

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
X Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Primaria-2021

PRUEBA FINAL

A continuación se presenta el banco de preguntas de la Prueba Final de las X Olimpiadas Regionales de Matemáticas-Primaria. En cada nivel, las preguntas P1. a P3. tenían una valoración máxima de 5 puntos cada una y eran tipo ensayo, es decir que los concursantes debían exponer todas sus ideas y argumentos por escrito, con claridad y exhaustividad; mientras que las preguntas P4. a P6. tenían una valoración máxima de 3 puntos y eran de respuesta corta, es decir que los concursantes debía escribir únicamente la respuesta en el recuadro indicado (estas respuestas no era necesario justificarlas).

Prueba Final del Nivel BÁSICO

- P1. Ana escribe todos los números naturales desde el 1 hasta el 100, Bruno calcula el producto de las cifras para cada uno de estos números y Camila suma los resultados que obtuvo Bruno. ¿Cuál es el resultado que obtuvo Camila?

Solución: La suma de los productos de las cifras de los números del 1 al 10 es 45 y la suma de los productos de las cifras del 11 al 20 es la misma.

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Producto cifras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Números	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Producto cifras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Ahora, note que la suma de los productos de las cifras de los números del 21 al 30 es el doble de la suma de los productos de las cifras del 1 al 10, es decir $2 \times 45 = 90$.

Números	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Producto cifras	2	4	6	8	10	12	14	16	18	0

te que la suma de los productos de las cifras de los números del 31 al 40 es el triple de la suma de los productos de las cifras del 1 al 10, es decir $3 \times 45 = 135$.

Continuando de este modo tenemos que la suma de los productos de las cifras de los números

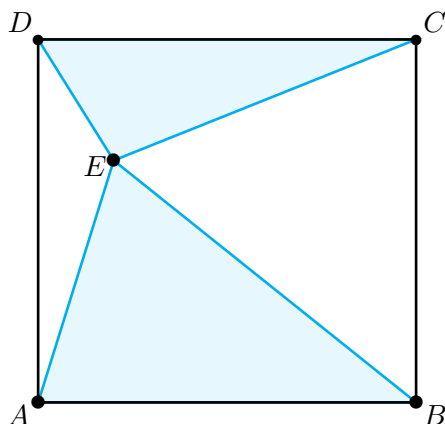
- del 41 al 50 es $4 \times 45 = 180$
- del 51 al 60 es $5 \times 45 = 225$
- del 61 al 70 es $6 \times 45 = 270$
- del 71 al 80 es $7 \times 45 = 315$
- del 81 al 90 es $8 \times 45 = 360$
- del 91 al 100 es $9 \times 45 = 405$

Por lo tanto, el resultado que obtuvo Camila es

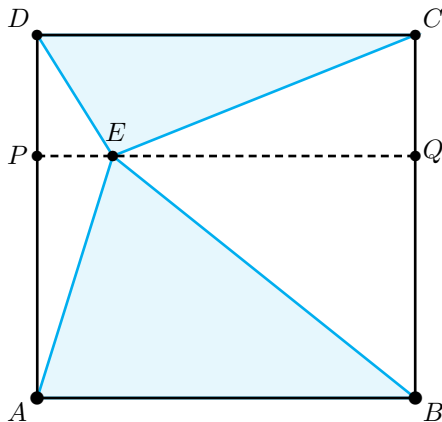
$$45 + 45 + 90 + 135 + 180 + 225 + 270 + 315 + 360 + 405 = 2070,$$

o lo que es lo mismo: $46 \times 45 = 2070$.

P2. El área del cuadrado $ABCD$ es 30 cm^2 . La altura del triángulo ABE respecto a $\overline{AB}$ es el doble de la altura del triángulo ECD respecto a $\overline{CD}$. ¿Cuánto es el área del triángulo CDE en centímetros cuadrados?

