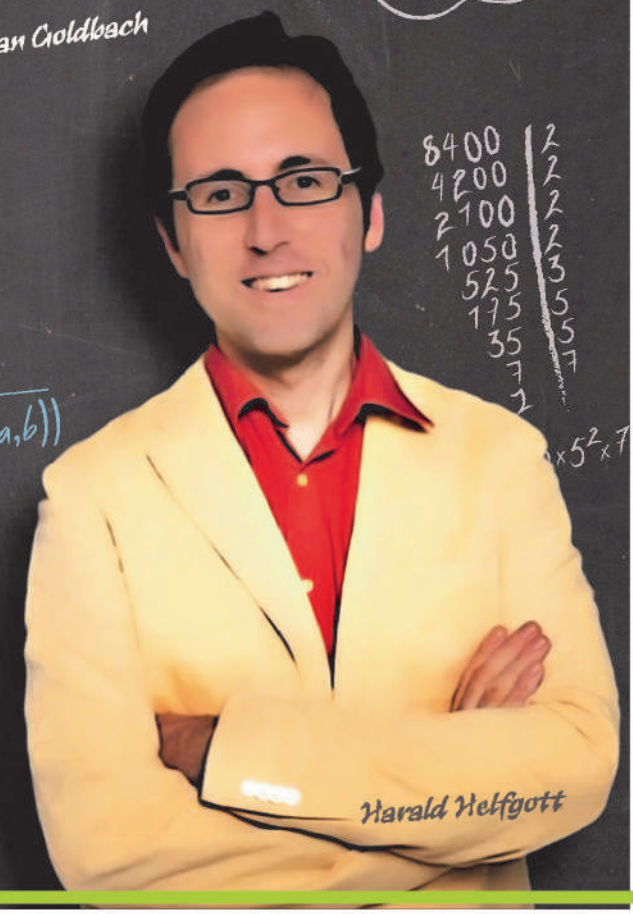
IX OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMÁTICAS

SECUNDARIA UIS 2017

$$mcd(a,b) = \frac{ab}{(MCM(a,b))}$$

"Todo número impar mayor que 5 puede expresarse como suma de 3 números primos"

Christian Goldbach



$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

$$1050 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$$

$$8400 = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7$$

13=3+ 3+ 7
15=3+ 5+ 7
2017= ___+ ___+ ___

INFORMES
olimpiadas@matematicas.uis.edu.co
Tel.: 6450301, 6344000 Ext.: 2316, 2583, 2581
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

Vicerrectoría Académica
Universidad Industrial de Santander
"VIGILADA MINEDUCACIÓN"
ORM
EDUMAT
IPRED

Novenas Olimpiadas Regionales de Matemáticas Secundaria

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga

2017

Elaboración y redacción

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas:

Andrés Fabián Leal Archila

Arnoldo Rafael Teherán Herrera

Cristhian Daniel Cáceres Garavito

Edilberto José Reyes González

Edwin David Valencia Oviedo

Gabriel Moncada Santos

Gerson Leonel Barajas Ávila

Jenifer Tatiana Puentes Correa

Jesús Fernando Carreño Díaz

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Juan Camilo Cala Barón

Laura Milena Romero Parada

Luis Carlos Prada Niño

Luis Manuel Ortiz Durán

Michael Alexander Rincón Villamizar

Rosaelisa Murillo Porras

Santiago Niño Campos

Silvia Juliana Ballesteros Gualdrón

Yerly Vanesa Soler Porras

Yzel Wlly Alay Gómez Espíndola

Presentación

Las Olimpiadas en Matemáticas son conocidas a nivel internacional por la influencia en la transformación del pensamiento matemático, y el crecimiento de las expectativas y el interés en aprender matemáticas por parte de los estudiantes. Generalmente, las situaciones problemáticas expuestas en las pruebas exponen al estudiante a temas que no se estudian en la escuela, y estos incluyen matemática que puede ser motivadora y sorprendente. Así las competencias no solamente prueban de manera directa el conocimiento o las destrezas matemáticas sino también la habilidad que tiene el estudiante de manejar situaciones más allá de experiencias reales.

Las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander para secundaria buscan recrear el pensamiento matemático de tal forma que todos los jóvenes atraídos por el deseo de enfrentar nuevos retos descubran caminos alternos y flexibilicen la exploración de ideas matemáticas de tal manera que su participación permita que tanto el estudiante como el docente puedan apreciar sus logros y juzgar su práctica desde una perspectiva nacional e internacional.

Con el objetivo de recopilar, compartir, difundir y divulgar los problemas trabajados en cada versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander para secundaria se ha elaborado el presente material dirigido a estudiantes de básica secundaria, media vocacional, docentes de matemáticas y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a través del enfoque de planteamiento y resolución de problemas.

Introducción

La Universidad Industrial de Santander como institución de educación superior en el ámbito regional tiene como misión esencial educar mediante la generación y difusión de las ciencias, la tecnología, las humanidades y el arte como una clara vocación de servicio a la sociedad, posibilitando la formación integral del ser humano dentro de un espíritu creativo que permita el mejoramiento personal y el desarrollo de una sociedad democrática, tolerante y comprometida con los deberes civiles y los derechos humanos.

Siguiendo este orden de ideas, la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander tiene como misión ofrecer a la sociedad y a la comunidad universitaria posibilidades para el cultivo de las matemáticas, donde se promueva una actitud creativa, rigurosa y formal, construyendo un ambiente académico basado en la sana competencia y la solidaridad. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática en el entorno natural de la UIS, liderando en forma positiva la actividad matemática del nororiente del país, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado sino también por su participación en la formación de los estudiantes de la universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a las diversas dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje y desarrollo de las habilidades matemáticas en la región, la Escuela de Matemáticas ha definido un proyecto macro de fortalecimiento de las habilidades matemáticas

de la comunidad estudiantil de la región, utilizando para este fin, diferentes actividades académicas entre las que se encuentran el proyecto de semilleros, la creación de diplomados y especializaciones para actualización y/o formación docente y el proyecto de Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (ORM-UIS) para secundaria que busca contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación secundaria en la región de incidencia de la UIS, a través del desarrollo de las habilidades matemáticas de los estudiantes y la capacitación docente.

Este proyecto es pieza clave para mejorar el nivel matemático de los estudiantes de la región, fortalecer la formación académica de los docentes de secundaria y muy posiblemente aumentar el número de licenciados en matemáticas y matemáticos en la región, a partir del conocimiento y puesta en práctica de estrategias que mejoren la efectividad del proceso de planteamiento y resolución de problemas.

Las ORM-UIS para secundaria tienen como ejes temáticos: teoría de números y combinatoria, álgebra y lógica, y geometría. Se realizan en cinco fases, a saber, Preparatoria, Clasificatoria, Selectiva, Final y Entrenamientos, en cada uno de los tres niveles de acuerdo al grado de escolaridad de los estudiantes. Los niveles son: Básico, para los estudiantes de los grados sexto y séptimo; Medio, para los estudiantes de los grados octavo y noveno, y Avanzado, para los estudiantes de los grados décimo y undécimo.

La Escuela de Matemáticas a través del grupo de Educación Matemática de la UIS, Edumat, reconoce la labor esencial del maestro en el proceso de formación de ciudadanos competentes; por ello brinda tanto a los docentes como a los estudiantes una forma de vincularse a este mundo y en esta oportunidad lo hace presentando esta cartilla.

Este documento consta de tres capítulos; en cada uno de estos se presentan los problemas correspondientes a la novena versión del proyecto ORM-UIS

para secundaria en las fases Clasificatoria, Selectiva y Final con su respectiva solución y los nombres de los estudiantes con los mejores cinco puntajes en la prueba final, para cada uno de los tres niveles: Nivel Básico (Capítulo 1), Nivel Medio (Capítulo 2) y Nivel Avanzado (Capítulo 3).

