Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Maestría en matemáticas
Examen de admisión
24 de febrero de 2016

Resuelva seis (6) de los diez (10) puntos propuestos a continuación, seleccionando 4 de Álgebra y 4 de Análisis.

1. Sea $\{v_1, ..., v_k\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores en $\mathbb{R}^n$ y sea v un vector en $\mathbb{R}^n$. Suponga que $v = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_kv_k$ con $c_1 \neq 0$. Pruebe que $\{v, v_2, ..., v_k\}$ es linealmente independiente.

2. Sean $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal y $\{v_1, ..., v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ es linealmente independiente si y solo si T es inyectiva.

3. Sean H y W subespacios de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que si $H \subset W$ entonces $W^\perp \subset H^\perp$.

4. Considere los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$H = \{(x, y, z, w) : z = x + 2y \text{ y } w = x - 3y\} \text{ y } W = \{(x, y, z, w) : x = 0 \text{ y } y = -w\}.$$

Resuelva los siguientes enunciados:

   a) Calcular $H \cap W$.
   b) Encuentre una base para H, W y $H + W$.
   c) Encuentre las dimensiones de $H, W, H \cap W$ y $H + W$.

5. Encuentre una matriz $A \in M_{3\times 3}$ tal que A tiene dos valores propios λ_1 y λ_2 y los espacios propios asociados a estos valores son $E_{\lambda_1} = \{(x, y, z) : x + 2y - 3z = 0\}$ y $E_{\lambda_2} = \{(x, y, z) : 2x = -y = z\}$.

---

6. Demuestre que toda sucesión de números reales es convergente si y solo si es de Cauchy.

7. Sea $a > 1$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$.

8. Sea $X \subset \mathbb{R}$. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se denomina *uniformemente continua* cuando, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in \mathbb{R}$ con $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Muestre que la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es uniformemente continua. De un ejemplo de una función que sea continua pero que no sea uniformemente continua.

9. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas y derivables en (a, b). Demuestre que si $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$.

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Demuestre que f es infinitamente diferenciable.