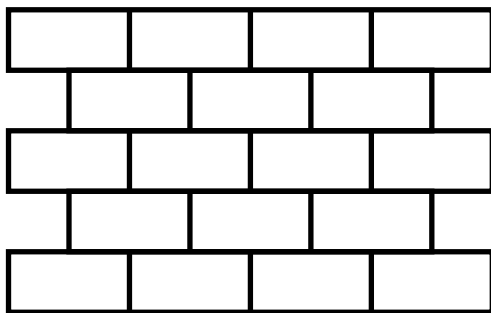


Solución: Consideremos el segmento $\overline{PQ}$ paralelo a $\overline{AB}$ que pasa por E , como se muestra a continuación:



El cuadrado $ABCD$ queda dividido en dos rectángulos, $CDPQ$ de área 10 cm^2 y $ABQP$ de área 20 cm^2 , estas áreas las conocemos pues el área de $ABCD$ es 30 cm^2 y el área de $ABQP$ es el doble del área de $CDPQ$ ya que la altura de ABE respecto a $\overline{AB}$ es el doble de la altura de ECD respecto a $\overline{CD}$. Finalmente, el área de ECD es la mitad del área de $CDPQ$ pues la altura de ECD respecto a $\overline{CD}$ es CQ , por lo tanto el área de ECD es 5 cm^2 .

- P3. Hermes debe construir un muro con 18 bloques como se muestra a continuación:



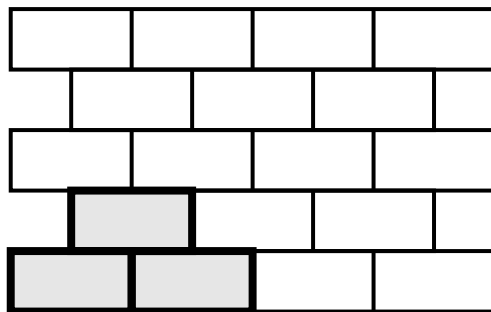
Para ello dispone de bloques de tres colores: amarillo, azul y rojo. Los bloques amarillos cuestan \$900, los azules \$1000 y los rojos \$800. Si desea que en el muro cada bloque tenga color diferente al de sus bloques vecinos,

- (a) ¿de cuántas formas puede elegir los colores de cada bloque en el muro?

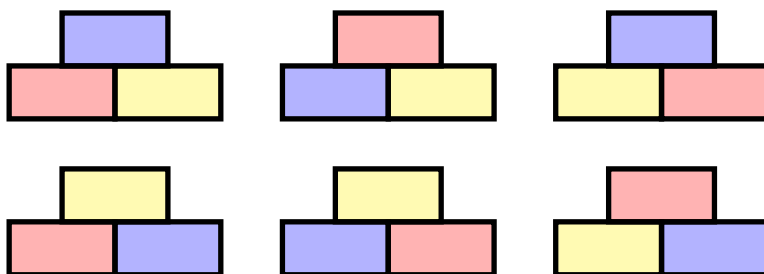
- (b) ¿cuál es la mínima cantidad de dinero que necesita Hermes para comprar los bloques necesarios para la construcción del muro?

Solución:

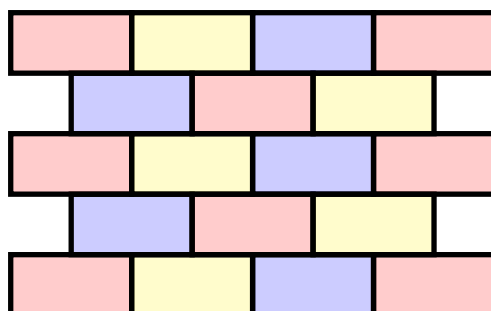
- (a) Observe que, basta elegir el color de los ladrillos resaltados a continuación, pues una vez se eligen los colores de estos, inmediatamente quedan determinados los colores de los demás.



Ahora bien, teniendo solo los colores: amarillo, azul y rojo, los colores de los tres ladrillos resaltados se pueden elegir de 6 formas, así:



- (b) Tomando una de las opciones anteriores para pintar todo el muro tenemos:

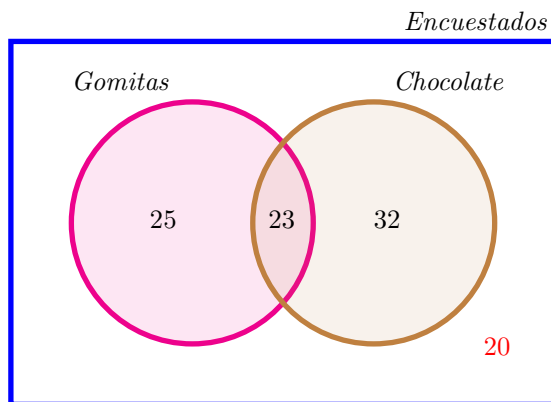


De este modo vemos que siempre quedarán 8 ladrillos de un color y 5 de cada uno de los otros dos colores. Pero sabemos que los ladrillos rojos son los más económicos, por o tanto, la mínima cantidad de dinero que necesita Hermes para comprar los bloques del muro es

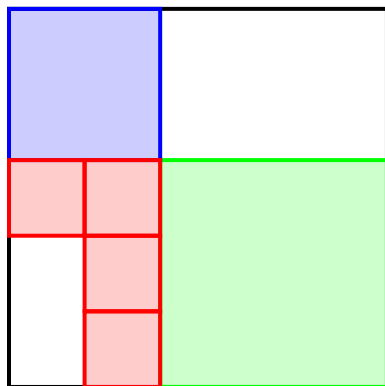
$$800 \times 8 + 5 \times 1000 + 5 \times 900 = \$15,900.$$

- P4. Una encuesta a 100 personas registraba si les gustaba el chocolate o las gomas. De las personas encuestadas, $\frac{1}{5}$ dijo no gustarle ninguna de las dos opciones; 55 afirmaron que les gustaba el chocolate y 48 que les gustaban las gomas. ¿A cuántas personas les gustaban ambas golosinas?

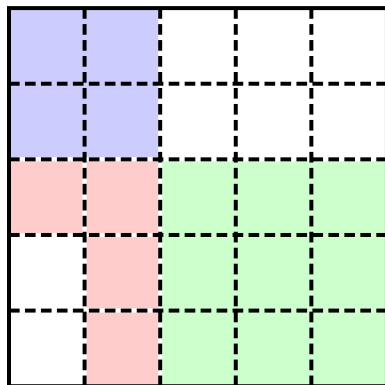
Solución: Se nos dice que $\frac{1}{5}$ de los encuestados, esto es 20 personas, dijeron no gustarle ninguna de las dos opciones; por lo que las 80 restantes dijeron que les gustaba al menos una de las dos opciones. Llamemos x al número de personas que les gustaban ambas golosinas, $55 - x$ son las personas que solo les gustaba el chocolate y 48 son las que les gustaba las gomas (sin necesariamente excluir el chocolate), así, $55 - x + 48 = 80$, entonces $x = 23$, es decir, a 23 personas les gustaban ambas golosinas. Lo anterior, se puede organizar en el siguiente diagrama de Venn:



- P5. El piso cuadrado de una piscina se ha cubierto parcialmente con tabletas cuadradas de colores como se muestra en la figura. Si el área del piso que falta por cubrir es 16 m^2 , ¿cuántos metros cuadrados mide el área total del piso de la piscina?



Solución: Dividiendo el piso de la piscina como se muestra a continuación, notamos que la región que falta por cubrir equivale a 8 cuadraditos de los rojos, es decir que cada cuadradito rojo tiene $16 \div 8 = 2 \text{ cm}^2$ de área. Por lo tanto, el área de todo el piso, que equivale al área de 25 de estos cuadraditos, es: $25 \times 2 = 50 \text{ cm}^2$.



- P6. En la enumeración de los atletas de una maratón se usaron 171 unos. Si la enumeración inicia en 1, ¿cuántos atletas había en la maratón?

Solución: En la enumeración del 1 al 9 solamente se usa 1 uno; del 10 al 19 se usan 11 unos; del 20 al 99 se usan 8 unos; hasta aquí van 20 unos. Ahora, note que los números del 100 al 199 son los mismos números que hay del 1 al 99 agregando un 10 o un 1 a cada uno de ellos, por lo tanto del 100 al 199 se usan $100 + 20 = 120$ unos. Del mismo modo, tenemos que del 200 al 299 hay 20 unos. Así, desde el 1 hasta el 299 se usaron 160 unos. Pero en la enumeración de los atletas se usaron 171 unos, es decir falta 11 unos; luego en la maratón habían 318 atletas.