Se espera que este material sea del agrado de estudiantes, docentes y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a través del enfoque de planteamiento y resolución de problemas y permita introducir, desarrollar y reflexionar algunas temáticas específicas de cada área en los diferentes sistemas como lo son el numérico-variacional, el geométrico-métrico y el aleatorio.

Índice general

1. Nivel Básico **1**

1.1. Prueba Clasificatoria 1

1.1.1. Prueba Clasificatoria: 25 de agosto 1

1.1.2. Solución 5

1.2. Prueba Selectiva 10

1.2.1. Prueba Selectiva: 22 de septiembre 10

1.2.2. Solución 13

1.3. Prueba Final 18

1.3.1. Resultados 18

1.3.2. Prueba Final: 28 octubre 19

1.3.3. Solución 21

2. Nivel Medio **25**

2.1. Prueba Clasificatoria 25

2.1.1. Prueba Clasificatoria: 25 de agosto 25

2.1.2. Solución 29

2.2. Prueba Selectiva 37

2.2.1. Prueba Selectiva: 22 de septiembre 37

2.2.2. Solución 40

2.3. Prueba Final 44

2.3.1. Resultados 44

2.3.2. Prueba Final: 28 de octubre 45

2.3.3. Solución 47

3. Nivel Avanzado **51**

3.1. Prueba Clasificatoria 51

3.1.1. Prueba Clasificatoria: 25 de agosto 51

3.1.2. Solución 55

3.2. Prueba Selectiva 61

3.2.1. Prueba Selectiva: 22 de septiembre 61

3.2.2. Solución 64

3.3. Prueba Final 69

3.3.1. Resultados 69

3.3.2. Prueba Final: 28 de octubre 70

3.3.3. Solución 72

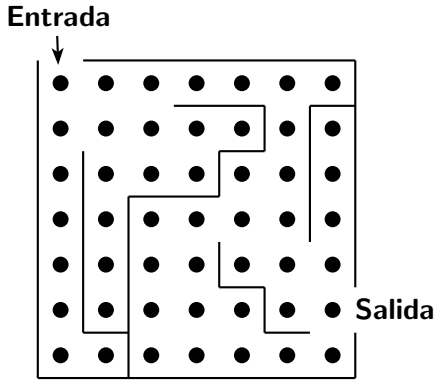
Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

1.1.1. Prueba Clasificatoria: 25 de agosto

1. Cada uno de los puntos en el laberinto representa un trozo de zanahoria. ¿Cuál es la máxima cantidad de trozos de zanahoria que un conejo puede recoger desde la entrada hasta la salida, teniendo en cuenta que no puede pasar dos veces por un mismo punto y que los movimientos permitidos son vertical y horizontalmente?



(*a*) 12 (*b*) 26 (*c*) 30 (*d*) 33

2. ¿Cuál es el área en cm^2 del cuadrado más pequeño que puede contener a un círculo de radio $3\ cm$?

$(a)\ 9$ $(b)\ 12$ $(c)\ 24$ $(d)\ 36$

3. ¿Cuál es la suma de los múltiplos de 7 de dos cifras, tales que la suma de sus cifras es 10?

$(a)\ 129$ $(b)\ 119$ $(c)\ 109$ $(d)\ 91$

4. En un colegio donde se aprueba con el $60\,\%$, un estudiante miente cuando dice: *"Aprobé todas mis materias con un rendimiento de al menos el* $80\,\%$*"*. Según esto, es correcto afirmar que el estudiante

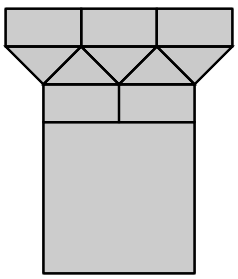
(a) perdió todas sus materias.

(b) perdió alguna materia.

(c) rindió menos del $80\,\%$ en alguna materia.

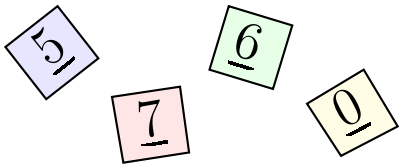
(d) aprobó alguna materia con menos del $80\,\%$ de rendimiento.

5. Sabiendo que la siguiente torre está formada por 5 rectángulos iguales de base $2\,cm$ y altura $1\,cm$, 5 triángulos isósceles iguales, cuya altura respecto a la base incongruente común a la de un rectángulo mide $1\,cm$ y un cuadrado, como se muestra en la figura; se puede afirmar que su perímetro en centímetros es



$(a)\ 22+2\sqrt{2}$ $(b)\ 24$ $(c)\ 41$ $(d)\ 24+2\sqrt{2}$

6. Iván juega a formar números con las siguientes cuatro tarjetas:



De los números con cuatro cifras que Iván puede formar con sus tarjetas, es correcto afirmar que:

(a) en total son 24.

(b) solo dos son pares.

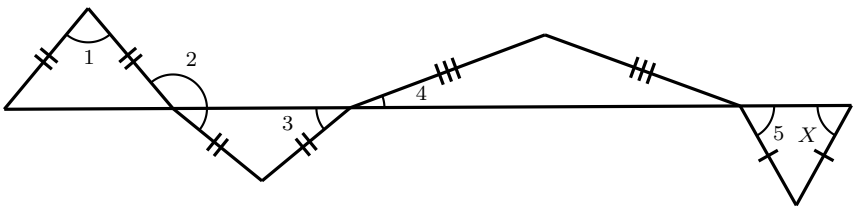
(c) en total son 4^4.

(d) 10 son múltiplos de 6.

7. Manuel y Felipe han pensado un número cada uno. Si al número de Manuel lo multiplicamos por 3 y luego le sumamos 2 obtenemos el triple del número de Felipe menos 4. ¿Cuál es la diferencia positiva entre los números que pensaron Manuel y Felipe?

(a) 2 (b) 3 (c) 6 (d) 18

8. En la siguiente figura todos los triángulos son isósceles como se indica en la figura. Si el ángulo 1 mide $80°$, el ángulo 2 mide $170°$, el ángulo 4 mide la mitad que el ángulo 3 y el ángulo 5 mide el triple que el ángulo 4, ¿cuánto mide el ángulo X?



(a) $40°$ (b) $50°$ (c) $60°$ (d) $75°$

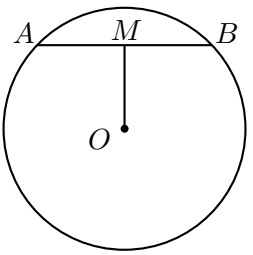
9. ¿Cuántos valores puede tomar a de tal manera que el número de seis cifras $1a1a1a$ sea divisible por 2 y 9?

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 5

10. Carolina regresa de una piñata con una bolsa de paquetes de galleta. Le regala a su hermano Carlos la mitad de los paquetes que tiene más medio paquete de galletas y cuando se encuentra a su hermana Johana le regala la mitad de los paquetes que le quedan más medio paquete de galletas. Finalmente le regala a su hermano Luis la mitad de los que le quedan más medio paquete y le quedaron solamente tres paquetes de galletas. ¿Cuántos paquetes le regaló a su hermana Johana?

(a) 7 (b) 8 (c) 15 (d) 16

11. En la siguiente figura se muestra una circunferencia de radio $10\ cm$, con centro en O. Si $AB = 12\ cm$, M es el punto medio de la cuerda $\overline{AB}$ y $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, ¿cuál es la medida de $\overline{OM}$?



(a) $9\ cm$
(b) $8\ cm$
(c) $7\ cm$
(d) $6\ cm$

12. Sean a y b números enteros. Si $m = a^2 + b^2$ y $n = (a + b)^2$, **NO** es correcto afirmar que:

(a) Si a y b son pares entonces m y n son pares.

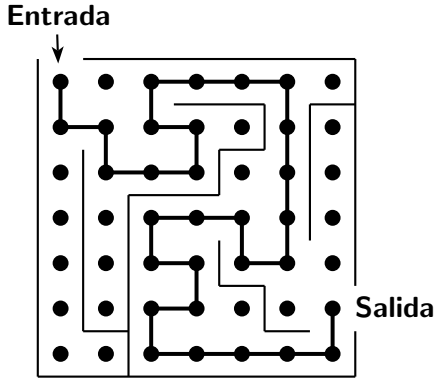
(b) m y n son enteros positivos.

