & 5 & S & \\
\hline
W & 5 & N & 7 & 1 & S
\end{array}$$

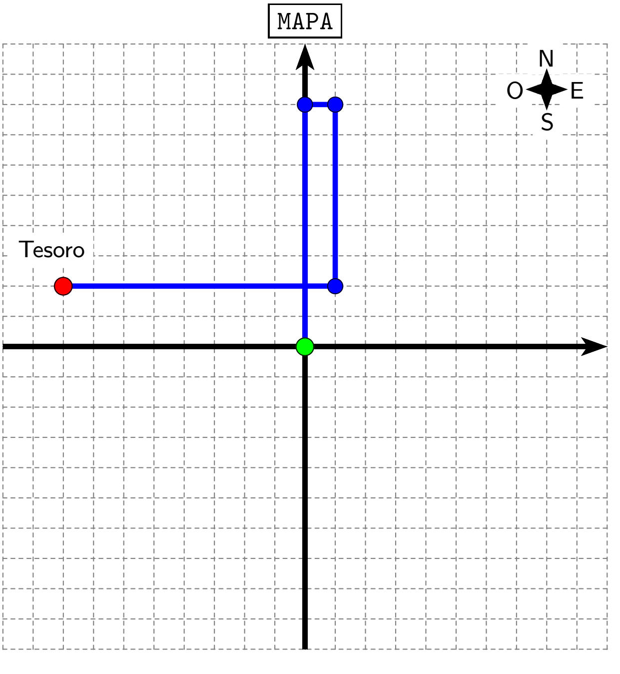
Al resolver, vemos que la cifra de las unidades de $5+S$ es 1, por lo tanto $5+S=11$, así que $S=6$.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & N & 7 & E & 5 & \color{blue}{6} \quad \times \\
 & & & & 1 & 1 \\
\hline
 & N & 7 & \color{red}{{}^{1}E} & 5 & \color{blue}{6} \\
N & 7 & E & \color{red}{5} & \color{blue}{6} & \\
\hline
W & 5 & N & \color{red}{7} & 1 & \color{blue}{6}
\end{array}
$$

Ahora, la cifra de las unidades de $1+E+5$ es 7, entonces $E=1$, $N=8$ y $W=9$, como se verifica a continuación:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 8 & 7 & 1 & 5 & 6 \quad \times \\
 & & & & 1 & 1 \\
\hline
 & 8 & 7 & 1 & 5 & 6 \\
8 & 7 & 1 & 5 & 6 & \\
\hline
9 & 5 & 8 & 7 & 1 & 6
\end{array}
$$

Ahora, sabiendo que $N=8$, $E=1$, $S=6$ y $W=9$, nos movemos como indica el mensaje en el mapa, así:



Problema 2.

¿Cuál es el menor número natural que al multiplicarlo por 73 da como resultado un número cuyas cifras son todas 3?

Solución: Sea N el menor número natural que al multiplicarlo por 73 da como resultado un número cuyas cifras son todas 3, entonces $N \times 73 = 33\ldots3$, esto es $N = 333\ldots3 \div 73$. Haciendo la división, obtenemos:

$$
\begin{array}{l|l}
\overset{\frown}{333}3\ldots3 & 73 \\ \cline{2-2}
413 & 456621 \\
473 & \\
453 & \\
153 & \\
73 & \\
0 &
\end{array}
$$

Por lo tanto, $N = 456621$.

Problema 3.

Un círculo y un cuadrado tienen el mismo perímetro. ¿Cuál es la razón entre el área del círculo y el área del cuadrado?

Solución: Sea L el lado del cuadrado y r el radio del círculo. Dado que ambos tienen el mismo perímetro, se cumple que

$$4L = 2\pi r,$$

Luego, $L = \dfrac{2\pi r}{4} = \dfrac{\pi r}{2}$. Así, la razón entre el área del círculo y el área del cuadrado está dada por:

$$\frac{\pi r^2}{L^2} = \frac{\pi r^2}{\left(\dfrac{\pi r}{2}\right)^2} = \frac{\pi r^2}{\dfrac{\pi^2 r^2}{4}} = \frac{4\pi r^2}{\pi^2 r^2} = \frac{4}{\pi}.$$

Problema 4.

Geraldine sale de Málaga a las $7:00$ a.m. y viaja en bicicleta hacia Bucaramanga, que está a 160 kilómetros de distancia, recorriendo 20 kilómetros cada hora. A las $7:15$ a.m., Paola sale de Bucaramanga y se dirige en bicicleta hacia Málaga, recorriendo 11 kilómetros cada hora. ¿A qué hora se encuentran entre sí en la carretera?

Solución: Geraldine comienza su recorrido 15 minutos, es decir, $\frac{1}{4}$ de hora, antes que Paola. En este tiempo, Geraldine ha recorrido $\frac{20}{4} = 5\,km$. Por lo tanto, a las $7:15$ a.m., la distancia que las separa es $160 - 5 = 155\,km$.

A partir de este momento, la suma de las distancias recorridas por ambas cada hora es $20 + 11 = 31\,km$. Observamos que Geraldine y Paola se encontrarán cuando la distancia total recorrida por ambas, desde las $7:15$ a.m., sume $155\,km$. Esto ocurrirá a las $155 \div 31 = 5$ horas desde las $7:15$ a.m. Por lo tanto, Geraldine y Paola se encontrarán entre sí a las $12:15$ del mediodía.

Problema 5.

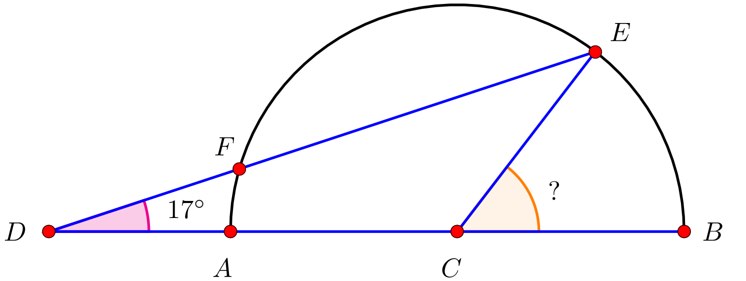
En una empresa de producción de yogures, están planeando lanzar tres nuevos tipos de yogur al mercado: yogur griego, yogur probiótico y yogur desnatado. La empresa dispone de cuatro tipos diferentes de envases: cajas de cartón, botellas de vidrio, bolsas plásticas y botellas plásticas. Por estrategias de mercadotecnia, han decidido que cada tipo de yogur se envasará en un solo tipo de envase, pero este tipo de envase puede repetirse para los otros tipos de yogur. Por ejemplo, podrían envasar los tres tipos de yogur en caja de cartón, o el yogur griego en caja de cartón, y el probiótico y desnatado en botella de vidrio, o todos en envases de diferente tipo, etc. ¿Cuántas maneras distintas de empaquetado pueden realizar para los tres nuevos tipos de yogur?

Solución: Para empacar el yogur griego, hay 4 tipos de envases diferentes. Una vez elegido el envase para el yogur griego, para cada uno de esos 4 tipos de envase, el yogur probiótico puede envasarse de 4 formas distintas, por ejemplo: cajas-cajas, cajas-botella de vidrio, cajas-bolsas, cajas-botellas plásticas, botellas de vidrio-cajas, etc; dando lugar a $4 \times 4 = 16$ formas diferentes de envasar los dos primeros tipos de yogur. Ahora, para cada una de esas 16 formas, el yogur desnatado se puede envasar de 4 formas diferentes. Por lo tanto, en total, los tres yogures se pueden envasar de $16 \times 4 = 64$ formas diferentes. En esta solución, hemos aplicado el principio multiplicativo:

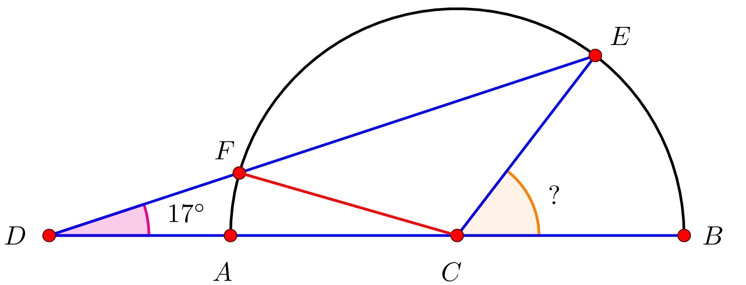
$$\underbrace{4\ opc.}_{\text{Y. Griego}} \times \underbrace{4\ opc.}_{\text{Y. Probiótico}} \times \underbrace{4\ opc.}_{\text{Y. Desnatado}} = \underbrace{64}_{\text{formas de empaquetar}}$$

PROBLEMA 6.

En la figura, AB es el diámetro de la semicircunferencia con centro en C. El punto D está sobre la prolongación de $\overline{AB}$; E sobre la semicircunferencia y F es la intersección de $\overline{DE}$ con la semicircunferencia. Si $DF = CB$, y $\measuredangle(EDC) = 17°$, ¿cuál es la amplitud del ángulo ECB?



Solución: Tracemos el segmento $\overline{FC}$:



Observe que el triángulo DFC es isósceles en F debido a que $DF = CB = CF$. Por lo tanto, podemos calcular los ángulos:

$$\begin{aligned}
&\measuredangle FCA = 17°,\\
&\measuredangle DFC = 180° - 17° - 17° = 146°,\\
&\measuredangle CFE = 180° - 146° = 34°.
\end{aligned}$$

Además, el triángulo FCE también es isósceles en C, ya que $CF = CE$. Por lo tanto, $\measuredangle FEC = \measuredangle CFE = 34°$ y en consecuencia, $\measuredangle ECF = 180° - 34° - 34° = 112°$. Finalmente,

$$\measuredangle BCE = 180° - \measuredangle ECF - \measuredangle FCA = 180° - 112° - 17° = 51°.$$

Capítulo 2

Nivel Medio

2.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

Para formar una comisión en el Congreso de la República, solo están habilitados 8 congresistas: A, B, C, D, E, F, G y H; bajo las siguientes condiciones:

- Si A es parte de la comisión, entonces B no podrá serlo.
- Los congresistas F y H, no pueden estar, ambos a la vez, en la comisión.
- D estará en la comisión si y solo si G está.

¿De cuántas maneras diferentes se puede armar una comisión con tres congresistas en la que NO esté el congresista A?

