Tercera Capacitación

Olimpiadas Regionales de Matemáticas-Secundaria

Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Grupo Edumat

Bucaramanga, abril 2 de 2022

SCAN ME

Informes:
`olimpiadas.matematicas@uis.edu.co`
Tel.: 6344000 *ext.* 2316.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

METODOLOGÍA

NIVELES

Básico: para estudiantes de 6° y 7°.

Medio: para estudiantes de 8° y 9°.

Avanzado: para estudiantes de 10° y 11°.

FASES

1. Capacitaciones.
2. Prueba Clasificatoria.
3. Prueba Selectiva.
4. Prueba Final.
5. Entrenamientos.

FASES

CAPACITACIONES

- 3 talleres gratuitos de capacitación para docentes y estudiantes.

PRUEBA CLASIFICATORIA

- Participan los estudiantes inscritos.
- **Modalidad virtual ó presencial,** en la plataforma Moodle.
- Consta 9 problemas de selección múltiple con única respuesta.

FASES

PRUEBA SELECTIVA

- Participan los estudiantes clasificados por alguno de los siguientes criterios:

  Criterio 1. el estudiante pertenece al conjunto del 10% de los estudiantes que obtuvieron los mejores puntajes en la Prueba Clasificatoria.

  Criterio 2. si alguna institución participante no alcanzó la clasificación del 10% de los estudiantes participantes, el Comité Organizador clasifica a los restantes estudiantes, para completar el 10% de clasificación en cada nivel.

- **Modalidad presencial**, en las sedes regionales (Barbosa, Barrancabermeja, Bucaramanga, Málaga, Socorro, UFPS-Ocaña).

FASES

PRUEBA FINAL

- Participan los estudiantes clasificados por alguno de los siguientes criterios:

  Criterio 1. el estudiante pertenece al conjunto de los 20 estudiantes con los mejores puntajes en la prueba selectiva de cada nivel.

  Criterio 2. si un municipio no tiene representación por el criterio 1, el Comité otorga el título de Estudiante Finalista al participante del municipio con el mejor puntaje en la prueba de selectiva.

- **Modalidad presencial**, en las instalaciones de la UIS-Bucaramanga.

ENTRENAMIENTOS

A los estudiantes finalistas se les ofrecerá una preparación especial con el ánimo que participen en otras competencias de matemáticas.

ESTÍMULOS

- MENCIÓN DE HONOR para los estudiantes clasificados de cada nivel en primera prueba.
- DIPLOMA DE FINALISTA
- PREMIOS para los 5 mejores puntajes de cada nivel en la prueba final.

FECHAS IMPORTANTES

INSCRIPCIONES

del 15 de febrero al 9 de abril de 2022.

PRUEBAS

Prueba Clasificatoria: semana del 2 al 6 de mayo.

Prueba Selectiva: jueves, 26 de mayo.

Prueba Final: sábado, 16 de julio.

PROCESO DE INSCRIPCIÓN

1. Diligenciar el formulario de Google del siguiente enlace: `https://forms.gle/1S6bwfBGVdDgJ5Fo9`
2. El número mínimo de estudiantes inscritos por institución debe ser 10.

VALOR DE LA INSCRIPCIÓN POR ESTUDIANTE:

- 8.500 para grupos de 10 a menos de 40 estudiantes.
- 7.500 para grupos de 40 a 499 estudiantes.
- 7.000 para grupos de más de 499 estudiantes.

CONTACTO

Correo electrónico: olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Teléfonos: 6344000, Ext: 2316

Página de Facebook: Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

OTROS GRUPOS DE EDUMAT-UIS

SEMILLERO MATEMÁTICO

Correo electrónico: semillero@matematicas.uis.edu.co

Teléfono: 6344000, Exts: 2316.

CALENDARIO MATEMÁTICO

Correo electrónico: calendariomatematico2011@gmail.com

Teléfonos: 6344000, Exts: 2316. - 3125586597 (Daniel Moreno)

Nivel Básico

Problema #1

Un marciano tiene infinitos calcetines rojos, azules, amarillos y negros en un cajón.

(a) Si el marciano tiene los ojos vendados, ¿cuántos calcetines debe sacar del cajón, como mínimo, para estar SEGURO de obtener un par con el mismo color?

(b) Si el marciano tiene 6 pies, ¿cuántos calcetines, como mínimo, debe sacar del cajón, con los ojos vendados, para estar SEGURO de obtener uno para cada uno de sus pies, todos del mismo color?

Solución

(a) Dado que el marciano tiene calcetines suficientes de cuatro colores, por el principio del Palomar, debe extraer como mínimo 5 calcetines para estar seguro de obtener un par del mismo color.