(c) Si a y b son impares, entonces m y n son pares.

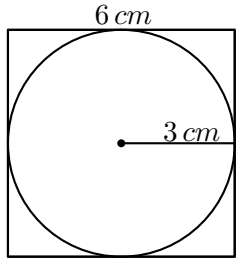
(d) Si a es par y b impar, entonces m es impar y n par.

1.1.2. Solución

1. En la siguiente figura se muestra una forma en la que el conejo puede atravesar el laberinto teniendo en cuenta los movimientos permitidos y tomando la mayor cantidad de trozos de zanahoria. Cabe resaltar que pueden hacerse unos pequeños cambios en el camino, pero eso no altera que la máxima cantidad de puntos por los que se puede pasar sea igual a 30.



2. El cuadrado más pequeño que puede contener a un círculo de radio $3\,cm$ debe tener $6\,cm$ de lado (en tal caso el círculo es tangente interno al cuadrado, como se muestra en la figura). Luego el área de este cuadrado es $36\,cm^2$.



3. Consideremos la siguiente lista de los múltiplos de 7 que cuentan con exactamente dos cifras: 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98. Observe que los números de esta lista cuyas cifras suman 10 son 28 y 91. Al sumar estos dos números obtenemos $28 + 91 = 119$.

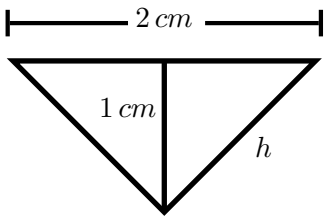
4. No es correcto afirmar (a) pues el estudiante pudo bien aprobar una materia con un rendimiento menor que $80\,\%$ y aún así sigue mintiendo.

No es correcto afirmar (b) porque el estudiante pudo aprobar todas las materias con, por ejemplo, un rendimiento del $65\,\%$ y aún así sigue mintiendo.

No es correcto afirmar (d) ya que el estudiante pudo haber perdido todas las materias y aún así sigue mintiendo.

Mentir al decir que se aprobaron todas las materias con un rendimiento de al menos $80\,\%$ equivale a decir que, en por lo menos una materia, no se alcanzó este porcentaje. Luego es correcto afirmar (c).

5. Del enunciado tenemos que los 5 rectángulos tienen $2\,cm$ de ancho y por tanto el lado del cuadrado es $4\,cm$. Por otro lado, consideremos el siguiente triángulo isósceles:



Por el teorema de Pitágoras tenemos que $h^2 = 1^2 + 1^2$, así $h = \sqrt{2}\,cm$. El perímetro de la figura está formado por tres lados del cuadrado, tres lados "anchos" de los rectángulos, cuatro lados "altos" de los rectángulos y dos lados congruentes de los triángulos isósceles. Así, el perímetro de la figura en centímetros está dado por:

$$3 \times 4 + 3 \times 2 + 4 \times 1 + 2 \times \sqrt{2} = 22 + 2\sqrt{2}.$$

6. Los números de cuatro cifras que se pueden formar usando las tarjetas son 18, a saber: 5760, 5670, 7560, 7650, 6750, 6570, 5706, 5076, 7506, 7056, 7605, 6705, 6075, 7065, 6057, 6507, 5607, 5067.

Ahora, sabiendo que un número es divisible entre 6, si y solo si, es divisible por 2 y por 3; es decir si la cifra de las unidades es par y la suma de sus cifras es múltiplo de 3; se establece que de la lista anterior los números que son divisibles entre 6 son exactamente 10.

7. Sea m el número pensado por Manuel y n el número pensado por Felipe. De acuerdo a las condiciones del problema se obtiene la ecuación:

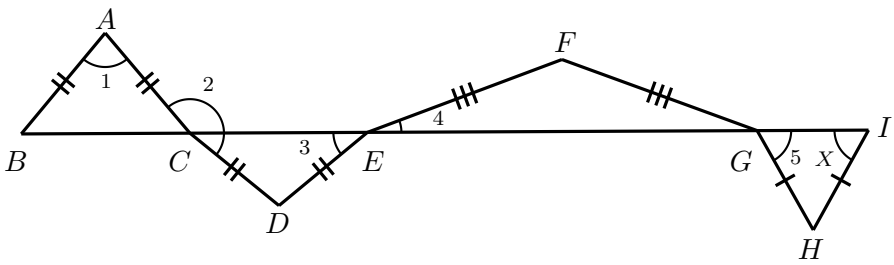
$$3m + 2 = 3n - 4.$$

Haciendo las operaciones correspondientes:

$$\begin{aligned} 3m - 3n &= -4 - 2 \\ 3(m - n) &= -6 \\ m - n &= -2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la diferencia positiva entre los números es $n - m = 2$.

8. Considere la siguiente figura:



El triángulo BAC es isósceles en A y el ángulo 1 mide $80°$, entonces $\measuredangle CBA = \measuredangle ACB = 50°$. De lo anterior obtenemos que $\measuredangle ECA = 130°$; luego $\measuredangle DCE = 170° - 130° = 40°$ y como el triángulo CDE es isósceles, entonces el ángulo 3 también mide $40°$. Del enunciado tenemos que el ángulo 4 tiene la mitad de la amplitud que el ángulo 3, así el ángulo 4 mide $20°$ y el ángulo 5 mide $60°$. Como el triángulo GHI es isósceles se concluye que el ángulo X mide $60°$.

9. Para que el número $1a1a1a$ sea divisible por 2 y por 9 se deben cumplir las siguientes condiciones: a debe ser un dígito par y la suma de sus cifras $3+3\times a$ debe ser múltiplo de 9. Los valores de a que satisfacen la primera condición son 0, 2, 4, 6 y 8; calculando $3+3\times a$ para cada uno de ellos, se tiene que los valores de a que cumplen con las dos condiciones son dos, a saber: $a=2$ y $a=8$.

10. **Solución** 1. Dado que Carolina quedó con 3 paquetes de galletas después de haberle dado la mitad de lo que tenía más medio paquete a su hermano Luis, eso quiere decir que Carolina tenía $3\times 2+1=7$ paquetes de galletas después de haberle dado a su hermana Johana la mitad de lo que tenía más medio paquete. Por lo tanto, Carolina se había quedado con $7\times 2+1=15$ paquetes de galletas después de haberle dado la mitad de lo que tenía más medio paquete a su hermano Carlos. Por lo anterior, Carolina le dio a su hermana Johana $15-7=8$ paquetes de galletas.

Solución 2. Sea x la cantidad de paquetes de galleta que tenía Carolina inicialmente. Como Carolina le dio la mitad de los paquetes que tenía más medio paquete de galletas a su hermano Carlos; eso quiere decir que Carolina se quedó con

$$x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2}$$

paquetes de galletas; luego, realizó el mismo procedimiento con su hermana Johana, quedando con

$$\frac{x-1}{2}-\frac{x-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{x-3}{4}$$

paquetes de galletas. Por último, realizó el mismo procedimiento con su hermano Luis y de acuerdo al enunciado Carolina se quedó con 3 paquetes de galletas; entonces se tiene que

$$\frac{x-3}{4}-\frac{x-3}{8}-\frac{1}{2}=\frac{x-7}{8}=3. \tag{1.1}$$

De (1.1), se deduce que $x = 31$, luego la cantidad de paquetes de galleta que Carolina le regaló a su hermana Johana fue

$$\frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = 8.$$

11. Como O es el centro de la circunferencia, el segmento $\overline{OB}$ es un radio del círculo, luego $OB = 10\ cm$. Además, $\overline{OB} \perp \overline{AB}$, por lo tanto OMB es un triángulo rectángulo en M cuya hipotenusa mide $10\ cm$ y uno de sus catetos mide $6\ cm$. Haciendo uso del teorema de Pitágoras se obtiene que

$$OM = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,cm.$$

12. No es correcto afirmar la (d). Tome $a = 2$ y $b = 3$. Note que $m = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$, pero $n = (2+3)^2 = 5^2 = 25$ es impar. Se deja de ejercicio al lector probar que las demás opciones son verdaderas.

