Universidad Industrial de Santander

Escuela de Matemáticas
Maestría en matemáticas

Examen de admisión
3 de febrero de 2017

Parte 1. Resuelva los siguientes tres puntos de Álgebra Lineal. Justifique adecuadamente sus respuestas.

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una tranformación lineal tal que:

   a) Los valores propios de T son 1 y -1;

   b) $V = \{(x, y, z) \colon x - y + z = 0\}$ es un subespacio propio de T; y

   c) $T(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$.

   Se pide:

   I. Probar que T es diagonalizable.

   II. Si $\mathcal{B}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, calcular $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(T)$ (representación matricial de T en la base $\mathcal{B}$).

   III. Calcular A^n para todo entero positivo n.

2. Sea V un espacio vectorial real tal que $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V. Si $T \colon V \to V$ es una tranformación lineal tal que

   $$T(v_1) = T(v_n) = v_1 + v_n \ \text{ y } \ T(v_i) = v_i, \text{ para cada } i \in \{2, ..., n-1\}.$$

   Demuestre que los valores propios de T son $0, 1$ y 2.

3. Sean $T \colon V \to W$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Demuestre que:

   a) T es inyectiva si y solo si $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ es linealmente independiente;

   b) T es sobreyectiva si y solo si $\operatorname{gen}\{T(v_1), ..., T(v_n)\} = W$;

   c) T es un isomorfismo si y solo si $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ es una base de W.

Parte 2. Resuelva cuatro (4) los siguientes seis (6) puntos de Análisis en la recta. Justifique adecuadamente sus respuestas.

1. Analice la convergencia o divergencia de la sucesión $(\sqrt[n]{a})_{n=1}^{\infty}$ siendo a un número real positivo.

2. Considere la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$. Determine la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a la cual converge la serie. Muestre que la convergencia no es uniforme en $[-1, 1]$.

3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ si x es irracional o cero, y $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ si $\frac{p}{q}$ es una función irreducible, $p \neq 0$. Demuestre que f es discontinua en cada $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$.

4. Calcule la derivada de $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Demuestre que f es integrable. Enuncie condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada.

6. Muestre que el límite puntual de una sucesión de funciones reales continuas (respectivamente, integrables) no necesariamente es una función continua (respectivamente, integrable).