(b) El marciano debe extraer $5 \times 4 + 1 = 21$ calcetines, para estar seguro de obtener 6 con el mismo color.

Nivel Básico

Problema #2

La clave del celular de Sara es un número de cuatro cifras, múltiplo de 5, cuyo primer dígito (de izquierda a derecha) es impar. ¿Cuántos de estos números hay?

Solución

Dado que la primera cifras es impar, entonces esta se puede escoger de 5 formas, además el número es múltiplo de 5, entonces termina en 0 o 5, de modo que la cifra de las unidades se puede escoger de 2 formas. Las cifras de las decenas y de las centenas no tienen condiciones, luego se pueden escoger, cada una, de 10 formas. Por lo anterior la cantidad de números que cumplen las condiciones es:

$$\underbrace{5\ opciones}_{\text{Und. mil}} \times \underbrace{10\ opciones}_{\text{centenas}} \times \underbrace{10\ opciones}_{\text{decenas}} \times \underbrace{2\ opciones}_{\text{unidades}} = \underbrace{5 \times 10 \times 10 \times 2 = 1000.}_{\text{cantidad de números}}$$

Nivel Básico

Problema #3

En una olimpiada de matemáticas participan 50 estudiantes. ¿De cuántas maneras se pueden dar los tres primeros lugares, si no hay empates?

Solución

El número de formas en que se pueden dar los tres primeros lugares está dado por:

$$\underbrace{50 \ opciones}_{\text{Primer Lugar}} \times \underbrace{49 \ opciones}_{\text{Segundo Lugar}} \times \underbrace{48 \ opciones}_{\text{Tercer Lugar}} = \underbrace{50 \times 49 \times 48 = 117600.}$$

Problema #4

Muestre que, si se eligen cinco números enteros diferentes del 1 al 8, dos de ellos deben sumar nueve.

Solución

Sabemos que nueve se puede escribir como

$$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5.$$

De este modo, en el "peor de los casos", al escoger 4 números enteros diferentes del 1 al 8 tendríamos $\{1, 2, 3, 4\}$ o $\{5, 6, 7, 8\}$
Así, al seleccionar el quinto número necesariamente este debe sumar 9 con alguno de los ya escogidos.

Nivel Medio

Problema #5

Suponga que las letras del abecedario están organizadas de manera aleatoria una seguida de la otra, en fila.

(a) Muestre que debe haber cuatro consonantes consecutivas.

(b) Si las letras están organizadas una seguida de la otra en el borde de un círculo. Muestre que al menos cinco consonantes son consecutivas.

Solución

(a) Considere los espacios que hay entre las vocales

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_ v_1 \_\_\_\_\_\_\_\_\_ v_2 \_\_\_\_\_\_\_\_\_ v_3 \_\_\_\_\_\_\_\_\_ v_4 \_\_\_\_\_\_\_\_\_ v_5 \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Note que hay 6 espacios, y en total hay 22 consonantes, por lo tanto en alguno de estos espacios habrá al menos 4 consonantes. cumpliéndose que hay 4 consonantes seguidas.

(b) Siguiendo las ideas del inciso anterior, al ubicar las 5 vocales en el borde de un círculo, estas establecen 5 espacios, y dado que son 22 consonantes, entonces en algún espacio deben caer al menos 5 consonantes.

Nivel Medio

Problema #6

Sara debe elegir un número de cuatro cifras tal que el producto de las cifras de ese número sea par. ¿Cuántos números así hay?

Solución

El total de números de cuatro cifras está dado por:

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000.$$

Ahora, note que el producto de las cifras de un número es par, si alguna de las cifras es par. Vamos a calcular en cuántos de los números de cuatro cifras, NINGUNA de sus cifras es par, es decir los formados solamente por los dígitos $1, 3, 5, 7$ y 9; estos son: $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$. Por lo tanto, hay $9000 - 625 = 8375$ números tales que ALGUNA de sus cifras es par y por lo tanto el producto de sus cifras también es par.

Nivel Medio

Problema #7

Oscar tiene una bolsa con ocho lápices que solo se pueden distinguir por su color. Tiene cinco azules y tres rojos. Susana le pide prestado los tres rojos y a Oscar se le ocurre un juego. Susana debe sacar un lápiz a la vez de la bolsa con los ojos cerrados, hasta que tenga los tres lápices rojos. Oscar le regalará los tres lápices rojos si logra sacarlos **justo** antes de extraer el sexto lápiz. ¿De cuántas formas puede ganar el juego Susana?