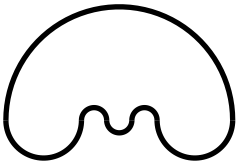
1.2. Prueba Selectiva

1.2.1. Prueba Selectiva: 22 de septiembre

1. ¿Cuántos números enteros mayores que 1 y menores o iguales que 60 son divisibles por dos enteros consecutivos mayores que 1?

(a) 22 (b) 13 (c) 30 (d) 15

2. La siguiente figura está formada por una semicircunferencia de diámetro $1\,cm$, dos semicircunferencias medianas congruentes entre sí, cuyos radios coinciden con un tercio del radio de la semicircunferencia más grande, y tres semicircunferencias más pequeñas que son congruentes entre sí. Si los centros de todas las circunferencias están sobre la misma recta, ¿cuál es el perímetro de la figura en centímetros?



(a) 2π (b) $\frac{5}{6}\pi$ (c) $\frac{13}{9}\pi$ (d) π

3. En un colegio hay 500 estudiantes. Llamaremos A al conjunto de estudiantes con 14 o más años. Llamaremos B al conjunto de estudiantes con menos de 14 años y C será el conjunto de estudiantes que usa anteojos. Si en A se encuentra el $60\,\%$ del total, en C hay $10\,\%$ del total y $C \cap A$ representa el mismo porcentaje en A que $C \cap B$ en B. ¿Cuántos estudiantes tienen menos de 14 años y usan anteojos?

(a) 20 (b) 25 (c) 30 (d) 50

4. En un automóvil solo se pueden recorrer distancias de 8 o 9 kilómetros cada vez que este se enciende. ¿Cuál es la mayor cantidad de kilómetros que no pueden recorrerse haciendo uso del automóvil?

(a) 57 (b) 19 (c) 55 (d) 15

5. Todos los días Edwar le regala a Valentina el $25\,\%$ de los chocolates que tiene. Si al finalizar el segundo día le quedan 54 chocolates, ¿cuánto es la suma de los dígitos de la cantidad de dulces que tenía inicialmente Edwar?

(a) 18 (b) 15 (c) 9 (d) 6

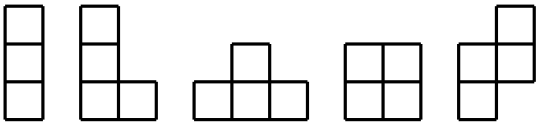
6. En un triángulo rectángulo el mayor de sus ángulos interiores mide α grados. Si otro de sus ángulos interiores mide $\dfrac{\alpha}{2}$ grados, y uno de sus catetos mide l, ¿cuánto mide su hipotenusa?

(a) $2l^2$ (b) $\sqrt{2l}$ (c) $l\sqrt{2}$ (d) $2l$

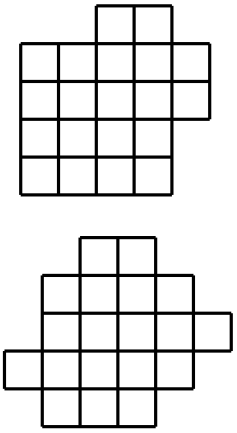
PROBLEMAS TIPO ENSAYO

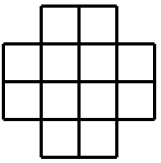
7. Determine las parejas de números enteros positivos a, b cumplen que $a + b = ab$.

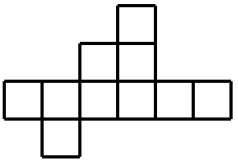
8. Se tiene un conjunto con varias fichas como las que se muestran a continuación.



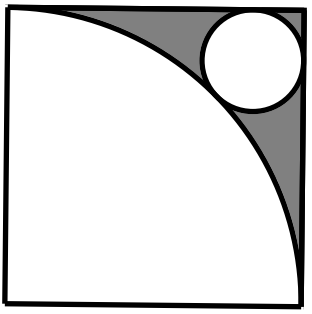
¿Cuál de las siguientes figuras NO se puede formar con las fichas anteriores, teniendo en cuenta rotaciones y reflexiones y que no es necesario usar al menos una ficha de cada tipo?







9. Halle el área sombreada de la siguiente figura, dado que la longitud del lado del cuadrado es 4 y la circunferencia pequeña es tangente a los dos segmentos y al sector circular.



1.2.2. Solución

1. Los números enteros mayores que 1 y menores o iguales a 60 que son

- divisibles por 2 y 3 son: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60.
- divisibles por 3 y 4 son: 12, 24, 36, 48, 60.
- divisibles por 4 y 5 son: 20, 40, 60.
- divisibles por 5 y 6 son: 30, 60.
- divisibles por 6 y 7 es: 42.
- divisibles por 7 y 8 es: 56.

Por lo tanto hay 13 números que cumplen con las condiciones.

2. La figura está conformada por una semicircunferencia de radio $\frac{1}{2}$, dos semicircunferencias de radio $\frac{1}{6}$ y tres semicircunferencias más pequeñas de radio

$$\frac{1-4\left(\frac{1}{6}\right)}{6}=\frac{1}{18}.$$

Como la longitud de una semicircunferencia está dada por la fórmula $\frac{2\pi r}{2}=\pi r$, entonces el perímetro de la figura, en centímetros, es

$$\frac{1}{2}\pi+2\left(\frac{1}{6}\pi\right)+3\left(\frac{1}{18}\pi\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\pi.$$

3. De acuerdo al enunciado se deduce que hay 300 estudiantes en el conjunto A, $500-300=200$ estudiantes en el conjunto B y 50 estudiantes en el conjunto C. Como $C\cap A$ representa el mismo porcentaje en A que $C\cap B$ en B, es decir, el porcentaje de los estudiantes con 14 o más años que usan anteojos es igual al porcentaje de los estudiantes menores de 14 años que usan anteojos; entonces

$$\frac{x}{300}=\frac{50-x}{200},$$

siendo x la cantidad de estudiantes con 14 o más años que tienen anteojos. Luego $x = 30$; por lo tanto, hay $50 - 30 = 20$ estudiantes que tienen menos de 14 años y usan anteojos.

4. Por el teorema de Frobenius [1] se tiene que el mayor número que no se puede expresar como una combinación lineal de 8 y 9 es:

$$8 \times 9 - (8 + 9) = 55.$$

5. **Solución** 1. Si Edwar se quedó con 54 chocolates, eso quiere decir que el segundo día la cantidad de chocolates que tenía era

$$54 \div 0,75 = 72.$$

Siguiendo el mismo razonamiento, la cantidad inicial de dulces que tenía Edwar era

$$72 \div 0{,}75 = 96$$

y la suma de sus dígitos es $9 + 6 = 15$.

Solución 2. Sea x la cantidad inicial de dulces que tenía Edwar. El primer día Edwar le regaló $0,25x = \frac{1}{4}x$ a Valentina, quedando él con $0,75x = \frac{3}{4}x$. El segundo día Edwar le vuelve a regalar a Valentina el $25\,\%$ de los chocolates que le quedaban, esto es, $0,25(0,75x) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{3}{16}x$; por lo tanto, lo que le quedó fue

$$0,75(0,75x) = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{9}{16}x.$$

Como el enunciado dice que le quedaron 54 dulces, entonces se tiene que

$$0,75(0,75x) = \frac{9}{16}x = 54,$$

[1] Dados a y b enteros positivos primos relativos ($\text{mcd(a, b)} = 1$), el mayor entero positivo que no se puede escribir como $n \times a + m \times b$, con n y m enteros no negativos, está dado por $a \times b - (a + b)$. (Consultar sobre *el problema de la moneda de Frobenius*)

resolviendo la ecuación, se concluye que la cantidad inicial de dulces que tenía Edwar era $x = 96$, luego la suma de sus dígitos es $9 + 6 = 15$.