(a) 16 (b) 10 (c) 12 (d) 6 (e) No sé

Solución: Las posibles comisiones con tres congresistas son 12, a saber:

- $\{D, G, B\}$
- $\{D, G, C\}$
- $\{D, G, E\}$
- $\{D, G, F\}$
- $\{D, G, H\}$
- $\{F, B, C\}$
- $\{F, B, E\}$
- $\{F, C, E\}$
- $\{H, B, C\}$
- $\{H, B, E\}$
- $\{H, C, E\}$
- $\{B, C, E\}$

Problema 2.

Si x es un número real tal que $2x \leq 7$, ¿cuál es el mayor valor que puede tomar $3(2x - 3)$?

(a) 12 (b) 18 (c) 21 (d) 16 (e) No sé

Solución: Dado que el mayor valor que puede tomar $2x$ es 7, entonces el mayor valor que puede tomar $3(2x-3)$ es $3(7-3) = 12$.

Problema 3.

Un comerciante desleal, está ofreciendo el 20 % de descuento en toda su tienda. Sin embargo, días antes, el comerciante había incrementando todos los precios para que con el descuento quedarán en el precio original. ¿En qué porcentaje aumentó los precios originales, días antes del descuento?

(a) 15 % (b) 20 % (c) 25 % (d) 30 % (e) No sé

Solución: Denotemos el precio original de un artículo como P. Después del aumento de precios, el nuevo precio es A, y con el descuento del 20 %, el precio final es igual al precio original P, lo cual nos permite establecer la ecuación:

$$A - 0{,}2A = P.$$

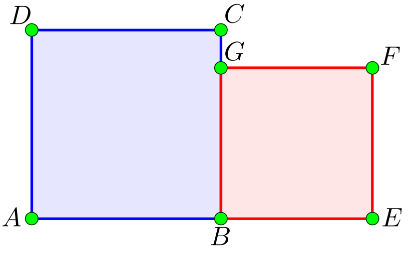
Resolviendo esta ecuación para A:

$$\begin{aligned} 0{,}80A &= P, \\ A &= \frac{P}{0{,}80} = \frac{P}{\frac{4}{5}} = P \times \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Esto significa que el nuevo precio A es $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ veces el precio original P, es decir, $\frac{1}{4}$ más que el precio original. Por lo tanto, el aumento de los precios originales días antes del descuento fue del $\frac{100}{4}\,\% = 25\,\%$.

Problema 4.

En la siguiente figura, $ABCD$ y $BEFG$ son cuadrados. Si la diferencia entre las áreas de estos cuadrados es $48\,cm^2$ y $AE = 12\,cm$, ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{CG}$?



(a) $2\,cm$ (b) $4\,cm$ (c) $6\,cm$ (d) $1\,cm$ (e) No sé

Solución: Sea a el lado del cuadrado $ABCD$ y b el lado del cuadrado $BEFG$. Entonces, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 48, \\ a + b &= 12, \\ a - b &= CG. \end{aligned}$$

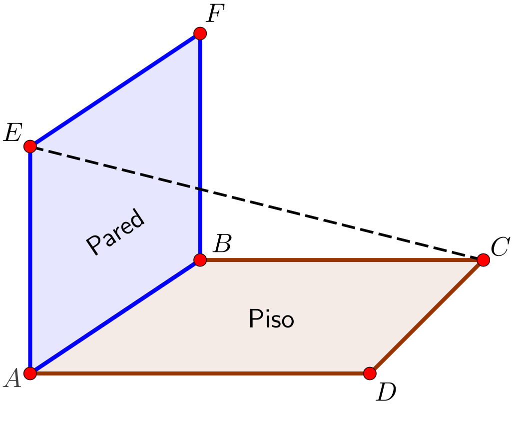
Lo que nos sugiere usar la identidad de diferencia de cuadrados:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

para establecer la relación: $48 = 12 \times CG$. Finalmente, resolviendo para CG, encontramos que $CG = \dfrac{48}{12} = 4\,cm$.

Problema 5.

En la siguiente figura se muestra el plano de un garaje en el que se puede apreciar el piso y una pared, rectangulares. Las dimensiones del garaje son $AD = 8\,m$, $DC = 6\,m$ y $AE = 4\,m$. Si un insecto vuela en línea recta desde la esquina C hasta la esquina E del garaje, ¿cuál es la distancia recorrida por el insecto?



(a) $2\sqrt{13}\,m$ (b) $4\sqrt{5}\,m$ (c) $18\,m$ (d) $2\sqrt{29}\,m$ (e) No sé

Solución: Dado que las paredes y el piso del garaje son rectangulares, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras. Primero, consideramos el triángulo ADC :

$$\begin{aligned} AD^2 + DC^2 &= AC^2, \\ 8^2 + 6^2 &= AC^2, \\ 100 &= AC^2; \end{aligned}$$

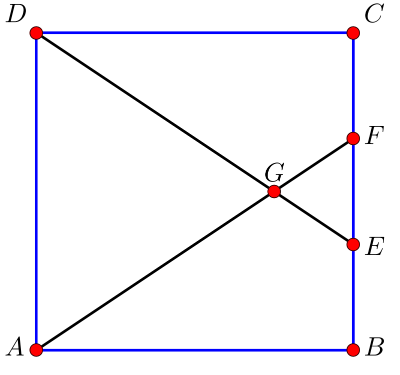
y ahora enfocándonos en el triángulo EAC :

$$\begin{aligned} AE^2 + AC^2 &= CE^2, \\ 4^2 + 100 &= CE^2, \\ 116 &= CE^2. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que $CE = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}\,m$.

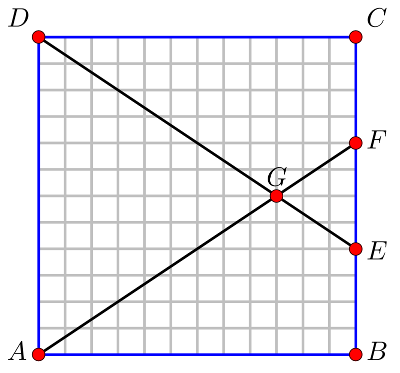
Problema 6.

En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado de lado $12\,cm$ y los puntos E y F dividen el lado BC en tres partes iguales. ¿Cuál es el área del triángulo AGD?



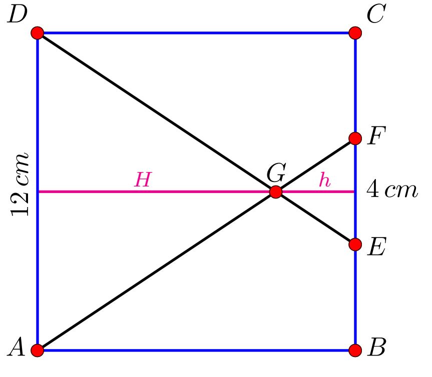
(a) $36\,cm^2$ (b) $54\,cm^2$ (c) $48\,cm^2$ (d) $72\,cm^2$ (e) No sé

Solución 1: Al trazar la figura en una cuadrícula de 12×12 como se muestra a continuación:



Se observa que la base AD del triángulo AGD mide $12\,cm$ y su altura correspondiente mide[1] $9\,cm$. Por lo tanto, el área del triángulo AGD es $\dfrac{12 \times 9}{2} = 54\,cm^2$.

Solución 2: Observe que los triángulos AGD y FGE son semejantes (compare sus ángulos internos), y la constante de proporcionalidad es $\dfrac{AD}{FE} = \dfrac{12}{4} = 3$.



[1]Para corroborar que la altura, mide $9\,cm$, hallamos el punto G de intersección de los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{AF}$. Tomamos a A como el origen de coordenadas $(0,0)$ y calculamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $D(0,12)$ y $E(12,4)$: la pendiente está dada por $m = \frac{4-12}{12-0} = -\frac{2}{3}$, entonces la ecuación de la recta es $y = -\frac{2}{3} + 12$. De manera similar, hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(0,0)$ y $F(12,8)$, esta es: $y = \frac{2}{3}x + 0$. Igualando esta dos ecuaciones, encontramos que el punto de corte ocurre cuando:

$$-\frac{2}{3} + 12 = \frac{2}{3}x \iff 12 = \frac{4}{3}x \iff 9 = x.$$

Es decir, la coordenada x del punto G es 9, y esta es la altura del triángulo AGD respecto a su base AD.

Por lo tanto, si H es la altura del triángulo AGD respecto a su base DA y h es la altura del triángulo FGE respecto a su base FE, como se muestra en la figura; entonces, $\frac{H}{h} = 3$, es decir $h = \frac{H}{3}$. Pero, también $H + h = 12$ (el lado del cuadrado), luego, $H + \frac{H}{3} = 12$, esto es $\frac{4H}{3} = 12$, o $H = 9\,cm$. Por lo tanto, el área del triángulo AGD es

$$\frac{DA \times H}{2} = \frac{12 \times 9}{2} = 54\,cm^2.$$

Problema 7.

Las edades de tres hermanos son números primos y cumplen que la suma de las edades de dos de ellos es igual a la edad del tercero. ¿Cuál es la edad del menor?

(a) 2

(b) 3

(c) 5

(d) Imposible saberlo, hace falta información

(e) No sé.

Solución: Todos los números primos, excepto el 2, son impares. Al sumar dos números impares, el resultado es par. Dado que las edades de los tres hermanos son números primos y la suma de dos de ellos es la edad del tercero, concluimos que una de las edades debe ser el 2, que es el menor de los números primos. Por lo tanto, la edad del menor de los hermanos es 2.

Problema 8.

El número de carritos de la colección del abuelo Alberto, es un número de dos cifras que se obtiene al sumar sus cifras con el producto de las mismas. ¿Cuál es el dígito de las unidades de este número?

(a) 0 (b) 5 (c) 6 (d) 9 (e) No sé

Solución: Sea ab el número de dos cifras que representa la cantidad de carritos de la colección. Note que $ab = 10a + b$, donde $a \neq 0$ es la cifra de las decenas y b es cifra de las unidades del número. Entonces, tenemos que

$$10a + b = a + b + a \times b,$$

simplificando la expresión nos queda:

$$\begin{aligned} 10a + b &= a + b + a \times b, \\ 9a &= a \times b, \\ 9 &= b. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el dígito de las unidades de este número es 9.

Problema 9.