<i>Numeración</i>	<i>Cantidad de unos</i>
<i>del 1 al 9</i>	1
<i>del 10 al 19</i>	11
<i>del 20 al 99</i>	8
<i>del 100 al 199</i>	120
<i>del 200 al 299</i>	20
<i>del 300 al 309</i>	1
<i>del 300 al 318</i>	10
<i>del 1 al 318</i>	171

Prueba Final del Nivel MEDIO

P1. Hermes, el loro de Pascal, sabe hacer cuentas solo con números naturales. Siempre que Pascal dice un número natural, Hermes lo multiplica por 9, luego suma 21, divide este resultado entre 3, al final resta 5 y grita el resultado.

- (a) Si Pascal dice el número 10, ¿cuál es el número que grita Hermes?
- (b) Si Hermes gritó el número 2021, ¿cuál es el número que dijo Pascal?
- (c) ¿Es posible que Hermes grite el número 100?

Solución:

(a) Si Pascal dice el número 10, Hermes hace las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}10 \times 9 &= 90, \\90 + 21 &= 111, \\111 \div 3 &= 37, \\37 - 5 &= 32.\end{aligned}$$

Por lo tanto Hermes gritó el número 32.

(b) Si Hermes gritó el número 2021, devolviendo las operaciones que hizo Hermes, tenemos:

$$\begin{aligned}2021 + 5 &= 2026, \\2026 \times 3 &= 6078, \\6078 - 21 &= 6057, \\6057 \div 9 &= 673.\end{aligned}$$

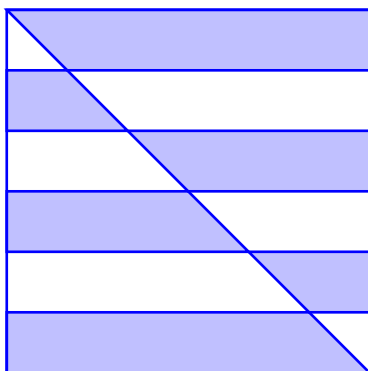
De modo que el número dicho por Pascal es el 673.

(c) No es posible puesto que, devolviendo las operaciones que debió hacer Hermes tenemos:

$$\begin{aligned}100 + 5 &= 105, \\105 \times 3 &= 315, \\315 - 21 &= 294, \\294 \div 9 &= ?\end{aligned}$$

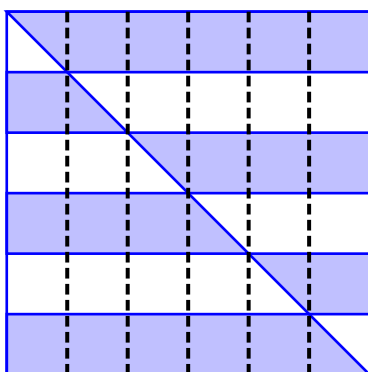
Pero 294 no es divisible entre 3 por lo tanto esta cantidad no es un número natural y Hermes solo hace operaciones con números naturales.

P2. La siguiente es la bandera de una isla muy lejana.



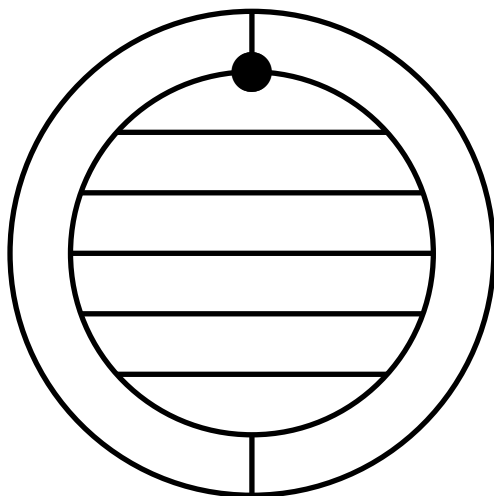
Si la bandera es cuadrada y los segmentos horizontales son equidistantes, ¿cuál es la razón entre el área total coloreada de azul y el área total blanca?

Solución: Considere la siguiente subdivisión de la bandera



Note que la región coloreada de azul corresponde a 21 cuadraditos de la subdivisión, mientras que la región blanca corresponde a 15 cuadraditos. Por lo tanto la razón entre el área total coloreada de azul y el área total blanca es: $\frac{21}{15} = \frac{7}{5}$.