6. Como el triángulo es rectángulo esto significa que tiene un ángulo de $90°$, de modo que $\alpha = 90°$, ya que si $\alpha > 90°$ la suma de sólo dos ángulos internos del triángulo sería mayor que $180°$ y esto no es posible en un triángulo. Por otra parte se sabe que uno de sus ángulos internos mide $\frac{\alpha}{2} = 45°$, por lo tanto el tercer ángulo debe medir $180° - 90° - 45° = 45°$, de lo que se concluye que el triángulo es isósceles y rectángulo y sus dos catetos miden l. Así, aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos que el lado restante, es decir la hipotenusa, mide $h = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$.

7. Despejando a y b de $a + b = ab$ se tiene:

$$a = ab - b = b(a - 1) \tag{1.2}$$

$$b = ab - a = a(b - 1) \tag{1.3}$$

Ahora bien, de (1.2) se tiene que a es múltiplo de b y de (1.3) que b es múltiplo de a. Por lo tanto, $a = b$ o $-a = b$.

- Si $-a = b$, entonces:

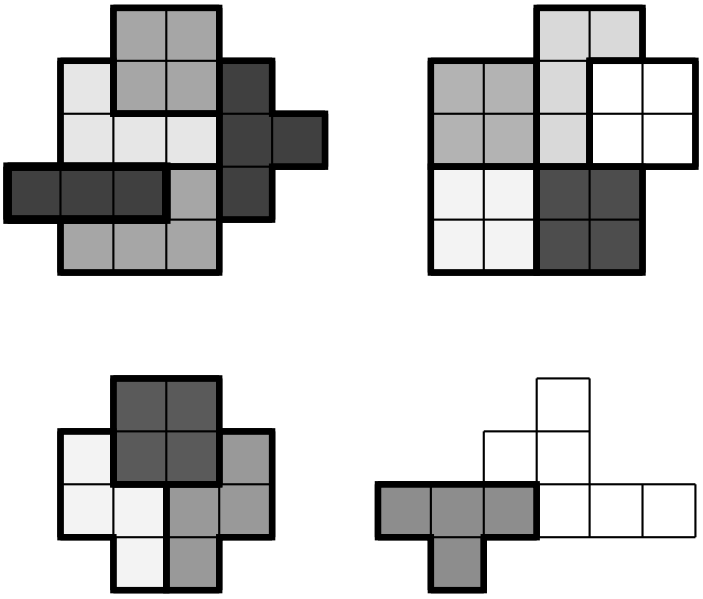
$$\begin{aligned} a + b &= ab \\ a - a &= a \cdot (-a) \\ 0 &= -a^2; \end{aligned}$$

- Si $a = b$, entonces:

$$\begin{aligned} a + b &= ab \\ a + a &= a^2 \\ a^2 - 2a &= 0 \\ a(a - 2) &= 0. \end{aligned}$$

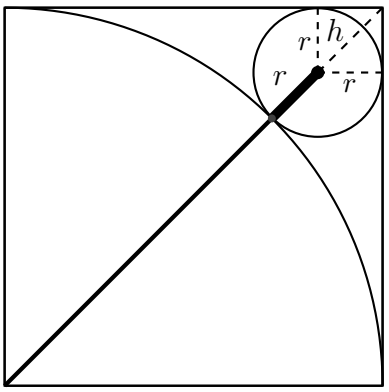
Luego $a = b = 0$ o $a = 2$ y $b = 2$. Por tanto, la única pareja de enteros positivos a y b que cumplen $a + b = ab$ es la pareja $(2, 2)$.

8. A continuación se muestra una forma de completar las tres primeras figuras.



Para el caso de la última figura note que la ficha sombreada es obligatoria y quedan 6 cuadraditos sin sombrear, por lo tanto no es posible construirla a partir de las fichas dadas, ya que todas las fichas salvo la primera de la lista están compuestas por cuatro cuadraditos y la primera ficha de la lista está formada por tres cuadraditos pero con dos de ellas no es posible completar lo que falta en la cuarta figura.

9. Considere la siguiente figura



Sea H la longitud diagonal del cuadrado de lado 4, por el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$H = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}.$$

Ahora, sea r la longitud del radio de la circunferencia pequeña y h la longitud de la diagonal del cuadrado de lado r que se muestra en la figura. Entonces

$$h = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}.$$

Por otro lado, note que $4 + r + h = \sqrt{32}$ y reemplazando $h = r\sqrt{2}$ se tiene que:

$$r = \frac{\sqrt{32} - 4}{1 + \sqrt{2}}.$$

Así el área del círculo pequeño es: $\pi \left(\dfrac{\sqrt{32} - 4}{1 + \sqrt{2}} \right)^2$ y el área del cuarto de círculo de radio 4 es $\dfrac{\pi(4)^2}{4} = 4\pi$

Como el área del cuadrado es $4^2 = 16$, entonces el área sombreada está dada por:

$$16 - 4\pi - \pi \left(\frac{\sqrt{32} - 4}{1 + \sqrt{2}} \right)^2.$$

1.3. Prueba Final

1.3.1. Resultados

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la novena versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Secundaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 1542 participantes del certamen en el nivel Básico, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

CUADRO DE HONOR

1er Puesto, medalla de oro

Andrés Mauricio Reyes Mantilla

Fundación Colegio UIS, Floridablanca.

2o Puesto, medalla de plata

Juan Felipe Hoyos Muñoz

Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.

3er Puesto, medalla de bronce

Claudia Patricia Matheus

Colegio Reggio Amelia, Bucaramanga.

4o Puesto

Juan Andrés Rueda Fernández

Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.

5o Puesto

Daniel Enrique Peña León

Instituto Técnico Nacional de Comercio, Bucaramanga.

1.3.2. Prueba Final: 28 octubre

1. Alicia escribe el siguiente texto:

NOS VEMOS EL DOMINGO.

Bernardo lo reescribe a tres renglones (filas) así:

N E E M O

O V M S L O I G

S O D N

y César lee por renglones y en bloques de tres letras lo que escribe Bernardo así:

NEE MOO VMS LOI GSO DN.

Si Alicia escribió un segundo texto, el cual reescribió Bernardo y luego leyó César así:

EMO ULO IGN PEO DNO D.

¿cuál fue el segundo texto escrito por Alicia?

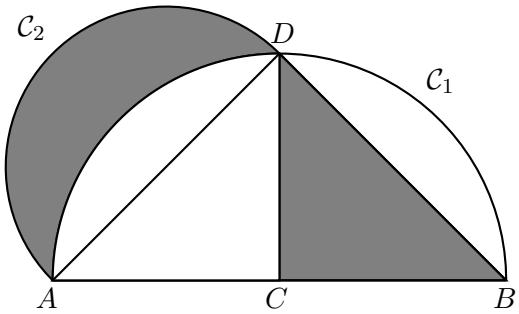
2. Sean $a = 3b + 2c$, $b = 4c - a$ y $c^2 - 5c - 24 = 0$ (con $a,\ b,\ c$ enteros positivos). Halle el valor de $a,\ b,\ c$ y determine si el número $a \times b + c$ es múltiplo de 12.

3. Sean C_1 una circunferencia que pasa por un punto B con centro en un punto A, C_2 la circunferencia que pasa por A con centro en B y C un punto de intersección de las dos circunferencias. Si una altura del triángulo ABC mide $\sqrt{3}$, determine el área que se encuentra en la intersección de las circunferencias y fuera del triángulo.

4. Si n es un entero positivo, diremos que la sucesión finita de enteros positivos $n_1, n_2, \ldots, n_k$ es un partición de n si $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ (sin importar el orden de los sumandos). En tal caso cada sumando n_i es llamado una **parte** de la partición. Verifique que el número de particiones de 7 donde ninguna de sus partes es divisible por 3 es igual al número de particiones de 7 cuyas partes aparecen a lo más dos veces.