¿Cuántos números de cuatro cifras hay tales que el dígito de las unidades deja residuo 1 al dividirse entre 5, el de las decenas es un impar, el de las centenas es primo y el de la unidades de mil es un cuadrado perfecto?

(a) 120 (b) 150 (c) 160 (d) 200 (e) No sé

Solución: Los dígitos que dejan residuo 1 al dividirse entre 5 son: 1 y 6, por lo que hay 2 opciones para elegir la cifra de las unidades. Los dígitos impares son: 1, 3, 5, 7 y 9 entonces para las decenas hay 5 opciones. Los dígitos primos son: 2, 3, 5 y 7, luego para las centenas hay 4 opciones. Los dígitos que son cuadrados perfectos son: 1, 4 y 9 entonces para las unidades de mil hay 3 opciones. Por lo anterior, según el principio multiplicativo tenemos $2 \times 5 \times 4 \times 3 = 120$ números que cumplen las condiciones del enunciado.

$$\underbrace{3 \ opc.}_{\text{Unidades de mil}} \times \underbrace{4 \ opc.}_{\text{Centenas}} \times \underbrace{5 \ opc.}_{\text{Decenas}} \times \underbrace{2 \ opc.}_{\text{Unidades}} = \underbrace{120}_{\text{total números}}$$

2.2. Prueba Selectiva

PROBLEMA 1.

Un granjero, que no tenía hijos, decidió legar toda su herencia a sus tres empleados, quienes lo habían servido durante 6, 7 y 11 años respectivamente. En su testamento, el granjero estableció que la herencia debía repartirse de manera directamente proporcional a los años de servicio de cada empleado; de este modo quién más lo sirvió obtuvo 10 millones de pesos más que el empleado que menos tiempo lo había servido. ¿De cuántos millones de pesos era la herencia del granjero?

(a) 24 (b) 48 (c) 40 (d) 80 (e) No sé

Solución 1: La diferencia en años de servicio entre el empleado que sirvió más tiempo al granjero y aquel que lo sirvió por menos tiempo es de $11 - 6 = 5$ años; mientras que la diferencia en la compensación monetaria es de 10 millones de pesos. Esto implica que cada año de servicio se recompensó con 2 millones de pesos para cada empleado. Por lo tanto, el empleado que sirvió durante 6 años recibió 12 millones, el de 7 años recibió 14 millones, y el que lo sirvió durante 11 años recibió 22 millones. En consecuencia, la herencia total del granjero asciende a $12 + 14 + 22 = 48$ millones de pesos.

Solución 2: Sea x (en millones) el dinero recibido por el empleado que lo sirvió 6 años, dado que el monto recibido es proporcional a los años servicio se establece que:

$$\frac{6}{x} = \frac{11}{10 + x},$$

de donde $x = 12$. Ahora, sumando los años de servicio de cada empleado, tenemos que:

$$\frac{6}{12} = \frac{6 + 7 + 11}{H} = \frac{24}{H},$$

donde $H = 48$ millones es el total de la herencia.

PROBLEMA 2.

La diferencia entre dos números es 7. Si al menor se le resta 3 y al mayor se le resta 5, la diferencia entre el producto de los números originales y el de los nuevos números es 350. ¿Cuál es la suma de dichos números?

(a) 85 (b) 101 (c) 93 (d) 77 (e) No sé

Solución: Sean a el número menor y b el número mayor. Entonces:

$$b - a = 7,$$
$$ab - (a-3)(b-5) = 350.$$

Desarrollando la segunda ecuación tenemos:

$$ab - (a-3)(b-5) = 350,$$
$$ab - (ab - 5a - 3b + 15) = 350,$$
$$5a + 3b = 365.$$

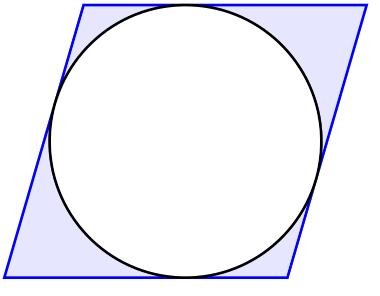
Pero al sumar la primera ecuación con la última obtenida, encontramos:

$$4a + 4b = 372,$$
$$4(a+b) = 372;$$

De donde se sigue que $a + b = \dfrac{372}{4} = 93$.

PROBLEMA 3.

En la figura se muestra un círculo de radio $3\,cm$ inscrito en un rombo de lado $9\,cm$. ¿Cuál es el área sombreada?



(a) $18(3-\pi)\,cm^2$

(b) $9(9-\pi)\,cm^2$

(c) $6(9-\pi)\,cm^2$

(d) $9(6-\pi)\,cm^2$

(e) No sé

Solución: El área sombreada es la diferencia entre el área del rombo y el área del círculo. Note que el rombo es un paralelogramo, con base $9\,cm$ y altura $6\,cm$ (el doble del radio del círculo). Por lo tanto el área sombreada puede expresarse como:

$$9 \times 6 - 9\pi = 9(6-\pi)\,cm^2.$$

Problema 4.

Si en un triángulo rectángulo la longitud de un cateto se aumenta en $50\,\%$, mientras que la longitud del otro cateto se disminuye $50\,\%$, entonces el área de este triángulo

(a) disminuye $25\,\%$	(d) aumenta $75\,\%$
(b) disminuye $75\,\%$	(e) se mantiene.
(c) aumenta $25\,\%$	(f) No sé.

Solución: Sean a y b las longitudes de los catetos del triángulo original. Dado que el triángulo es rectángulo, sus catetos actúan como base y altura, luego su área es $\frac{ab}{2}$. Ahora bien, las longitudes de los catetos del nuevo triángulo son $a + \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$ y $b - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b$. Por lo tanto, el área de este nuevo triángulo es:

$$\frac{\frac{3}{2}a \times \frac{1}{2}b}{2} = \frac{\frac{3}{4}ab}{2} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{ab}{2}\right) = (0{,}75)\left(\frac{ab}{2}\right).$$

De esta manera, se concluye que el área disminuye en $\frac{1}{4}$ o, lo que es equivalente, un $25\,\%$.

Problema 5.

¿En cuántos ceros termina el número $(20)^{20}\,(2+3)^{23}$?

(a) 20 (b) 23 (c) 40 (d) 43 (e) No sé

Solución: La expresión $(20)^{20}(2+3)^{23}$ se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(20)^{20}\,(2+3)^{23} &= 5^{20} \cdot 4^{20} \cdot 5^{23} \\ &= 5^{43} \cdot 2^{40} \\ &= 5^{3} \cdot 10^{40} \\ &= 125\underbrace{000\ldots0}_{40 \text{ ceros}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el número termina con 40 ceros.

PROBLEMA 6.

David y Andrea han destapado cada uno su alcancía. David separa las monedas de su alcancía en grupos de 3 y le sobran 2 monedas. Andrea separa las suyas en grupos de 6, y le quedan faltando 3 monedas para formar la misma cantidad de grupos completos que formó David. Si David y Andrea juntan sus monedas para formar grupos de 9, ¿cuántas monedas les sobran?

(a) 1 (b) 5 (c) 6 (d) 8 (e) No sé

Solución: Sean D y A las cantidades de monedas de David y Andrea, respectivamente. Se establece que D es un múltiplo de 3 excedido en 2, lo que se expresa como $D = 3k + 2$, donde k es el número de grupos completos que formó David. Mientras que Andrea tiene $A = 6k - 3$, utilizando la misma k porque Andrea quiere formar "la misma cantidad de grupos completos que formó David".

Al sumar las cantidades de monedas, obtenemos:

$$D + A = 3k + 2 + 6k - 3 = 9k - 1.$$

Esto indica que les falta una moneda para completar los grupos de 9, o dicho de otra forma, les sobran 8 monedas.

PROBLEMA 7.

Cierto día un padre le dice a su hijo: "Cuando tu tengas la edad que tengo, tendrás el triple de lo que tienes, que es 30 años menos de los que tendré entonces". ¿Qué edad tiene el hijo?

Solución: Denotemos la edad actual del hijo como H y la edad actual del padre como P. La información dada se puede expresar en dos ecuaciones:

- "Cuando tú tengas la edad que tengo, tendrás el triple de lo que tienes":

$$P = 3H.$$

- "...que es 30 años menos de los que tendré entonces."

$$3H = P + 2H - 30$$

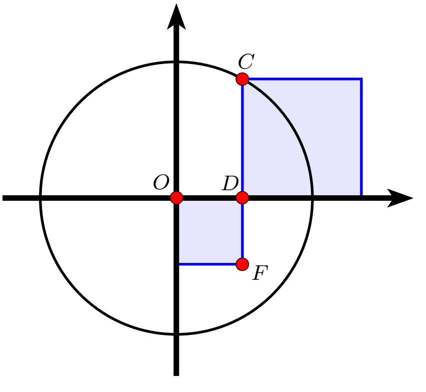
Sustituimos P de la primera ecuación en la segunda:

$$\begin{aligned} 3H &= P + 2H - 30 \\ 3H &= 3H + 2H - 30 \\ 30 &= 2H \\ 15 &= H. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el hijo tiene actualmente 15 años.

PROBLEMA 8.

En la siguiente figura, el punto C está sobre la circunferencia con centro en O y los puntos C, D y F están alineados. Si el diámetro de la circunferencia es $12\,cm$, ¿cuál es la suma de las áreas de los cuadrados sombreados, en centímetros cuadrados?



Solución 1: Trace el radio $\overline{OC}$, entonces $OC = 6\,cm$, y el triángulo ODC es rectángulo. Así, por el Teorema de Pitágoras:

$$OD^2 + DC^2 = OC^2 = 36\,cm^2.$$

Observe que OD y DC son los lados de los cuadrados sombreados, por lo que la expresión $OD^2 + DC^2 = 36\,cm^2$ representa la suma de sus áreas.

Solución 2: Dado que el punto C puede estar en cualquier lugar sobre la circunferencia, muévalo hasta la intersección de uno de los ejes con la circunferencia. Notará que un cuadrado desaparece mientras que el otro permanece, con un lado de $6\,cm$. Así, el área sombreada será la de un cuadrado de $6\,cm$ de lado, es decir, $36\,cm^2$.

Problema 9.

¿Cuántos números pares se pueden expresar como el producto de tres números diferentes del conjunto $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$?