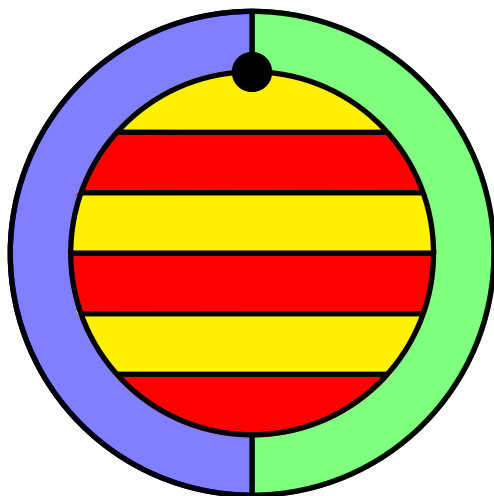
P3. El siguiente es el logo de una empresa de autos.



- (a) ¿Cuántos colores como mínimo, son necesarios para pintar el logo, teniendo en cuenta que regiones vecinas no pueden tener el mismo color?
- (b) Con la cantidad de colores hallada en el ítem anterior, ¿de cuántas formas diferentes se puede pintar el logo?

Solución:

- (a) *La cantidad mínima de colores necesaria para pintar el logo es 4, una manera de hacerlo es la siguiente:*



- (b) *Iniciando, el color de la región izquierda lo podemos elegir de 4 formas (los cuatro posibles colores), luego como la región derecha es vecina*

de la región derecha, su color puede elegirse de 3 formas diferentes (los tres colores restantes), finalmente los dos colores restantes deben intercalarse en las regiones centrales, es decir estas regiones pueden pintarse de dos formas diferentes, por lo tanto hay $4 \times 3 \times 2 = 24$ formas diferentes de pintar el logo, con cuatro colores.

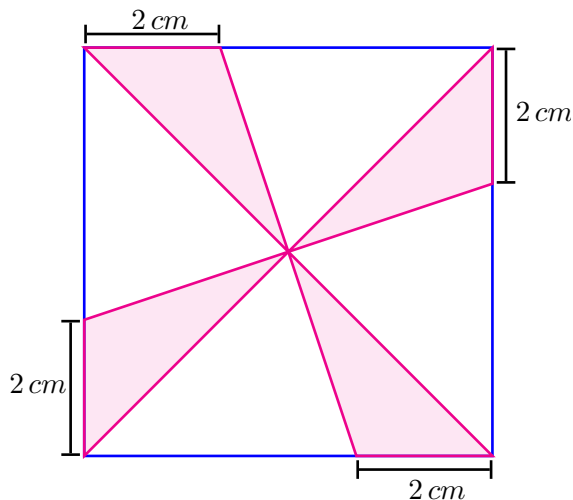
Otra solución Suponga que los colores son A, B, C y D. Si pintamos la región izquierda del color A entonces dado que las regiones centrales deben colorearse intercalando dos de los colores restantes, éstas podrían pintarse de 6 formas: (B-C-B-C-B-C), (C-B-C-B-C-B), (B-D-B-D-B-D), (D-B-D-B-D-B), (C-D-C-D-C-D), (D-C-D-C-D-C), la región derecha se colorea del color restante. Por lo tanto, si tomamos el color A para la región izquierda tenemos 6 formas de pintar el logo. De manera análoga, si la región izquierda se pinta del color B se obtienen otras 6 formas, si se pinta de C otras 6 y si se pinta de D otras 6. En total 24 formas de pintar el logo.

También es factible hacer un bosquejo de las 24 formas de pintar el logo usando 4 colores, lo dejamos de ejercicio al lector.