5. En una urna se encuentran 1000 balotas etiquetadas usando los números de 1 a 1000. ¿Cuál es la menor cantidad de balotas que deben extraerse de forma aleatoria para poder afirmar que exactamente una de ellas es múltiplo de 3, 5 y 7?

6. En la siguiente gráfica, C es el centro del semicírculo $\mathcal{C}_1$, el triángulo ADB es isósceles en D, y $\overline{AD}$ es diámetro del semicírculo $\mathcal{C}_2$. Halle la razón entre las áreas sombreadas.



1.3.3. Solución

1. Escribiendo el texto de la forma que lo hizo Bernardo tenemos lo siguiente:

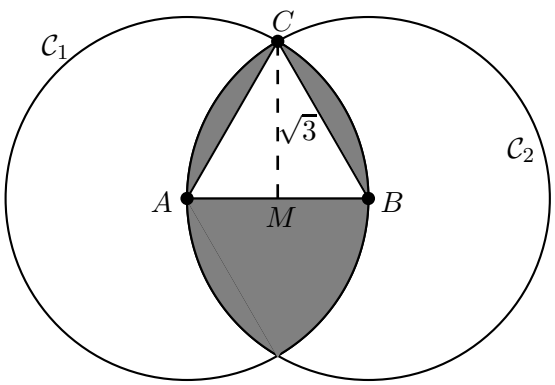
```
E       M       O       U
  L   O   I   G   N   P   E   O
    D       N       O       D
```

Por lo tanto el texto escrito por Alicia fue:

EL DOMINGO NO PUEDO.

2. Factorizando la ecuación $c^2 - 5c - 24 = 0$ se tiene $(c-8)(c+3) = 0$. Como c es un número entero positivo, el valor de c es 8. Reemplazando $c = 8$ en $b = 4c - a$ tenemos $b = 32 - a$. Ahora sustituyendo $c = 8$ y $b = 32 - a$ en la ecuación $a = 3b + 2c$ obtenemos que $a = 28$. De ahí que los valores de a, b y c son $28, 4$ y 8, respectivamente. Luego el número $a \times b + c = 28 \times 4 + 8 = 120$ es divisible entre 12.

3. La siguiente figura es un bosquejo de la construcción según las condiciones del enunciado, donde el área de la región sombreada es la que desea calcular:



Sean M el punto medio de $\overline{AB}$, R_1 la región delimitada bajo la circunferencia C_1 y por encima del segmento $\overline{CB}$, R_2 la región delimitada bajo la circunferencia C_2 y el segmento $\overline{AC}$, y R_3 la región delimitada entre ambas circunferencias y debajo del triángulo ABC. El área de la región R sombreada equivale a la suma de las áreas de las regiones R_1, R_2 y R_3. Calculemos cada una de ellas.

El triángulo ABC es equilátero pues sus lados corresponden con radios de las circunferencias C_1 y C_2. Si r es la medida de dicho radio, entonces $r = AC = AB$. Por el teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo AMC tenemos que

$$r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2.$$

Luego $r = 2$. Así, el área del triángulo ABC viene dada por

$$A_{\triangle ABC} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Nótese ahora que calcular el área de la región R_1 corresponde a calcular la diferencia entre el área del sector circular[2] $\widehat{CAB}$ y el área del triángulo ABC. Para ello observe que el radio del sector circular mide $r = 2$ y su ángulo, medido en radianes, es $\pi/3$ por ser el triángulo ABC equilátero. De modo que su área viene dada por

$$A_{\widehat{CAB}} = \frac{2\pi}{3}.$$

Así el área de la región R_1 es

$$A_{R_1} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

El área de la región R_2 es, por simetría, igual al área de la región R_1. El área de la región R_3 se puede hallar notando que R_3 es la unión de un sector circular de radio $r = 2$ y ángulo $\pi/3$, y una región congruente a las regiones R_1 y R_2, de modo que

$$A_{R_3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

[2]Recuerde que el área de un sector circular determinado por un radio r y un ángulo θ medido en radianes viene dado por la expresión $\frac{\theta r^2}{2}$.

En conclusión, tenemos que el área de la región sombreada es

$$A_R = A_{R_1} + A_{R_2} + A_{R_3} = \frac{8\pi}{3} - 3\sqrt{3}.$$

4. De la definición se obtienen exactamente 15 particiones de 7 que listaremos a continuación y que denotaremos por $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$:

$p_1 : 7$

$p_2 : 6 + 1$

$p_3 : 5 + 2$

$p_4 : 5 + 1 + 1$

$p_5 : 4 + 3$

$p_6 : 4 + 2 + 1$

$p_7 : 4 + 1 + 1 + 1$

$p_8 : 3 + 3 + 1$

$p_9 : 3 + 2 + 1 + 1$

$p_{10} : 3 + 1 + 1 + 1 + 1$

$p_{11} : 3 + 2 + 2$

$p_{12} : 2 + 2 + 2 + 1$

$p_{13} : 2 + 2 + 1 + 1 + 1$

$p_{14} : 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

$p_{15} : 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Ahora, aplicando las condiciones del problema tenemos:

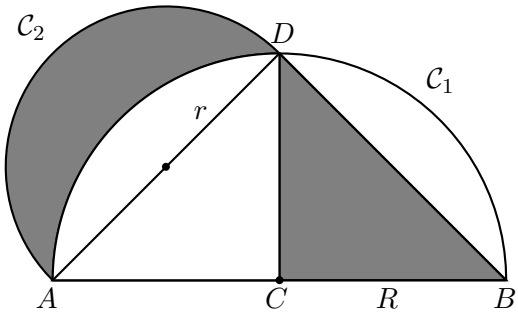
Las particiones de 7 que tienen partes que no son divisibles por 3 son: p_1, p_3, p_4, p_6, p_7, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}.

Las particiones de 7 cuyas partes aparecen a lo sumo dos veces son: p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_8, p_9, p_{11}.

En cada caso tenemos 9 particiones con las condiciones exigidas.

5. La menor cantidad de balotas que deben extraerse de forma aleatoria para poder afirmar que una de ellas es múltiplo de 3, 5 y 7 es equivalente a encontrar la menor cantidad de balotas que deben extraerse aleatoriamente para asegurar que una de ellas es múltiplo de $3 \times 5 \times 7 = 105$. Dado que los múltiplos de 105 que hay de 1 hasta 1000 son 9, entonces el menor número de balotas que deben extraerse es 992.

6. Considere la siguiente figura:



Sean R y r los radios de los semicírculos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ respectivamente. Note que $\overline{DC}$ es altura del triángulo ADB, ya que este es isósceles en D y C es el centro del semicírculo $\mathcal{C}_1$. De modo que el triángulo ACD es rectángulo en C. Así, por el teorema de Pitágoras se tiene que $(2r)^2 = R^2 + R^2$, luego $r^2 = \dfrac{R^2}{2}$.

Por otra parte, observe que el área del triángulo DCB es $\dfrac{R \times R}{2} = \dfrac{R^2}{2}$, mientras que el área sombreada en el semicírculo $\mathcal{C}_2$ es:

$$\frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi R^2}{4} + \frac{R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi R^2}{4} + \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{2}.$$

Por lo tanto la razón entre las áreas sombreadas es 1.

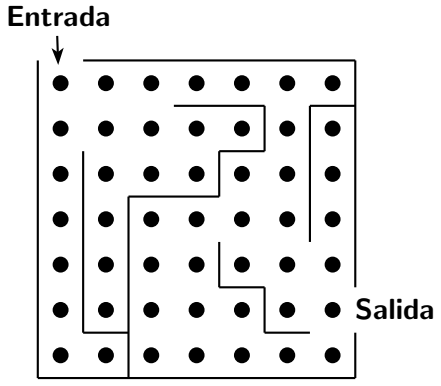
Capítulo 2

Nivel Medio

2.1. Prueba Clasificatoria

2.1.1. Prueba Clasificatoria: 25 de agosto

1. Cada uno de los puntos en el laberinto representa un trozo de zanahoria. ¿Cuál es la máxima cantidad de trozos de zanahoria que un conejo puede recoger desde la entrada hasta la salida, teniendo en cuenta que no puede pasar dos veces por un mismo punto y que los movimientos permitidos son vertical y horizontalmente?