Solución 1: Para expresar un número par como el producto de tres números diferentes de este conjunto, uno de ellos debe ser 2 ya que es el único número par en el conjunto dado. Entonces, tenemos:

$$2 \times \text{dos números diferentes del conjunto } \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}.$$

Dado que todos los números del conjunto son primos, para obtener los diferentes productos, basta tomar dos números distintos (ya que no puede haber repetición) de los 8 restantes en el conjunto, sin importar el orden de elección; esto se puede hacer de[2]

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ formas diferentes.}$$

Solución 2: El conteo también se puede hacer manualmente:

$$\begin{array}{ll}
2 \times 3 \times (*), & \text{donde * se puede elegir de } 7 \text{ formas diferentes;} \\
2 \times 5 \times (*), & \text{donde * se puede elegir de } 6 \text{ formas diferentes;} \\
2 \times 7 \times (*), & \text{donde * se puede elegir de } 5 \text{ formas diferentes;} \\
\vdots & \\
2 \times 17 \times (*), & \text{donde * se puede elegir de } 2 \text{ formas diferentes;} \\
2 \times 19 \times 23 & \text{una sola forma.}
\end{array}$$

De este modo, en total hay $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ números que cumplen las condiciones del enunciado.

[2] Recuerde que el coeficiente binomial, denotado como $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, donde $0 \leq k \leq n$, representa el número de formas en que se pueden elegir k elementos de un conjunto con n elementos, sin repetición y sin importar el orden.

2.3. Prueba Final

Problema 1.

Una ranita inicia una travesía, en línea recta, desde su charca hasta una fuente de alimento, dando saltos de $15\,cm$ en cada movimiento. Posteriormente, inicia su regreso a la charca, esta vez dando saltos de $17\,cm$. Tras haber recorrido un total de $2,2$ metros, se detiene momentáneamente, en un punto del camino de vuelta. En este punto, ¿cuánta distancia le resta a la ranita para llegar a su charca?

Solución: Sean a el número de saltos de la ranita desde su charca hasta la fuente de alimento y b el número de saltos que da la ranita de regreso a su charca hasta el momento en que se detiene. Entonces

$$15a + 17b = 220.$$

Despejando a de la ecuación anterior, se tiene que $a = \dfrac{220 - 17b}{15}$ y teniendo en cuenta que tanto a como b son números enteros positivos entonces, se deduce que $220 - 17b$ debe ser múltiplo de 15, de ahí que $b = 5$ y $a = 9$. Así, la distancia desde la charca hasta la fuente de alimento es $15a = 15 \times 9 = 135\,cm$ y la distancia recorrida de vuelta, desde la fuente de alimento hacia la charca es $17b = 85\,cm$. Por lo tanto, a la ranita aun le faltan $135 - 85 = 50\,cm$ para llegar a su charca.
Nota: Los valores de a y b también pueden encontrarse por ensayo error, teniendo en cuenta que estos deben ser números enteros positivos.

Problema 2.

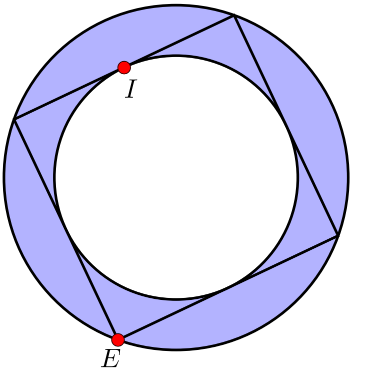
¿Cuántos conjuntos de dos o más enteros positivos consecutivos, cuya suma es 100, existen? Exhíbalos.

Solución: Existen dos conjuntos de dos o más enteros positivos consecutivos, cuya suma es 100, estos son:

- $\{18, 19, 20, 21, 22\}$
- $\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$

Problema 3.

En la figura, la circunferencia que contiene al punto I está inscrita en el cuadrado, y el cuadrado está inscrito en la circunferencia que contiene al punto E. Si el área del cuadrado es $64\,cm^2$, ¿cuál es el área sombreada?



Solución: Observe que el radio del círculo interior es la mitad del lado del cuadrado, y el radio del círculo exterior es la mitad de la diagonal del cuadrado. Dado que el área del cuadrado es $64\,cm^2$, se deduce que el lado mide $8\,cm$. Así, el radio del círculo interior es $r = 4\,cm$. Ahora, la diagonal del cuadrado está dada por $D = \sqrt{8^2+8^2} = 8\sqrt{2}\,cm$, por lo que el radio del círculo exterior es $R = \dfrac{D}{2} = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}\,cm$. Por lo anterior, el área sombreada es:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(\left(4\sqrt{2}\right)^2 - 4^2\right) = \pi(32-16) = 16\pi\,cm^2.$$

Problema 4.

El valor de una reliquia elaborada en un metal precioso varía en forma directamente proporcional al cuadrado de su peso medido en kilogramos. Si consideramos una reliquia valorada en $\$10,000$ dólares que se fractura en dos piezas con pesos de $2\,kg$ y $8\,kg$ respectivamente, ¿Cuál será la pérdida económica en dólares al vender cada fragmento de la reliquia por separado?

Solución: Sea k la constante de proporcionalidad, entonces el precio de la reliquia está dado por $k(8+2)^2 = 100k = 10000$. Luego la constante de proporcionalidad es $k = 100$. Al vender los fragmentos de la reliquia se obtendría

$$k\cdot 2^2 + k\cdot 8^2 = 4k + 64k = 68k = 6800.$$

Por lo tanto, la perdida económica sería de $10000 - 6800 = 3200$ dólares.

PROBLEMA 5.

Según una antigua leyenda, un veterano mago matemático tuvo una visión profética que reveló el año en que se encontraría con su destino final. En la visión, una voz enigmática le comunicó que el año de su fallecimiento sería un número especial: tendría tres cifras, sería divisible por 6 y tendría exactamente 21 divisores positivos. De acuerdo con la profecía, ¿qué año estaba previsto para marcar el desenlace del mago matemático?

Solución 1: Sea N el año en que según la profecía morirá el mago. Dado N tiene un número impar de divisores positivos, entonces el N es un cuadrado perfecto. Además es múltiplo de 6 y por lo tanto de 2 y de 3. Analizando la descomposición en factores primos de N notamos que debe tener al 2 y al 3 con potencia par, y cualquier otro primo que aparezca en su descomposición también debe tener potencia par (por ser cuadrado perfecto) veamos las opciones:

N	
$2^2 \times 3^2 = 30$	no tiene tres cifras
$2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 900$	no tiene exactamente 21 divisores positivos
$2^2 \times 3^2 \times 7^2 = 1764$	sobrepasa el número de cifras
$2^4 \times 3^2 = 144$	no tiene 21 divisores positivos
$2^6 \times 3^2 = 576$	cumple

Por lo tanto, el año del fallecimiento del mago, según la profecía fue el 576.

Solución 2: Dado que el número N tiene exactamente 21 divisores y $21 = 3 \times 7$ entonces $N = p^2 \times q^6$, o $N = p^{20}$, donde p y q son primos distintos. Pero además N es divisible por 6 y por lo tanto por 2 y por 3, así la única opción es $N = 3^2 \times 2^6 = 576$, ya que el número tiene 3 cifras.

PROBLEMA 6.

Un triángulo equilátero y un cuadrado tienen el mismo perímetro. Si el área del triángulo es $9\sqrt{3}\,cm^2$, ¿cuál es la diagonal del cuadrado?

Solución 1: Sea L el lado del triángulo equilátero y C el lado del cuadrado, entonces $3L = 4C$, luego $C = \dfrac{3L}{4}$. Además, usando el Teorema de Pitágoras se encuentra que la altura del triángulo equilátero es $h = \sqrt{L^2 - \left(\dfrac{L}{2}\right)^2} = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$, pero se conoce que el área es $9\sqrt{3}\,cm^2$, de ahí que

$$\begin{aligned}
\frac{L \times \frac{L\sqrt{3}}{2}}{2} &= 9\sqrt{3} \\
\frac{L^2\sqrt{3}}{4} &= 9\sqrt{3} \\
L^2 &= 36. \\
L &= 6.
\end{aligned}$$

Finalmente, por el Teorema de Pitágoras, la diagonal del cuadrado está dada por

$$D = \sqrt{C^2 + C^2} = \sqrt{2C^2} = C\sqrt{2} = \frac{3L}{4}\sqrt{2} = \frac{3 \times 6\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{2}\,cm.$$

Solución 2: Sea L la longitud de un lado del triángulo y C la longitud de un lado del cuadrado. Entonces

$$3L = 4C. \tag{2.1}$$

Por otro lado, usando la fórmula de Herón[3] para calcular el área del triángulo equilátero tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{3L}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{2}} &= 9\sqrt{3} \\
\frac{\sqrt{3}L^2}{4} &= 9\sqrt{3} \\
L &= 6.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de la ecuación (2.1) establecemos que el lado del cuadrado mide $C = \frac{9}{2}$. Finalmente, usando el teorema de Pitágoras para hallar la diagonal D del cuadrado tenemos que:

$$\begin{aligned}
D^2 &= \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\
D &= \frac{9\sqrt{2}}{2}\,cm.
\end{aligned}$$

[3] Fórmula de Herón: Si loa longitudes de los lados de un triángulo son a, b y c; entonces el área de este triángulo es $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde $s = \frac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro.

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

El primero de marzo de este año, la Universidad Industrial de Santander cumplió 75 años de existencia, como patrimonio académico y cultural de los santandereanos, graduando a la fecha 95086 profesionales. Sean a y b enteros positivos tales que

$$\frac{95086}{75} = 1267 + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{4 + \frac{5}{b}}}$$

¿Cuál es el valor de $a + b$?

(a) 6 (b) 15 (c) 18 (d) 19 (e) No sé

Solución: Observe que:

$$\begin{aligned}
\frac{95086}{75} &= 1267 + \frac{61}{75} = 1267 + \frac{1}{\frac{75}{61}} \\
&= 1267 + \frac{1}{1 + \frac{14}{61}} = 1267 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{61}{14}}} \\
&= 1267 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{5}{14}}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce que $a + b = 1 + 14 = 15$.

Problema 2.

Dado que $(a+b)^{-1} = \frac{1}{3}$ y $(ab)^{-1} = 12$, ¿cuál es el valor de $a^{-1} + b^{-1}$?