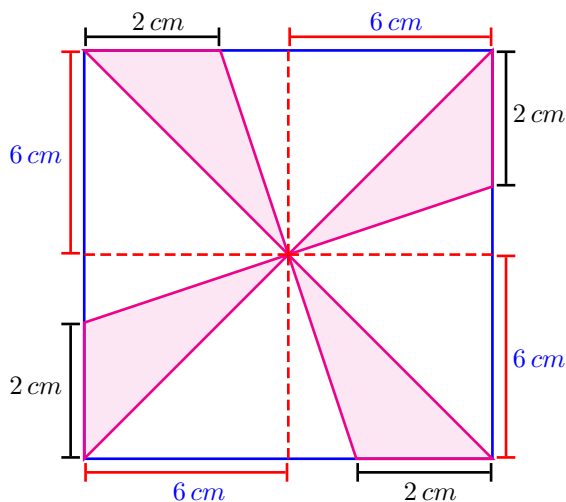
- P4. Gauss multiplicó cierta cantidad de números naturales y obtuvo 225 como resultado. ¿Cuál es el menor valor posible de la suma de esos números?

Solución: Dado que $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$, entonces el menor valor posible para la suma de los números que multiplicó Gauss es 16 que se obtiene con los números 3, 3, 5 y 5. Note que 255 se puede escribir como producto de otros números, por ejemplo $225 = 9 \times 25 = 3 \times 3 \times 25 = 3 \times 15 \times 5$, pero con estos números no se obtiene la menor suma posible.

- P5. Si el cuadrado que se muestra a continuación tiene 24 cm de perímetro, ¿de cuántos centímetros cuadrados es el área sombreada en su interior?



Solución: Dado que el perímetro del cuadrado es 24 cm, entonces cada uno de sus lados mide 6 cm. Ahora, note que el vértice común de los cuatro triángulos sombreado es el centro del cuadrado, por lo tanto la altura de cada triángulo respecto a la base que está sobre un lado del cuadrado es 3 cm y así el área de cada triángulo es $\frac{2 \times 3}{2} = 3 \text{ cm}^2$.



De modo que el área sombreada en el interior del cuadrado es

$$4 \times 3 \text{ cm}^2 = 12 \text{ cm}^2.$$

P6. La instalación de luces del arbolito de navidad tiene tres colores de bombillos: rojos, amarillos y azules. Los bombillos rojos alumbran

cada 20 segundos, los amarillos cada 30 segundos y los azules cada 18 segundos. Si al conectar la instalación alumbran todos los bombillos, ¿cuántas veces alumbran a la vez todos los bombillos de la instalación si permanece conectada durante 4 horas?

Solución: Los bombillos alumbran todos a la vez cada $\text{mcm}(20, 30, 18) = 180$ segundos, es decir cada 3 minutos. En 4 horas hay $4 \times 60 = 240$ minutos. Luego, durante las 4 horas los bombillos alumbran todos a la vez $240 \div 3 + 1 = 80 + 1 = 81$ veces.

Note que se debe sumar 1 a $240 \div 3$ puesto que, según el enunciado, cuando se conecta la instalación, en el segundo 0, todos los bombillos alumbran.

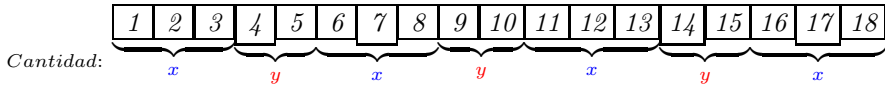
Prueba Final del Nivel AVANZADO

- P1. Un granjero guarda 1300 semillas en 18 cajas enumeradas del 1 al 18. Si se sabe que al sumar la cantidad de semillas de 5 cajas consecutivas siempre se obtiene 370, ¿cuántas semillas suman las cajas 4, 5, 9, 10, 14 y 15?

Solución: Sea y la cantidad de semillas que hay en las cajas $\boxed{4}$ y $\boxed{5}$, y x la cantidad de semillas que hay en las cajas $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$. Dado que la cantidad de semillas de 5 cajas consecutivas siempre es 370, entonces

$$x + y = 370,$$

y además, $4x + 3y = 1300$, pues

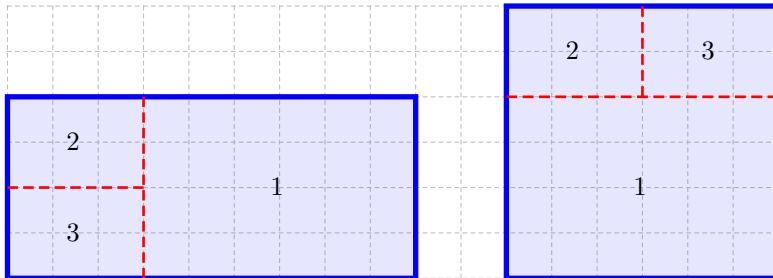


Multiplicando la primera ecuación por 4 tenemos $4x + 4y = 1480$, ahora restamos la segunda ecuación y obtenemos $y = 180$. Finalmente, la cantidad de semillas que hay en las cajas $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$, $\boxed{14}$ y $\boxed{15}$ es $3 \times y = 3 \times 180 = 540$.