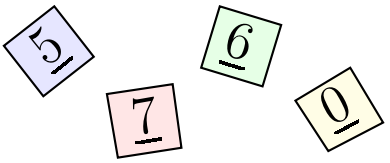


(*a*) 12 (*b*) 26 (*c*) 30 (*d*) 33

2. ¿Cuál es el menor número de rectas que se deben dibujar (en el plano) para obtener 8 cuadrados?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 10

3. Iván juega a formar números con las siguientes cuatro tarjetas:



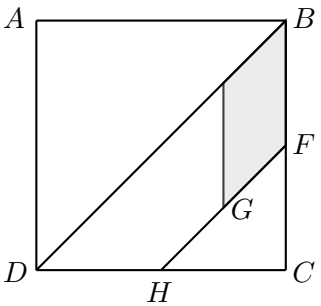
De los números con cuatro cifras que Iván puede formar con sus tarjetas, **NO** es correcto afirmar que:

(a) ninguno es múltiplo de 11.
(b) todos son múltiplos de 3.
(c) la mitad son impares.
(d) 10 son múltiplos de 6.

4. Sean p y q enteros y x un número real distinto de cero. Podemos asegurar que la expresión $x^{\frac{p}{q}}$ representa un número real cuando

(a) $q \neq 0$.
(b) q es par.
(c) p es impar y q par.
(d) p es par y q impar.

5. En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado de lado l y F, H, G son los puntos medios de los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{DC}$ y $\overline{FH}$ respectivamente. ¿Cuál es el área del paralelogramo sombreado?



(a) $\frac{1}{6}\, l^2$
(b) $\frac{1}{8}\, l^2$
(c) $\frac{1}{12}\, l^2$
(d) $\frac{1}{16}\, l^2$

6. Sea R un rectángulo. ¿Cuántos círculos que están en el mismo plano que R tienen un diámetro cuyos dos extremos son vértices de R?

(a) 4 (b) 6 (c) 5 (d) 12

7. El término $n-$ésimo de una sucesión está dado por

$$x_1 = 3 \text{ y } x_n = \begin{cases} x_{n-1} + 2, & \text{si } n \text{ es par} \\ x_{n-1} + 3, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \text{, para } n > 1.$$

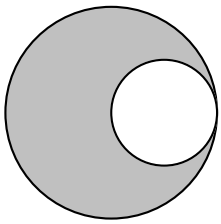
¿Cuál es el término 2016 de esta sucesión?

(a) 5.040 (b) 5.043 (c) 5.045 (d) 10.088

8. Se escribe 1998 como producto de dos enteros positivos tales que la diferencia positiva entre ellos sea la menor posible. ¿Cuál es esta diferencia?

(a) 7 (b) 13 (c) 17 (d) 47

9. La siguiente figura muestra dos circunferencias tangentes entre sí.



Para hallar el área sombreada de la figura **NO** es suficiente conocer:

(a) el área de los dos círculos.

(b) la longitud de cada circunferencia.

(c) la longitud de la circunferencia menor y que esta pasa por el centro de la mayor.

(d) la longitud de la circunferencia mayor y el punto de tangencia con la circunferencia menor.

10. Andrés se dirige a una floristería. Allí le dicen que un ramo de flores pequeño y uno grande cuestan respectivamente $\$20.000$ y $\$70.000$. Si Andrés pagó en total $\$300.000$ por la compra 10 ramos entre pequeños y grandes, ¿cuál es la diferencia positiva entre la cantidad de ramos grandes y la cantidad de ramos pequeños que compró?

(a) 2 (b) 8 (c) 6 (d) 4

11. Para cada número entero positivo n; considere el triángulo T_n, cuyos vértices están en los puntos $(0,0)$, $(1,n)$ y $(n,1)$. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa el área de T_n?

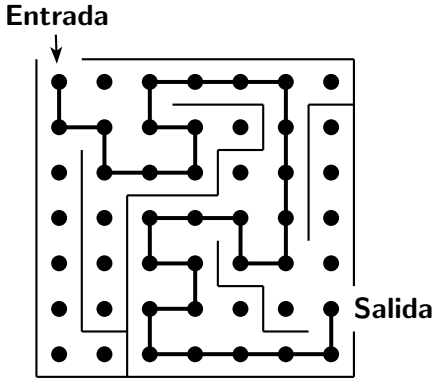
(a) $\dfrac{n^2-1}{2}$ (b) $\dfrac{n^2}{2}$ (c) $\dfrac{(n-1)^2}{2}$ (d) $\dfrac{2n-1}{2}$

12. En una lista se escriben los números naturales del 1 hasta el 1000. ¿Cuántas veces aparece el uno en dicha lista?

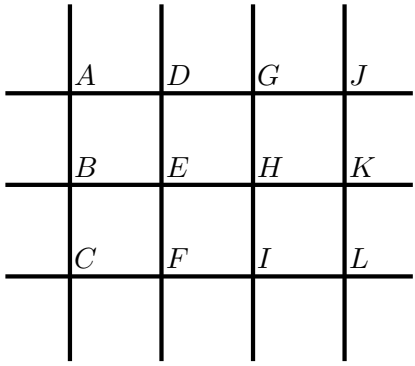
(a) 301 (b) 275 (c) 293 (d) 321

2.1.2. Solución

1. En la siguiente figura se muestra una forma en la que el conejo puede atravesar el laberinto teniendo en cuenta los movimientos permitidos y tomando la mayor cantidad de trozos de zanahoria. Cabe resaltar que pueden hacerse unos pequeños cambios en el camino, pero eso no altera que la máxima cantidad de puntos por los que se puede pasar sea igual a 30.



2. En la siguiente figura formada por siete rectas se muestran ocho cuadrados: $ABED$, $BCFE$, $DEHG$, $EFIH$, $GHKJ$, $HILK$, $ACIG$ y $DFLJ$.



Observe que al eliminar cualquier de esas siete rectas ya no es posible construir ocho cuadrados.

3. Los números de cuatro cifras que Iván puede formar con las cuatro tarjetas son los siguientes:

$$\begin{array}{cccccc} 5760, & 5706, & 5670, & 5607, & 5076, & 5067, \\ 6750, & 6705, & 6570, & 6507, & 6075, & 6057, \\ 7560, & 7506, & 7650, & 7605, & 7056, & 7065. \end{array}$$

Note que en la lista anterior hay 18 números de los cuales 8 son impares, por lo tanto NO es correcto afirmar que la mitad de estos números sean impares. Para ver que las demás afirmaciones son correctas considere las siguientes observaciones:

- Todos números de la lista anterior son múltiplos de 3, debido a que la suma de sus cifras es 18 el cual es múltiplo de 3.
- En la lista hay 10 números que son múltiplos de 2 y por el inciso anterior esos 10 números son múltiplos de 6.
- Usando el criterio de divisibilidad para el 11 que establece que *un número es divisible entre* 11 *si y solo si la diferencia entre la suma de los dígitos que ocupan las posiciones impares y la suma de los dígitos que ocupan las posiciones pares es cero o múltiplo de* 11; se verifica fácilmente que ningún número de la lista es múltiplo de 11.

4. Sean p y q números enteros y x un número real diferente de cero. Veamos los siguientes casos:

- Si p y q son ambos positivos o ambos negativos y p es par, entonces x^p es positivo y en tal caso la raíz $q-$ésima de x^p está definida para cualquier valor de q, es decir la expresión $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ representa un número real.
- Si p y q tienen signo contrario, es decir $\dfrac{p}{q} < 0$. Entonces

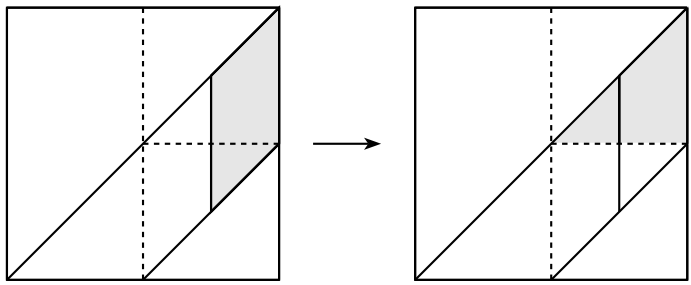
$$x^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[|q|]{x^{|p|}}},$$

donde $\sqrt[|q|]{x^{|p|}}$, como en el caso anterior, representa un número real, que además es diferente de cero pues $x \neq 0$.