(a) 36 (b) 4 (c) $\frac{1}{36}$ (d) $\frac{1}{4}$ (e) No sé

Solución: Note que

$$a^{-1} + b^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab} = (a+b)(ab)^{-1}.$$

Ahora bien, como $(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{3}$, entonces $a+b=3$. Así,

$$a^{-1} + b^{-1} = (a+b)(ab)^{-1} = 3 \times 12 = 36.$$

Problema 3.

Con el dinero obtenido por la venta del café, un agricultor puede comprar 13 vacas y 29 ovejas o 9 vacas y 41 ovejas. Si el agricultor decide comprar solo ovejas, ¿cuál es el número máximo que podría adquirir?

(a) 89 (b) 77 (c) 65 (d) 68 (e) No sé

Solución: Sean v el número vacas y a el número de ovejas, entonces

$$\begin{aligned} 13v + 29a &= 9v + 41a, \\ 4v &= 12a, \\ v &= 3a. \end{aligned}$$

Es decir, cada vaca cuesta lo mismo que 3 ovejas. Por lo tanto, si el agricultor compra solo ovejas, podría adquirir $13 \times 3 + 29 = 68$ ovejas.

Problema 4.

Si los tres lados de un triángulo rectángulo miden x, $x+7$ y $x+9$ centímetros, ¿cuál es el área de este triángulo?

(a) $60\,cm^2$ (b) $68\,cm^2$ (c) $22\,cm^2$ (d) $26\,cm^2$ (e) No sé

Solución: Sabemos que en un triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa es mayor que la de cualquiera de sus catetos. Entonces los catetos del triángulo son x y $x+7$, mientras que la hipotenusa es $x+9$. Aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos la ecuación:

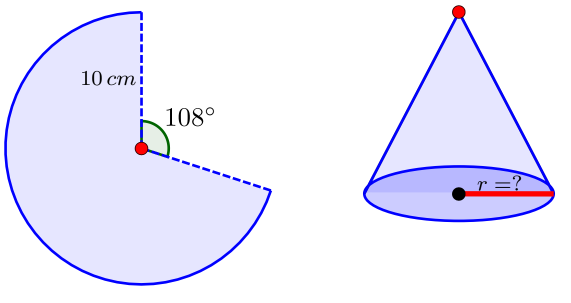
$$\begin{aligned} x^2+(x+7)^2 &= (x+9)^2, \\ x^2+x^2+14x+49 &= x^2+18x+81, \\ x^2-4x-32 &= 0, \\ (x-8)(x+4) &= 0. \end{aligned}$$

De donde se deduce que $x=8$ o $x=-4$. Descartamos $x=-4$ porque x representa la longitud de uno de los catetos y no puede ser negativa. Por lo tanto, $x=8$ y las longitudes de los catetos son $x=8\,cm$ y $x+7=15\,cm$. Finalmente, como el triángulo es rectángulo, sus catetos actúan como base y altura, por lo tanto, su área es:

$$\frac{8\times 15}{2}=60\,cm^2.$$

Problema 5.

Nicolás debe construir un cono, para ello corta un sector circular de $108°$ a una hoja circular de radio $10\,cm$ y pega los extremos punteados como se muestra en la figura. ¿Cuál es el radio de la base del cono que construyó Nicolás?



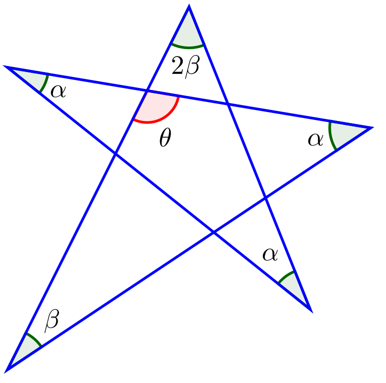
(a) $5\,cm$ (b) $6\,cm$ (c) $7\,cm$ (d) $10\,cm$ (e) No sé

Solución: El contorno de la base circular del cono es la porción restante de la circunferencia original después de realizar el corte. Dado que el sector circular cortado abarca $108°$, la fracción de la circunferencia cortada es $\frac{108}{360}=\frac{3}{10}$, lo que implica que queda $\frac{7}{10}$ de la circunferencia original.

Dado que el radio de la circunferencia inicial mide $10\,cm$, la longitud restante de la circunferencia es $\frac{7}{10}\times 2\pi\times 10=14\pi$. Esta es la longitud de la circunferencia de la base del cono, que está dada por $2\pi r = 14\pi$. Por lo tanto, podemos concluir que $r = 7\,cm$.

PROBLEMA 6.

Determine el valor del ángulo θ marcado en la siguiente figura.



(a) $100°$ (b) $108°$ (c) $110°$ (d) $120°$ (e) No sé

Solución: Dado que la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, obtenemos la relación $\beta + \alpha = 180° - \theta$. Ahora, al sumar los ángulos internos del pentágono que se forma en el interior de la "estrella", tenemos:

$$\begin{array}{c} \theta \\ 180° - 2\alpha \\ 180° - 3\beta \\ 180° - 2\alpha \\ 180° - 2\beta - \alpha \\ \hline \theta + 180° \times 4 - 5(\alpha + \beta). \end{array}$$

Recordemos que la suma de los ángulos internos de un pentágono es $180° \times (5-2) = 180° \times 3$. Entonces, podemos establecer que

$$\begin{aligned} \theta + 180° \times 4 - 5(\alpha + \beta) &= 180(3) \\ \theta + 180° \times 4 - 5(180° - \theta) &= 180(3) \\ 6\theta &= 180(4) \\ \theta &= 120°. \end{aligned}$$

Problema 7.

Sea S un subconjunto de $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$ tal que al sumar cualesquiera dos números distintos de S, el resultado NO es múltiplo de 3. ¿Cuál es el número máximo de elementos que puede tener S?

(a) 5 (b) 6 (c) 10 (d) 11 (e) No sé

Solución: Los números en el conjunto dado se pueden clasificar según el residuo que dejan al dividirse por 3, como se muestra a continuación:

Residuo 0 $3k$	Residuo 1 $3k+1$	Residuo 2 $3k+2$
$3,6,9,12,15$	$1,4,7,10,13$	$2,5,8,11,14$

Observe que la suma de dos números con residuo 0 es un múltiplo de 3, y lo mismo sucede si sumamos un número con residuo 1 y otro con residuo 2. Como deseamos el subconjunto S con más elementos, de modo que al sumar dos de ellos el resultado no sea múltiplo de 3, debemos tomar todos los números que dejan residuo 1 y agregar uno de los que dejan residuo 0, o tomar los que dejan residuo 2 y agregar uno de los que dejan residuo 0. Así, el conjunto S podría ser, por ejemplo:

$$S=\{1,4,7,10,13,3\} \text{ o } S=\{2,5,8,11,14,9\},\ldots$$

Por lo tanto, el número máximo de elementos que puede tener S es 6.

Problema 8.

¿Cuántos enteros positivos, menores o iguales que 1000, son múltiplos de 3 o de 4 pero no de 5?

(a) 383 (b) 400 (c) 467 (d) 484 (e) No sé

Solución: Primero vemos que, entre 1 y 1000,

- los múltiplos de 3 son: $A=\left\lfloor\frac{1000}{3}\right\rfloor=333.$
- los múltiplos de 4 son: $B=\left\lfloor\frac{1000}{4}\right\rfloor=250.$
- los múltiplos de $3\times 4=12$ son: $C=\left\lfloor\frac{1000}{12}\right\rfloor=83.$
- los múltiplos de $3\times 5=15$ son: $D=\left\lfloor\frac{1000}{15}\right\rfloor=66.$

- los múltiplos de $4 \times 5 = 20$ son: $E = \left\lfloor \frac{1000}{20} \right\rfloor = 50$.
- los múltiplos de $3 \times 4 \times 5 = 60$ son: $F = \left\lfloor \frac{1000}{60} \right\rfloor = 16$.

Ahora, note que $A + B - C$ cuenta los números que son múltiplos de 3 o 4 (se resta C porque al sumar $A + B$ se cuentan dos veces los que son múltiplos de 3 y de 4, es decir, los de 12).

Sin embargo, en $A + B - C$, también están contados los múltiplos de 3 y 5 (es decir, 15) y los múltiplos de 4 y 5 (es decir, 20), por lo que es necesario excluirlos. Esto nos lleva a la cuenta $A + B - C - D - E$.

Pero, al excluir los múltiplos de 3×5 y 4×5, se excluyen dos veces los múltiplos de $3 \times 4 \times 5 = 60$, por lo que debemos incluirlos nuevamente. Así, la cantidad exacta de los enteros positivos, menores o iguales a 1000, que son múltiplos de 3 o de 4, pero no de 5, es $A + B - C - D - E + F = 400$.

Problema 9.

Camila tiene 3 anillos de colores diferentes que puede ponerse en cualquier dedo de su mano derecha, menos en el pulgar. ¿De cuántas formas diferentes puede Camila lucir los 3 anillos en su mano derecha, colocando a lo más un anillo por dedo?

(a) 4 (b) 6 (c) 12 (d) 24 (e) No sé

Solución: Se trata de colocar tres anillos diferentes en los cuatro dedos restantes (sin el pulgar). Si dejamos libre el dedo meñique, los anillos pueden permutarse de 4 formas distintas en los restantes dedos: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Lo mismo ocurre si dejamos libre el dedo anular, el dedo corazón o el dedo índice. Por lo tanto, Camila puede lucir de $6 + 6 + 6 + 6 = 4 \times 6 = 24$ formas diferentes sus anillos.

3.2. Prueba Selectiva

Problema 1.

Si x y y son números reales tales que $8^x \cdot 2^y = 32$ y $3^x \cdot 9^y = 27$, ¿cuál es el valor de $x + y$?

(a) 2 (b) 11/5 (c) 3 (d) 3/5 (e) No sé

Solución: Aplicando propiedades de los exponentes tenemos:

$$\begin{aligned} 8^x \cdot 2^y &= 32 \\ \left(2^3\right)^x \cdot 2^y &= 2^5 \\ 2^{3x} \cdot 2^y &= 2^5 \\ 2^{3x+y} &= 2^5 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3^x \cdot 9^y &= 27 \\ 3^x \cdot \left(3^2\right)^y &= 3^3 \\ 3^x + 3^{2y} &= 3^3 \\ 3^{x+2y} &= 3^3. \end{aligned}$$

Al igualar los exponentes de las últimas expresiones nos queda el sistema:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 5, \\ x + 2y &= 3; \end{aligned}$$

cuya solución es: $x = \frac{7}{5}$ y $y = \frac{4}{5}$. Por lo tanto, $x + y = \frac{11}{5}$.

