TERCERA CAPACITACIÓN NIVEL AVANZADO

Olimpiadas Regionales de Matemáticas-Secundaria

Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Grupo Edumat

Bucaramanga, mayo 28 de 2021

SCAN ME

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

Teoría de conteo

1. **Principio de las casillas:** Pensemos en una cantidad k de categorías, que pueden ser colores, tamaño, formas, entre otros, entonces, si tenemos $k+1$ objetos, existirá alguna categoría que tenga al menos dos objetos. La prueba es sencilla, pues sí se coloca cada objeto en una categoría (casilla) de manera que nunca coloquemos dos en la misma, terminaremos con un objeto que sobra y todas las casillas llenas. Ese objeto que sobra, al colocarlo, debe estar en alguna categoría; pero ya todas tienen un objeto. Por lo tanto, habrá alguna categoría que tenga dos (al menos) categorías. A esto se le conoce como la versión débil de casillas.

Teoría de conteo

2. Versión débil del Principio de casillas : Si se tienen n casillas y al menos $n+1$ objetos, entonces existe al menos una casilla con dos o más objetos.

3. Versión fuerte del Principio de casillas: Si se tienen n casillas y al menos $nk+1$ objetos, entonces existe al menos una casilla con $k+1$ o más objetos.

Teoría de conteo

2. Versión débil del Principio de casillas : Si se tienen n casillas y al menos $n+1$ objetos, entonces existe al menos una casilla con dos o más objetos.

3. Versión fuerte del Principio de casillas: Si se tienen n casillas y al menos $nk+1$ objetos, entonces existe al menos una casilla con $k+1$ o más objetos.

Teoría de conteo

4. Versión del promedio: Si $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son números positivos y a es el promedio de ellos, entonces existe algún a_i con $a_i \leqslant a$. Además, existe algún a_j con $a_j \geqslant a$.

Ejercicios:

1. Supongamos que tenemos 27 números impares menores que 100. Entonces hay al menos un par de ellos cuya suma es 102.

Teoría de conteo

4. Versión del promedio: Si $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son números positivos y a es el promedio de ellos, entonces existe algún a_i con $a_i \leqslant a$. Además, existe algún a_j con $a_j \geqslant a$.

Ejercicios:

1. Supongamos que tenemos 27 números impares menores que 100. Entonces hay al menos un par de ellos cuya suma es 102.

Principio de las casillas

Solución: Hay 50 números impares menores que 100, y 48 de ellos forman parejas cuya suma es 102 : $(3, 99), (5, 87), \cdots, (49, 53)$. Cada una de estas parejas será uno de nuestros nidos. Además, consideramos otros dos nidos, formado cada uno de ellos por los números que no tienen pareja: 1 y 51. En total hay 26 nidos. Como tenemos 27 números (las palomas), dos de ellos serán del mismo nido, y tiene que ser de uno de los 24 primeros, así que esos dos números sumarán 102.

Principio del palomar

2. Los pesos de tres chivos son números enteros distintos. En total pesan 97 kg. ¿Cuánto puede pesar como máximo el que menos pesa?

Principio del palomar

Solución: $33 + 34 + 35 = 102$ y $32 + 33 + 34 = 99$ superan el peso.
$31 + 32 + 33 = 96$ es aceptable, por ejemplo, $31 + 32 + 34 = 97$.

Principio del palomar

3. ¿Cuántas personas hay que reunir para asegurar que hay al menos dos que tengan nombres con la misma inicial?

Principio de las casillas

Solución: Aquí el conjunto de casillas son las 27 letras del abecedario. Por lo tanto, si tenemos 28 personas y las colocamos en las casillas, seguro que habrá al menos dos ocupando una misma casilla, es decir, tendrán nombres con la misma inicial. Si solo hubiera 27 podría darse el caso de que todas tuvieran nombres con iniciales diferentes

Principios del Palomar

4. ¿Cuántas personas hay que reunir para asegurar que hay al menos seis que tengan nombres con la misma inicial?

Principio de las casillas

Solución: Si tenemos $27 \cdot 5 = 135$ personas, podría darse el caso de que hubiese 5 personas en cada una de las 27 letras (casillas). Luego llamando a una más, es decir, con 136 personas, garantizamos que al menos en una de las casillas hay un mínimo 6 personas, es decir, que hay al menos 6 personas con la misma inicial.

Principio del palomar

5. ¿Cuántas sumas diferentes de puntos puedes obtener tirando tres dados simultáneamente?

Principio de las casillas

Solución: Dado que al lanzar los tres dados simultáneamente, la suma máxima de puntos es 18 , y que no es posible encontrar la suma 1 y 2, mientras que las demás $3, 4, 5, \cdots, 18$ si son posibles, se tienen en total 16 sumas diferentes de puntos.

Principio del palomar

6. Se escriben los números $1, 2, 3$ y 4 en celdas diferentes de una tabla 2×2. Luego se calcula la suma de los números de cada fila y de cada columna. Dos de estas sumas son 4 y 5. ¿Cuáles son las otras dos sumas?

Principio de las casillas

Solución: Conforme a la tabla

1	4
3	2

se tiene que $1+4=5$ y $4+2=6$, por lo tanto las otras dos sumas son 5 y 6.

Principio del palomar

7. Un parque tiene cinco puertas. Mónica quiere entrar por una puerta y salir por otra distinta. ¿De cuántas maneras puede entrar y salir del parque?

Principio de las casillas

Solución: Dado que Mónica puede entrar por las 5 puertas pero sólo puede salir por 4 tendrá $5 \cdot 4 = 20$, maneras de entrar y salir del parque.

Teoría de conteo

8. Una caja contiene 20 bolas rojas, 20 bolas verdes, 19 bolas amarillas, 13 bolas azules, 11 bolas blancas y 9 bolas negras. ¿Cuál es el mínimo de bolas que debemos tomar de la caja, sin reemplazar, para garantizar que sacaremos como mínimo 15 bolas del mismo color?

Teoría de conteo

Solución: Poniéndonos en el peor de los casos, podríamos sacar 13 bolas azules, 11 bolas blancas y 9 bolas negras, 33 bolas en total, y no habríamos sacado 15 del mismo color. Además, podríamos sacar 14 bolas rojas, 14 bolas verdes y 14 bolas amarillas (en total 75) y seguiríamos sin haber sacado 15 bolas del mismo color. Pero entonces, con una más, seguro que hay 15 rojas, verdes o amarillas. La solución es 76.

Teoría de Conteo

9. Determina el número de subconjuntos de $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ que contienen al menos un número primo.

Teoría de conteo

Solución: Hay en total 2^8 subconjuntos, y que no contengan ninguno de los 4 primos son 2^4 , y por tanto los que sí contienen alguno de los 4 primos son $2^8 - 2^4 = 256 - 16 = 240$.

Referencias Bibliográficas

1. https://www.youtube.com/results?search$_q$*uery* = *cuantas* + *personas* + *tienen* + *el* + *mismo* + *numero* + *de* + *pelos* + *en* + *logroño*

2. Romo-Garrido, Gerard; *Combinatoria, Enfoque Problem-Solving*, Colección Tomates, 2021.

3. http://ommbc.org/, Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Baja California 2016.

GRACIAS!!!

Universidad
Industrial de
Santander