Solución

Como Susana debe extraer los tres lápices rojos justo antes de sacar el sexto lápiz, entonces tiene que suceder que su quinto lápiz debe ser el tercer rojo. Por ejemplo, si denotamos por R la extracción de un lápiz rojo y por A la de uno azul, entonces un posible resultado del juego es $RRAAR$. Note que necesariamente deben haber dos lápices azules. Para dar la respuesta solo debemos contar de cuántas formas podemos organizar las dos letras A y las dos letras R, porque la quinta tiene que ser una R. Es decir, no es posible el resultado $ARRRA$ porque en la cuarta extracción ya obtuvo sus lápices rojos. Recuerde que los lápices solo se pueden distinguir por su color. Los posibles resultados son:

$$RRAAR, \quad AARRR, \quad ARARR, \quad ARRAR, \quad RAARR, \quad RARAR.$$

Observación interesante: cuando queremos ordenar n elementos que se repiten, o que no podemos distinguir porque a son de un tipo y b son de un segundo tipo, con $a + b = n$, entonces el número de posibles ordenamientos es $\dfrac{n!}{a! \cdot b!}$, donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Esto se puede generalizar a más de dos tipos de elementos.

Fórmula de Herón

Si a, b y c son las longitudes de los tres lados de un triángulo, entonces el área de dicho triángulo está dada por:

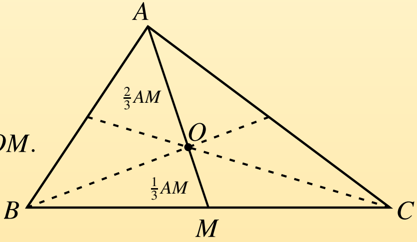
$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \ \text{ donde } \ s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Teoremas sobre Medianas

1. Al trazar una de las medianas de un triángulo, éste queda dividido en dos triángulos de igual área.
2. Dos tercios de la longitud de cada mediana están entre el vértice y el baricentro, mientras que el tercio restante está entre el baricentro y el punto medio del lado opuesto.

En la figura, $\overline{AM}$ es una mediana del triángulo ABC y O es el baricentro. Entonces

$$AO = \frac{2}{3}AM, \;\; OM = \frac{1}{3}AM \text{ y } AO = 2OM.$$

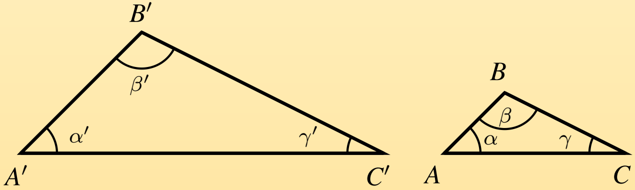


Además, el área del triángulo ABM es igual al área del triángulo AMC.

Teorema de Tales

Si los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, lo cual denotaremos por $ABC \sim A'B'C'$, entonces

$$\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma' \ \text{ y } \ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$



Desigualdad triangular

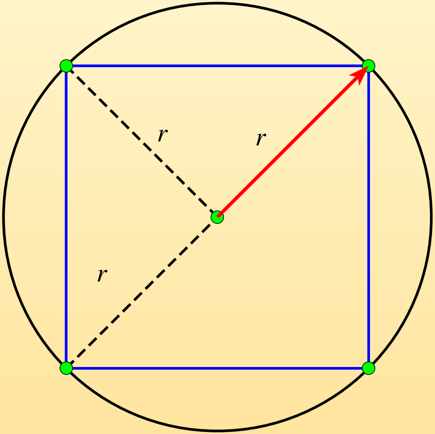
En todo triángulo, la suma de las longitudes de dos de sus lados siempre es mayor que la medida del tercero.

Problema #8

Un cuadrado está inscrito en una circunferencia de radio r. Halle el área y el perímetro del cuadrado en términos de r.

Solución

Considere la siguiente figura



Dado que el cuadrado está inscrito en un círculo de radio r, entonces su diagonal, coincide con el diámetro del círculo, esto es $2r$. Dividiendo el cuadrado por una de sus diagonales obtenemos dos triángulos con base $2r$ y altura r, luego su área es $\dfrac{2r \times r}{2} = r^2$, por lo tanto el área del cuadrado es $A = 2r^2$.
Por otro lado, dado que la longitud del lado del cuadrado es $l = r\sqrt{2}$, se tiene que el perímetro está dado por $p = 4r\sqrt{2}$.

Nivel Avanzado

Problema #9

A cierta hora del día un edificio de 95 m de altura proyecta una sombra de 551 m. Si la sombra de un hombre, a esta misma hora, mide 11.60 m, ¿cuál es su estatura?

Solución

Del teorema de Tales se sigue que:

$$\frac{95}{551} = \frac{h}{11,6},$$

donde h es la altura del hombre. De ahí que $h = \dfrac{95 \times 11.6}{551} = 2$ metros.