Problema 2.

El perímetro de un rectángulo es $20\,cm$ y su área es $1\,cm^2$, ¿cuál es la longitud de una de sus diagonales?

(a) $3\sqrt{11}\,cm$ (b) $7\sqrt{2}\,cm$ (c) $\sqrt{102}\,cm$ (d) $10\,cm$ (e) No sé

Solución: Sean a y b las longitudes de la base y la altura del rectángulo, respectivamente. El perímetro del rectángulo es $2(a + b) = 20$, lo que implica $a + b = 10$, y su área es $ab = 1$. Aplicando el Teorema de Pitágoras, la longitud de la diagonal del rectángulo es:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Por otro lado, sabemos que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, entonces

$$10^2 = a^2 + 2(1) + b^2,$$

y, por ende, $a^2 + b^2 = 98$. Así, la longitud de la diagonal del rectángulo es $D = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}\,cm$.

Problema 3.

En la figura, los puntos E y F están sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ del triángulo ABC. Si $AE = AD$ y $CD = CF$, es correcto afirmar que:

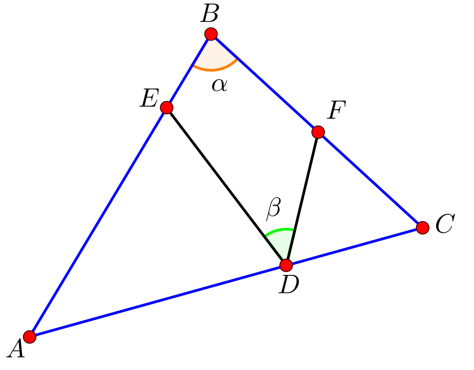
(a) $\alpha + \beta = 180°$

(b) $\beta = 180° - 2\alpha$

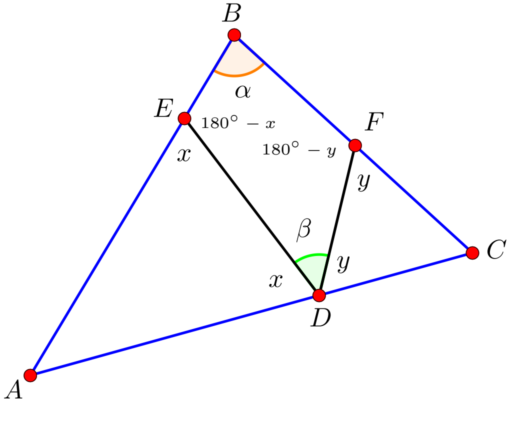
(c) $\alpha + \beta = 90°$

(d) $\beta = 90° - \frac{\alpha}{2}$

(e) No sé



Solución: Los triángulos EAD y FCD son isósceles en A y C, respectivamente, de ahí que $\measuredangle AED = \measuredangle EDA = x$ y $\measuredangle DFC = \measuredangle FDC = y$.



Además, en la figura podemos notar que:

$$x + \beta + y = 180° \Longrightarrow x + y = 180° - \beta,$$
$$\measuredangle DEB = 180° - x,$$
$$\measuredangle BFD = 180° - y.$$

Finalmente, dado que la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es $360°$, fijándonos en el cuadrilátero $BFDE$, tenemos:

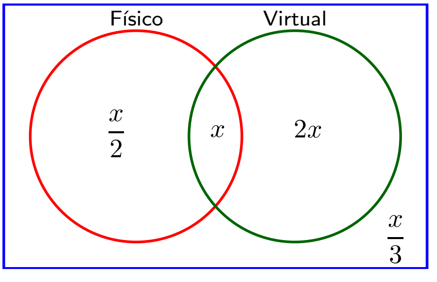
$$\begin{aligned}180^\circ - x + \alpha + 180^\circ - y + \beta &= 360^\circ,\\ \alpha + \beta &= x + y,\\ \alpha + \beta &= 180^\circ - \beta,\\ 2\beta &= 180^\circ - \alpha,\\ \beta &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Problema 4.

Recientemente se llevó a cabo una encuesta en la que participaron 46 personas para conocer sus hábitos de lectura en libros virtuales y en formato físico. Se observó que las personas que leen libros en ambos formatos (virtuales y en físico) son el doble de los que solo leen libros en físico, la mitad de los que solo leen libros virtuales y el triple de los que no leen libros. ¿Cuántas de las personas encuestadas leen libros en físico?

(a) 18 (b) 36 (c) 6 (d) 12 (e) No sé

Solución: Sea x el número de personas que leen libros en ambos formatos. Utilizando la información del enunciado, completamos el siguiente diagrama de Venn:



Dado que el total de personas encuestadas es 46, podemos plantear la ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} + x + 2x + \frac{x}{3} &= 46\\ \frac{3x + 6x + 12x + 2x}{6} &= 46,\\ 23x &= 46 \times 6,\\ x &= 12.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el número de personas que leen libros en físico es $\frac{x}{2} + x = 6 + 12 = 18$.

Problema 5.

¿Cuál es la última cifra del número 3^{2023}?

(a) 1 (b) 3 (c) 7 (d) 9 (e) No sé

Solución: Consideremos las cifras de las unidades de las primeras potencias de 3:

Potencia	Unidades
$3^1 = 3$	3
$3^2 = 9$	9
$3^3 = 27$	7
$3^4 = 27 \times 3 = \dots 1$	1
$3^5 = 3^4 \times 3 = \dots 1 \times 3$	3
$3^6 = 3^5 \times 3 = \dots 3 \times 3$	9
$\vdots$	$\vdots$
3^{2023}	7

En la tabla, no es necesario calcular el número exacto de la potencia de 3, ya que nos interesa únicamente la cifra de las unidades, y esta se obtiene multiplicando las unidades de la potencia anterior por 3.

Observemos también que las cifras de las unidades siguen un ciclo de cuatro números: 3, 9, 7, 1. En otras palabras, cada cuatro potencias, la cifra de las unidades será la misma. Por lo tanto, no es necesario llegar hasta la potencia 2023; basta con dividir 2023 entre 4, obteniendo como cociente 505 y residuo 3. Esto significa que se completan 505 ciclos y al final llegamos hasta el tercer número del ciclo.

Por lo tanto, la cifra de las unidades de 3^{2023} es 7.

Problema 6.

Un tanque tiene dos llaves y dos desagües. Una llave llena el tanque vacío en 3 horas y la otra, en 4 horas. Un desagüe vacía el tanque lleno en 6 horas y el otro, en 12 horas. Si estando el tanque lleno hasta sus $\frac{4}{9}$ se abren las dos llaves y los dos desagües, ¿en cuántos minutos se llena el tanque?

Solución: Del enunciado, sabemos que en 1 hora o 60 minutos, una llave llena $\frac{1}{3}$ del tanque y la otra $\frac{1}{4}$, mientras que los desagües vacían $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{12}$ del mismo. Esto quiere decir que si se abren las dos llaves y los dos desagües, en 60 minutos el tanque se llena

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3},$$

de su capacidad. Habiendo alcanzado $\frac{4}{9}$ de su capacidad, queda por llenar $\frac{5}{9}$. Para averiguar el tiempo necesario para completar la capacidad, podemos plantear la regla de tres simple:

$$\begin{array}{ccc} 60 \text{ minutos} & \longrightarrow & \frac{1}{3} \\ x & \longrightarrow & \frac{5}{9} \end{array}$$

Esto nos lleva a encontrar que el tiempo que demora en terminar de llenarse el tanque es $x = \dfrac{\frac{5}{9} \times 60}{\frac{1}{3}} = 100$ minutos.

PROBLEMA 7.

El menor entero positivo que tiene exactamente 12 divisores positivos, está en el intervalo

(a) $[40, 65]$ (b) $(65, 75]$ (c) $[95, 105)$ (d) $[105, 115]$ (e) No sé

Solución: Las posibles factorizaciones de 12 como producto de enteros mayores que 1 son:

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 4 \times 3 = 6 \times 2.$$

Por lo tanto, si el número tiene exactamente 12 divisores positivos, entonces su factorización prima es de la forma:[1]

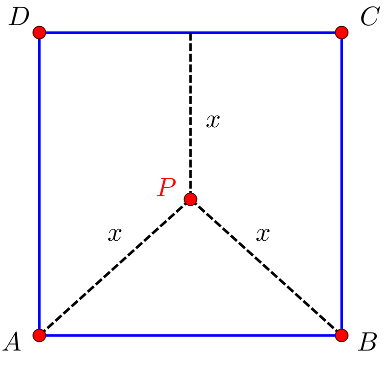
- $p \cdot q \cdot r^2$,
- $p^3 \cdot q^2$,
- $p^5 \cdot q$,
- p^{11};

donde p, q, r son primos distintos. Dado que estamos buscando el MENOR entero positivo con esta característica, ese número es $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, y pertenece al intervalo $[40, 65]$.

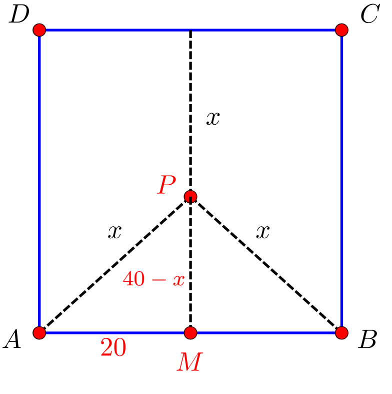
[1]Recuerde que si $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$, es la factorización prima del entero n, donde los p_i son primos distintos y los α_i son enteros positivos; entonces, la cantidad de divisores positivos de n está dada por $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$. En caso de no estar familiarizado con este resultado, puede abordarlo como un ejercicio de conteo utilizando el principio multiplicativo.

Problema 8.

En la figura, el punto P equidista $x\,cm$ de los vértices A y B, y del lado $\overline{CD}$ del cuadrado $ABCD$. Si el lado del cuadrado mide $40\,cm$, ¿cuál es el valor de x?



Solución: Considere la siguiente figura, en la que se ha trazado $\overline{PM}$ perpendicular a $\overline{AB}$.



Observe que el triángulo AMP es rectángulo. Entonces, por el Teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$\begin{aligned} 20^2 + (40-x)^2 &= x^2, \\ 400 + 1600 - 80x + x^2 &= x^2, \\ 2000 &= 80x, \\ 25 &= x. \end{aligned}$$

PROBLEMA 9.