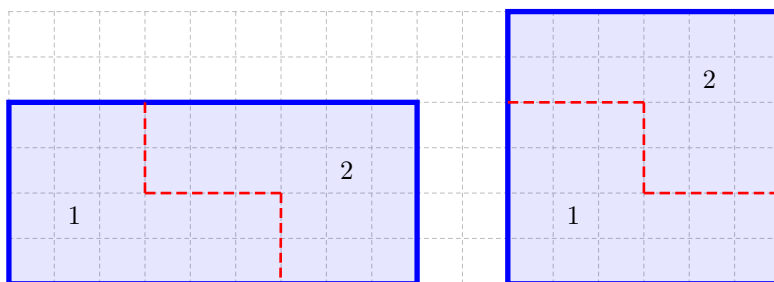
- P2. Lucía tiene un rectángulo de cartón de 9 cm por 4 cm .
- (a) ¿Es posible dividir el rectángulo en tres piezas rectangulares para formar un cuadrado con 36 cm^2 de área? De ser posible, muestre una forma de hacerlo. no es posible, justificar por qué.
- (b) ¿Es posible dividir el rectángulo en dos piezas para formar un cuadrado con 36 cm^2 de área? De ser posible, muestre una forma de hacerlo, no es posible, justificar por qué.

Solución:

- (a) Sí es posible, a continuación una forma de hacerlo:



(b) *Sí es posible, a continuación una forma de hacerlo:*



- P3. En una floristería agrupan los girasoles por docenas y sobran 6, si lo hacen por decenas sobran 4, y si lo hacen de 15 en 15 y sobran 9. Si se vende cada girasol a 1000 pesos cada uno, se reciben entre 300000 y 400000 pesos. ¿Cuántos girasoles en total hay en la floristería?

Solución: Dado que cada girasol vale \$1000 y el precio de todas los girasoles está entre \$300000 y \$400000 pesos, entonces hay entre 300 y 400 girasoles. Ahora, cuando los girasoles se agrupan por docenas sobran 4, es decir, la cantidad de girasoles excede en 4 a un múltiplo de 10, es decir la cantidad de girasoles es alguno de los siguientes números:

304, 314, 324, 334, 344, 354, 364, 374, 384, 394

Pero si se agrupan por docenas, sobran 6 es decir la cantidad de girasoles es un múltiplo de 12 más 6, y de los anteriores, el número que cumple es 354.

Finalmente verificamos que $354 - 9 = 345$ es múltiplo de 15, por lo tanto, si se agrupan de 15 en 15, sobran 9.

Así que, en total hay 354 girasoles en la floristería.

- P4. ¿Cuántos números naturales menores que 1000 hay tales que el producto de sus cifras es mayor que 10 pero menor que 20?

Solución: Las posibilidades para el producto de las cifras son:

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 y 19,

pero 11, 13, 17 y 19 son primos es decir no se pueden descomponer como producto de dígitos.

Veamos los posibles números que cumplen las condiciones del enunciado, a partir de la descomposición de los números que quedan de la lista

anterior como producto de a lo sumo tres dígitos:

$$12 = 2 \times 6 \quad \longrightarrow 8 \text{ números: } 26, 62, 126, 162, 216, 616, 261 \text{ y } 621.$$

$$= 3 \times 4 \quad \longrightarrow 8 \text{ números}$$

$$= 2 \times 2 \times 3 \quad \longrightarrow 3 \text{ números: } 223, 232 \text{ y } 322.$$

$$14 = 2 \times 7 \quad \longrightarrow 8 \text{ números}$$

$$15 = 3 \times 5 \quad \longrightarrow 8 \text{ números}$$

$$16 = 2 \times 8 \quad \longrightarrow 8 \text{ números}$$

$$= 4 \times 4 \quad \longrightarrow 4 \text{ números: } 44, 144, 414, \text{ y } 441.$$