Nivel Avanzado

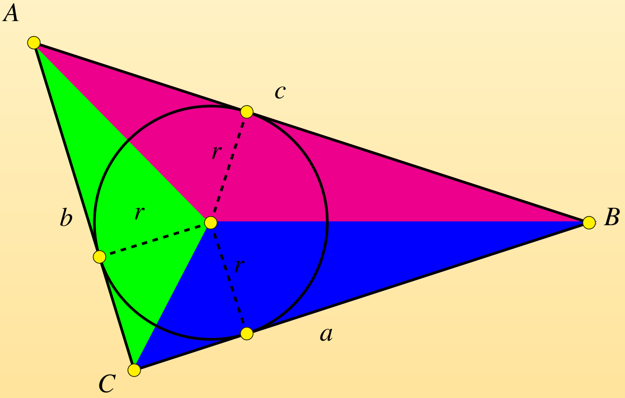
Problema #10

Sean a, b y c las medidas de los lados de un triángulo. Muestre que si r es el radio de su *incírculo*, entonces el área de dicho triángulo está dada por

$$A = s \cdot r, \quad \text{donde} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Solución

Dado que el incírculo es tangente al triángulo, sus radios son perpendiculares a los lados del triángulo. Trazando los segmentos desde el centro del incírculo hasta los vértices del triángulo, este queda divido en tres triángulos, como se muestra en la figura.



Así, el área A del triángulo ABC será la suma de las áreas de los triángulos en que queda particionado, esto es:

$$A = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = s \cdot r,$$

donde s es el semiperímetro $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

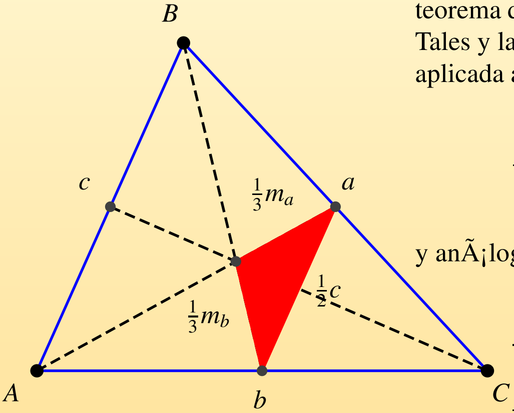
Nivel Avanzado

Problema #11

Sean a, b y c las longitudes de los lados del triángulo ABC, y m_a, m_b, m_c las longitudes de sus tres medianas. Demuestre que

$$\frac{3}{4} < \frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} < 1.$$

Solución



Teniendo en cuenta el segundo teorema de medianas, el teorema de Tales y la desigualdad triangular aplicada al triángulo rojo, se obtiene:

$$\frac{1}{3}m_a + \frac{1}{3}m_b > \frac{1}{2}c,$$

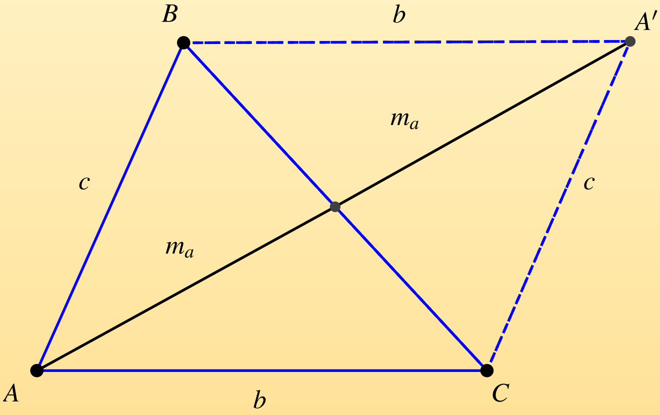
y anÃ¡logamente,

$$\frac{1}{3}m_a + \frac{1}{3}m_c > \frac{1}{2}b,$$
$$\frac{1}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c > \frac{1}{2}a.$$

Sumando estas tres desigualdades tenemos:
$\dfrac{2}{3}(m_a + m_b + m_c) > \dfrac{a+b+c}{2}$, esto es

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c \tag{1}$$

Por otro lado, considere la siguiente figura:



Por la desigualdad triangular, aplicada al triángulo ACA' se tiene que

$$b + c > 2m_a.$$

Análogamente,

$$a + b > 2m_c,$$
$$a + c > 2m_b.$$

Sumando estas desigualdades se obtiene $2(a+b+c) > 2(m_a + m_b + m_c)$, esto es:

$$a + b + c > m_a + m_b + m_c \tag{2}$$

Finalmente de las desigualdades (1) y (2) se obtiene:

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a + b + c,$$
$$\frac{3}{4} < \frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} < 1.$$

¡GRACIAS!

Universidad
Industrial de
Santander