Dani es un hábil artesano que crea hermosas manillas utilizando hilos y pepas de colores. Para un evento, le piden elaborar manillas para niños y para adultos, usando únicamente pepas blancas o negras del mismo tamaño, con una pepa seguida de la otra en un hilo rojo. Dani tiene suficientes pepas y calcula que las manillas para niños deben tener 3 pepas menos que las de adultos. Si la cantidad de manillas diferentes que puede crear para adultos excede en 112 a la cantidad de manillas diferentes que puede crear para niños, ¿cuántas pepas tiene una manilla de adulto?

Solución: Primero, observemos cuántas manillas diferentes se pueden fabricar con n pepas. Como las pepas pueden ser blancas o negras, cada pepa de la manilla puede elegirse de 2 formas diferentes. Por el principio multiplicativo, tenemos que hay 2^n manillas diferentes con n pepas.

Ahora, definamos a como el número de pepas que tiene cada manilla de adulto y c como el número de pepas que tiene cada manilla de niño. Entonces, $a - c = 3$, es decir, $a = c + 3$. La cantidad de manillas diferentes para adultos es 2^a y para niños es 2^c. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 2^a - 2^c &= 112, \\ 2^{c+3} - 2^c &= 112, \\ 2^c(2^3 - 1) &= 112, \\ 2^c &= 16, \\ c &= 4. \end{aligned}$$

Entonces, el número de pepas que tiene una manilla de adulto es $a = c + 3 = 4 + 3 = 7$.

3.3. Prueba Final

Problema 1.

Liss se encuentra en un dilema. En la tienda *Galaxia Gamer* ofrecen un descuento del $50\,\%$ en una consola de videojuegos que desea comprar. Mientras tanto, en la tienda *Joystick Games Store* tienen una oferta especial en la misma consola: un descuento del $30\,\%$, y si el cliente es seguidor de la tienda en sus redes sociales, se le aplica un descuento adicional del $25\,\%$ sobre el precio ya reducido con el primer descuento. Si Liss sigue a la tienda *Joystick Games Store* en sus redes sociales, ¿en dónde le recomendaría a Liss comprar la consola para obtener el precio más bajo?

Solución: Sea P el precio de la consola. En la tienda *Galaxia Gamer*, Liss pagaría $0{,}5P$. Ahora, en la tienda *Joystick Games Store*, le descuentan el $30\,\%$, es decir, pagaría $0{,}7P$. Pero sobre este valor, le harían un descuento adicional del $25\,\%$, por lo que terminaría pagando $0{,}75(0{,}7P) = 0{,}525P$. Claramente, $0{,}525P$ es mayor que $0{,}5P$. Por lo tanto, deberíamos recomendar a Liss comprar la consola en la tienda *Galaxia Gamer* para que pague el precio más bajo.

Problema 2.

Isabel ha decidido iniciarse en el cultivo de manzanas. En el vivero de árboles frutales de su pueblo, le ofrecen tres variedades de manzanos: la *Golden Delicious*, la *Granny Smith* y la *Red Delicious*. Con el deseo de experimentar y descubrir cuál de estas variedades prosperará mejor en su finca, Isabel ha decidido que comprará al menos un ejemplar de cada tipo. Si planea adquirir un total de 12 manzanos, ¿de cuántas maneras diferentes podría hacer la selección de sus árboles?

Solución: Representamos los 12 árboles de la siguiente manera:

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

y usaremos dos barras para separar los árboles en tres grupos, que corresponden a las tres variedades. Por ejemplo, el siguiente arreglo indica que se compraron 6 manzanos *Golden Delicious*. 3 *Granny Smith* y 3 *Red Delicious*.

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\,|\,\bullet\bullet\bullet\,|\,\bullet\bullet\bullet$$

No están permitidos casos como los que se ilustran a continuación, porque debe comprarse al menos uno de cada variedad:

$$|\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet: \quad \textit{Golden}: 0, \textit{Granny}: 5, \ \textit{Red}: 7.$$

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet||\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet: \quad \textit{Golden}: 6, \textit{Granny}: 0, \ \textit{Red}: 6.$$

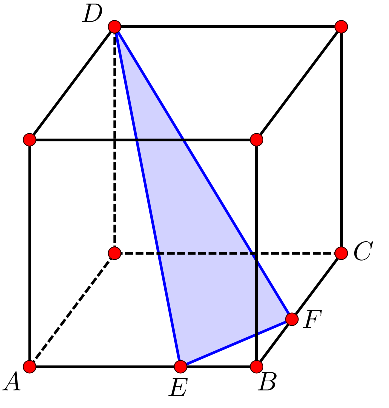
Para contar de cuántas formas pueden comprarse los árboles, note que en total hay 11 espacios donde pueden ir las 2 barras y cada caso diferente está determinado por la posición de las barras. Luego, se trata de contar de cuántas formas podemos ubicar las 2 barras en las 11 posiciones, y esto se puede hacer de

$$\binom{11}{2} = 55$$

formas diferentes[2]. Por lo tanto, el número de formas en que Isabel puede comprar sus 12 árboles es 55.

Problema 3.

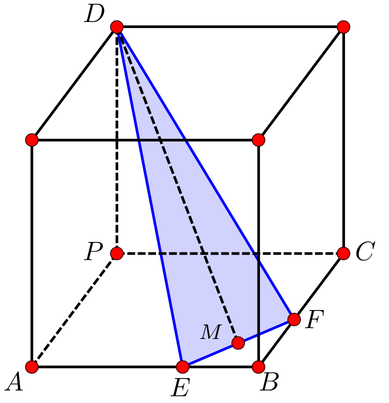
En la figura se muestra un cubo con volumen $512\,cm^3$. Si $\dfrac{AE}{EB} = 3$ y $BF = BE$, ¿cuál es el área del triángulo DEF?



Solución: Dado que el volumen del cubo es $512 = 8^3\,cm^3$, entonces cada lado del cubo mide $8\,cm$. Además, como $\dfrac{AE}{EB} = 3$, esto es $AE = 3EB$, entonces

[2] Recuerde que el coeficiente binomial, denotado como $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, donde $0 \leq k \leq n$, representa el número de formas en que se pueden elegir k elementos de un conjunto con n elementos, sin repetición y sin importar el orden.

$AE = 6\,cm$ y $EB = 2\,cm$. El triángulo EDF es isósceles en D, pues $BF = BE$. Considere la siguiente figura en la que se ha trazado la altura $\overline{DM}$ del triángulo EDF.



Note que M es el punto medio de $\overline{EF}$ pues el triángulo EDF es isósceles. Aplicando el Teorema de Pitágoras a los triángulos EBF, PAE, DPE y DME, respectivamente, obtenemos:

$$EF = \sqrt{EB^2 + BF^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}\,cm.$$
$$PE = \sqrt{PA^2 + AE^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10\,cm.$$
$$DE = \sqrt{DP^2 + PE^2} = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164}\,cm.$$
$$DM = \sqrt{DE^2 - EM^2} = \sqrt{\left(\sqrt{164}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2} = \sqrt{162}\,cm.$$

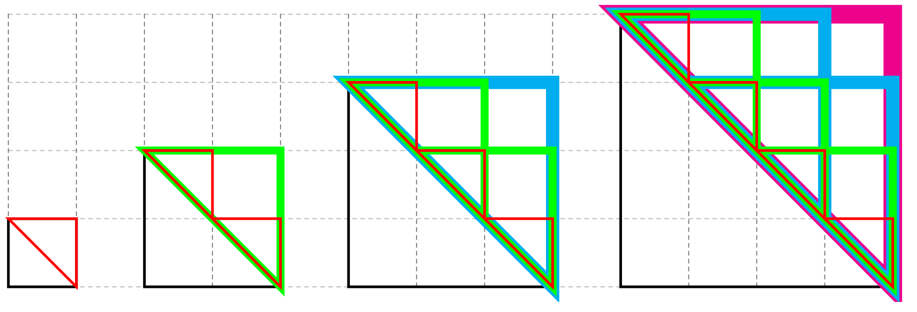
Finalmente, el área del triángulo DEF está dada por:

$$\frac{EF \times DM}{2} = \frac{\sqrt{8}\,cm \times \sqrt{162}\,cm}{2} = \frac{36\,cm^2}{2} = 18\,cm^2.$$

PROBLEMA 4.

Mateo tiene una hoja cuadrada que ha cuadriculado de tal manera que utiliza n cuadraditos, de $1\,cm$ de lado, por cada lado de la hoja. Posteriormente, traza una diagonal de la hoja, resultando en la creación de 56 triángulos. ¿Cuál es el valor de n?

Solución: Contemos cuántos triángulo se forman al trazar la diagonal de una cuadrícula $n \times n$ para los primeros valores de n :



En la figura solo se resaltaron los triángulo que se forman por encima de la diagonal, pero por simetría sabemos que debajo de la diagonal hay la misma cantidad, por lo tanto contaremos los que hay por encima de la diagonal y los multiplicaremos por $2:$

n	Número de triángulos
1	$2 \times (1) = 2$
2	$2\,(1+2) = 6$
3	$2\,(1+2+3) = 12$
4	$2\,(1+2+3+4) = 20$
$\vdots$	$\vdots$
n	$2\,(1+2+3+4+\cdots+n) = 2\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+1)$

De modo que si Mateo obtuvo $56 = 7 \times 8$ triángulos, el número de cuadraditos de cada lado de la hora es $n = 7$.

PROBLEMA 5.

Sara afirma que "Si tomas cualquier número primo mayor o igual a 5, lo multiplicas por sí mismo y luego le restas uno, el resultado siempre será un múltiplo 24" ¿Es cierto o falso lo que afirma Sara? Justifique su respuesta.

Solución: Sea p un número primo mayor o igual a 5. Observemos que

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1).$$

Dado que p es un número primo mayor o igual a 5, sabemos que p es impar, es decir, $p = 2k+1$, siendo k un entero mayor o igual a 2. Entonces,

$$p^2 - 1 = (2k+1-1)(2k+1+1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1).$$

Como k y $k+1$ son enteros consecutivos, uno de ellos debe ser par. Por lo tanto, $p^2 - 1 = 4k(k+1) = 4 \times 2t = 8t$, es múltiplo de 8.