$$= 2 \times 2 \times 4 \quad \longrightarrow 3 \text{ números}$$

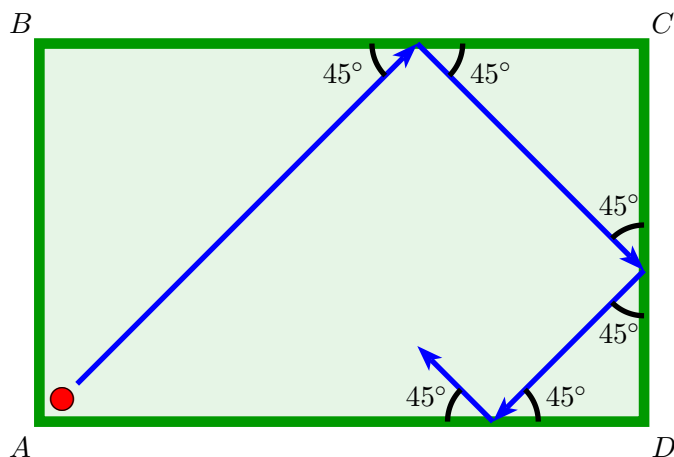
$$18 = 2 \times 9 \quad \longrightarrow 8 \text{ números}$$

$$= 3 \times 6 \quad \longrightarrow 8 \text{ números}$$

$$= 3 \times 3 \times 2 \quad \longrightarrow 3 \text{ números}$$

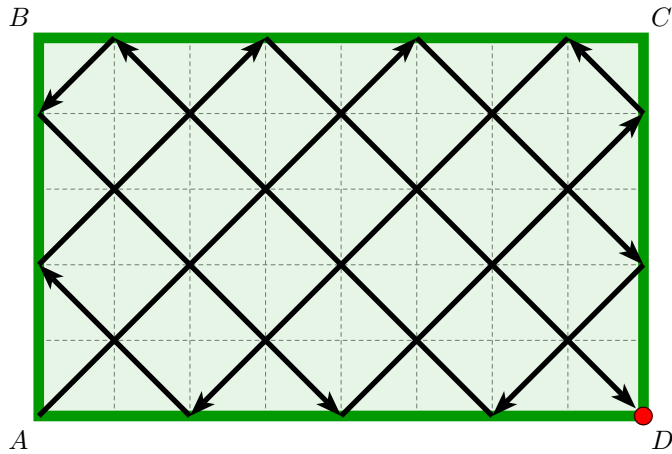
En total, 69 números naturales menores que 1000 cumplen que el producto de sus cifras es mayor que 10 pero menor que 20.

- P5. Desde una esquina de una mesa rectangular $ABCD$, tal que $AB = 100 \text{ cm}$ y $AD = 160 \text{ cm}$; se dispara una bola, de modo que, siempre, al golpear uno de los bordes de la mesa, sigue su movimiento formando ángulos de 45° con dicho borde, como se muestra a continuación:



Si la bola se dispara desde la esquina A y se detiene al chocar con una esquina de la mesa, ¿en cuál esquina termina la trayectoria de la bola?

Solución: Subdividiendo la superficie de la mesa en cuadrado en cuadrados con 10 cm de lado, es fácil trazar la trayectoria de la bola, como se muestra a continuación:



Por lo tanto la trayectoria de la bola termina en la esquina D.

- P6. El producto de las edades de los hijos de Sonia es 3696. Si la edad del mayor es el triple de la edad del menor, ¿cuántos hijos tiene Sonia?

Solución: La descomposición en factores primos de 3696 es

$$3696 = 2^4 \times 3 \times 7 \times 11.$$

Ahora, teniendo en cuenta que 3696 es el producto de las edades de los hijos de Sonia, y que la edad del mayor es el triple de la del menor, escribimos:

$$3696 = 2^2 \times (3 \times 2^2) \times 7 \times 11 = 4 \times 12 \times 7 \times 11.$$

Luego Sonia tiene 4 hijos, cuyas edades son: 4, 7, 11 y 12 años.