Por otro lado, notemos que $p-1$, p, y $p+1$ son enteros consecutivos, luego uno de ellos debe ser múltiplo de 3. Dado que p es un número primo mayor o igual a 5, no es múltiplo de 3. Por lo tanto, $p-1$ o $p+1$ debe ser múltiplo de 3. Así, $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ es múltiplo de 3.

En resumen, como hemos demostrado que p^2-1 es múltiplo de 8 y también múltiplo de 3, podemos concluir que $p^2 - 1$ es múltiplo de $8 \times 3 = 24$.

Problema 6.

Daniel tiene dos láminas cuadradas, una de ellas con una perforación en forma de cuadrado $ABCD$, cuya área es de $169\,cm^2$ y cuyos lados son paralelos a los lados de la lámina, como se muestra en las figuras 1 y 2. Luego une las láminas por uno de sus lados, formando entre ellas un ángulo de $60°$, como se muestra en la figura 3. ¿Cuál es el área del polígono que se proyecta en la lámina no perforada cuando entran rayos luminosos perpendiculares a esta lámina, a través de la perforación $ABCD$, en el arreglo que se muestra en la figura 3?

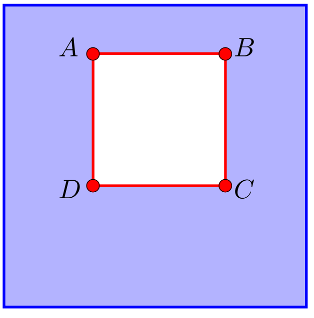


Figura 1.

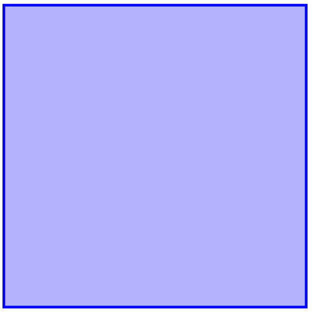


Figura 2.

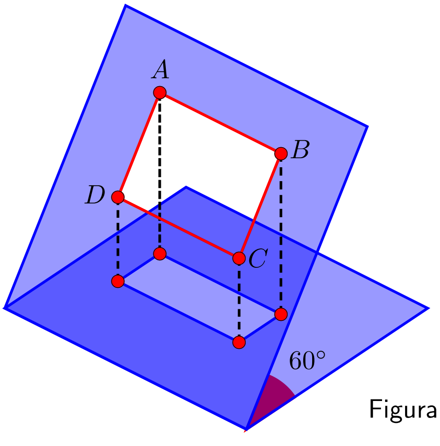
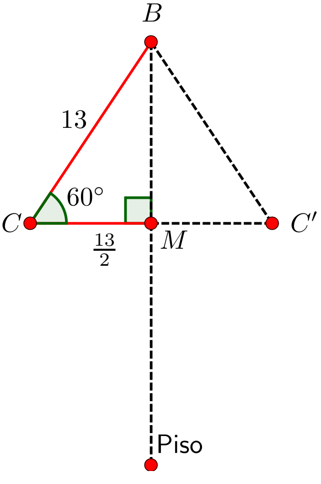


Figura 3.

Solución: Dado que el área del cuadrado $ABCD$ es $169\,cm^2 = 13^2\,cm^2$, podemos concluir que cada uno de sus lados mide $13\,cm$. Además, debido a que los rayos que entran por la perforación son perpendiculares a la lámina del "piso", la figura proyectada en esta lámina es un rectángulo.

Observamos que la longitud de uno de los lados del rectángulo proyectado coincide con $DC = 13\,cm$. Para determinar la longitud del otro lado, trazamos una perpendicular desde C al segmento punteado que va desde B hasta el "piso", como se muestra en la siguiente figura:



De modo que CM es longitud del otro lado del rectángulo proyectado. Es evidente que el triángulo CBC' es equilátero (note que todos sus ángulos son de $60°$) y M es el punto medio de CC'. Por lo tanto, $CM = \frac{13}{2}\,cm$. En consecuencia, el área del polígono proyectado en la lámina no perforada es:

$$13 \times \frac{13}{2} = \frac{169}{2}\,cm^2.$$

Nota: Otra forma de calcular CM es usando la razón trigonométrica coseno:

$$\begin{aligned}\cos(60°) &= \frac{CM}{BC}\\ \frac{1}{2} &= \frac{CM}{13}\\ \frac{13}{2} &= CM.\end{aligned}$$

O usando la "Ley del seno":

$$\begin{aligned}\frac{BC}{\operatorname{sen}(90°)} &= \frac{CM}{\operatorname{sen}(30°)},\\ \frac{13}{1} &= \frac{CM}{1/2},\\ CM &= \frac{13}{2}.\end{aligned}$$

Apéndice A

Cuadro de Honor

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la Decimoquinta versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Secundaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 7946 participantes del certamen, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

NIVEL BÁSICO

Puesto	Medalla	Participante
1.^{o}		*Esteban Beltrán Madrigal* *Colegio Siglo XXI, Socorro.*
2.^{o}		*Eliel Luciano Sánchez Rojas* *Colegio Niño Jesús de Praga, Girón.*
3.^{o}		*José Miguel Caro López* *Colegio Nuestra Señora del Rosario, Floridablanca.*
4.^{o}		*Carlos Mario Serrano Ortiz* *Colegio Nuestra Señora de La Paz,* *San Vicente de Chucurí.*
5.^{o}		*Camilo Angarita Zambrano* *Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.*

NIVEL MEDIO

Puesto	Medalla	Participante
1.º		*Santiago Mercado Santos* *Aspaen Colegio El Rosario, Barrancabermeja.*
2.º		*Kevin Mojica Castellanos* *Colegio Nuestra Señora de Fátima, Onzaga.*
3.º		*Bellorossme Nhajais Mogollón Padilla* *Institución Educativa Bicentenario de la Independencia de la República de Colombia, Bucaramanga.*
4.º		*Valentina Gutiérrez Pérez* *Colegio Teresiano Reina del Carmelo, Aguachica.*
5.º		*Natalia Rincón Vila* *Gimnasio San Diego, Floridablanca.*

NIVEL AVANZADO

Puesto	Medalla	Participante
1.º		*Iván David Gómez Silva* *Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.*
2.º		*Fayber Arley Becerra Oviedo* *Escuela Normal Superior Francisco de Paula Santander, Málaga.*
3.º		*Daniel Blanco García* *Fundación Colegio UIS, Floridablanca.*
4.º		*Samuel Joel García Roa* *Fundación Colegio UIS, Floridablanca.*
5.º		*María Andrea Torres Rodríguez* *Aspaen Cantillana, Piedecuesta.*

Bibliografía

[1] Bolaños W. *Problemas y Soluciones Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas Universitaria 1998-2019.* Universidad Antonio Nariño y Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[2] Brochero F. y Restrepo J. *Un recorrido por la Teoría de Números.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[3] Burton, D. *Elementary Number Theory*, segunda edición. Brown Publishers, 1989.

[4] Calderón, S., Morales, M. *Analisis Combinatorio*, Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1992.

[5] Castro, J. *Lecciones de matemáticas para biociencias*. Departamento de Matemáticas-Universidad del Valle.

[6] Comellas., Sánchez, Anna., Francesc Fábrega, Josep., Serra, Oriol. *Matemática Discreta*, Edicions UPC, 2001.

[7] García, F. *Un pequeño manual para resolución de problemas*, Priego de cordoba, 2002.

[8] Gómez J., Valdez R. y Vázquez R. *Principio de las Casillas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2011.

[9] Hemmerling E. *Geometría Elemental.* Bakersfield College. Limusa, México, 2009.

[10] Hoyos, D., Perdomo, O. *Geometría Fundamental*. Departamento de Matemáticas-Universidad del Valle, 2006.

[11] JIMÉNEZ L., GORDILLO J. Y RUBIANO G. *Teoría de números para principiantes.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.

[12] MADROÑERO J Y CONTRERAS I. *Un recorrido por el Álgebra.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[13] MINISTERIO DE EDUCACIÓN. *Matemáticas Lineamentos Curriculares: Áreas obligatorias y fundamentales*. Libros & libros S.A., 1998.

[14] ROSEN, K. *Elementary Number Theory*, quinta edición. MgGraw-Hill.

[15] ROSEN, K. *Matemática Discreta y sus aplicaciones*, quinta edición. MgGraw-Hill, 2004.

[16] SERGE, L., GENE, M. *Geometry*, second edition. 1988.

[17] SOBERÓN P. *Combinatoria para olimpiadas* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2010.

[18] RESTREPO P. *Un recorrido por la Combinatoria I.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

Enlaces de interés

1. Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS
   Pruebas anteriores:
   http://matematicas.uis.edu.co/?q=olimpiadas-secundaria
   Cartillas de los años anteriores:
   http://matematicas.uis.edu.co/?q=descargas
   Página de facebook:
   https://web.facebook.com/OlimpiadasRegionalesDeMatematicasUis
2. Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
   https://www.acmven.org/pruebas/
3. CanadaMath, canal de youtube
   https://www.youtube.com/channel/UCPjak7r62HVJ6rvgsu2xoFA
4. International Mathematical Olympiad (IMO)
   http://www.imo-official.org/problems.aspx
5. Olimpíada Brasileira de matemática das escolas públicas
   http://www.obmep.org.br/banco.htm
6. Olimpiada Matemática Argentina,
   Problemas Semanales: https://www.oma.org.ar/problemas/index.php
   Archivo de enunciados: https://www.oma.org.ar/enunciados/index.htm#omn
   Simulacros en línea: https://www.oma.org.ar/canguro/problemas.html
7. Olimpiada Mexicana de Matemáticas
   https://www.ommenlinea.org/material-de-entrenamiento/introductorio/
8. Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Baja California
   http://ommbc.org/sitio/#/entrenate
9. Olimpiada Panameña de Matemáticas
   https://opm.org.pa/recursos/

10. Olimpiadas de Matemáticas, página de preparación y problemas
http://wpd.ugr.es/~jmmanzano/preparacion/problemas.php
11. Olimpiadas Matemáticas de la Universidad de Antioquia.
https://www.olimpiadasudea.co/matematicas/talleres.html
12. Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico
http://om.pr/
13. Olimpíadas Portuguesas de Matemática
http://olimpiadas.spm.pt/index.php?id=69&tipo=1
14. Olimpíada Brasileira de Matemática
https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/
15. Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño
https://orm.udenar.edu.co/?page_id=1612
16. Toomates Coolección
http://www.toomates.net/