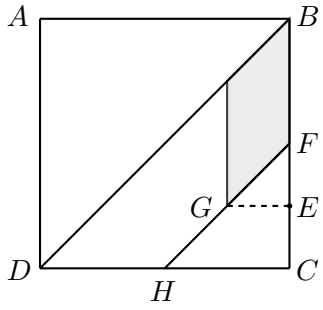
- Si $p = 0$ y q impar, entonces $x^{\frac{p}{q}} = x^0 = 1$ es un número real.

De los anteriores casos se concluye que si p es par y q impar, entonces la expresión $x^{\frac{p}{q}}$ representa un número real. Por otra parte, tomando $p = 1$, $q = 2$ y $x = -1$, notamos que la expresión $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ no es número real; este ejemplo permite descartar las demás opciones.

5. **Solución** 1. En la siguiente gráfica se observa que el área del paralelogramo sombreado equivale a $\dfrac{1}{8}$ de área del cuadrado de lado l, es decir $\dfrac{1}{8}\,l^2$.



Solución 2. Para calcular el área del paralelogramo sombreado se necesita conocer las medidas de su base y altura. Considere la siguiente figura en la que $\overline{GE}$ es perpendicular a $\overline{BC}$ en E.

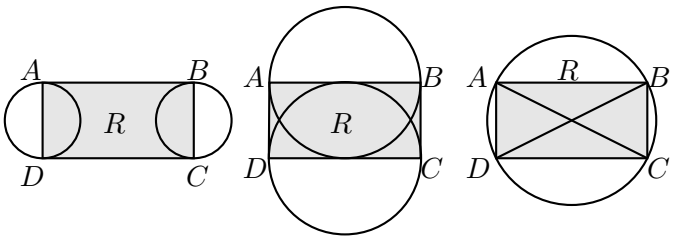


Tomando $BF = l/2$ como base del paralelogramo sombreado, enton-

ces GE es su altura. Además, por el teorema de Tales[1] se tiene que los triángulos FGE y FHC son semejantes con razón de 1 a 2, luego $GE = l/4$. Por lo tanto el área del paralelogramo sombreado es

$$\frac{l}{2} \times \frac{l}{4} = \frac{l^2}{8}.$$

6. Considerando que el rectángulo R tiene vértices A, B, C y D, los círculos que tienen un diámetro cuyos dos extremos son vértices de R, son aquellos que tienen como diámetro a $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$. Note que las diagonales del rectángulo son diámetros del mismo círculo. En total se pueden formar 5 círculos.



7. **Solución** 1. Según la definición de la sucesión, el primer término es 3 y cada término a partir del segundo es la suma del término anterior más 2 si el término ocupa una posición par en la sucesión, o más 3 si ocupa una posición impar. De modo que para calcular el término que ocupa la posición 2016 basta multiplicar la cantidad de números naturales impares menores que 2016 por 3 y sumar este resultado al producto de la cantidad de números naturales pares menores e iguales a 2016 por 2. Como hasta el número 2016 hay 1008 números naturales impares y 1008 números naturales pares, entonces

$$x_{2016} = 1008 \times 3 + 1008 \times 2 = 5040.$$

[1] Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

Solución 2. Siguiendo la fórmula para calcular los términos de la sucesión tenemos que:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 3, & x_4 = 10, & x_7 = 18, & x_{10} = 25, \\ x_2 = 5, & x_5 = 13, & x_8 = 20, & \ldots \\ x_3 = 8, & x_6 = 15, & x_9 = 23, & \end{array}$$

Observe que los términos con índice par son un múltiplo de 5, específicamente el término $x_{2k} = 5k$, con k un número natural. Por lo tanto

$$x_{2016} = x_{1008\times 2} = 1008 \times 5 = 5040.$$

8. El conjunto de divisores de 1998 es:

$$D_{1998} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 37, 54, 74, 111, 222, 333, 666, 999, 1998\}.$$

Estos divisores pueden agruparse en parejas de modo que su producto sea 1998, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{llll} (1, 1998) & (3, 666) & (9, 222) & (37, 54) \\ (2, 999) & (6, 333) & (18, 111) & (27, 74) \end{array}$$

La pareja $(37, 54)$ es aquella en la cual la diferencia entre los términos es la menor y esta diferencia es 17.

9. Es suficiente (a) ya que el área de la región sombreada se puede calcular como la diferencia entre el área del círculo grande y el círculo pequeño.

Es suficiente (b) pues conociendo la longitud de cada circunferencia se conocerán sus radios y, por consiguiente, se podrán calcular sus áreas.

Es suficiente (c) porque, como en (b), se conocerá el radio de la circunferencia más pequeña y si esta pasa por el centro de la circunferencia grande, el radio de la circunferencia grande será el doble del radio de

la circunferencia pequeña. Conociendo los radios se puede calcular el área de los dos círculos y por tanto el de la región sombreada.

No es suficiente (d) debido a que no se tienen condiciones sobre el radio de la circunferencia más pequeña, hecho que imposibilita el cálculo de su área y, por tanto, el de la región sombreada.

10. **Solución** 1. Teniendo en cuenta que Andrés compró 10 ramos entre grandes y pequeños, la siguiente tabla registra todas las posibilidades en que pudo hacer el pedido:

Ramos pequeños	Ramos grandes	Costo del pedido
0	10	700.000
1	9	650.000
2	8	600.000
3	7	550.000
4	6	500.000
5	5	450.000
6	4	400.000
7	3	350.000
8	2	300.000
9	1	250.000
10	0	200.000

Como Andrés pagó 300.000 por su pedido, concluimos que compró 8 ramos pequeños y 2 ramos grandes, luego la diferencia positiva entre las cantidades de ramos comprados es 6.

Solución 2. Del enunciado se plantea el siguiente sistema de ecuaciones

$$r + R = 10,$$
$$20000r + 70000R = 300000;$$

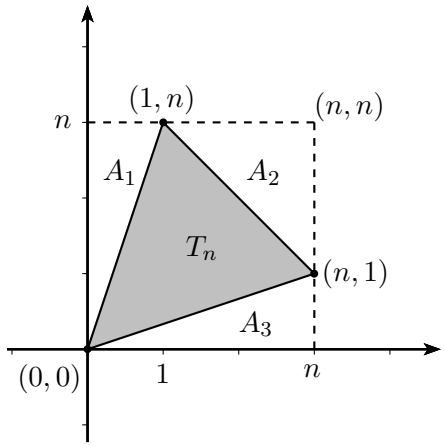
donde r es la cantidad de ramos pequeños y R la cantidad de ramos grandes.

De la primera ecuación se tiene que $r = 10 - R$, luego

$$\begin{aligned} 20000(10 - R) + 70000R &= 300000, \\ 50000R &= 100000, \\ R &= 2; \end{aligned}$$

por lo tanto $r = 8$. Así, la diferencia positiva entre la cantidad de ramos grandes y la cantidad de ramos pequeños que compró Andrés es 6.

11. Sea n un entero positivo. Considere la siguiente figura:



Sean A_1, A_2 y A_3 las áreas de los triángulos no sombreados dentro del cuadrado de lado n con vértices en $(0,0)$, $(0,n)$, $(n,0)$ y (n,n), como se muestra en la figura. Entonces

$$A_1 = A_3 = \frac{n \times 1}{2} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{(n-1) \times (n-1)}{2} = \frac{(n-1)^2}{2}.$$

Note que el área $A_{(T_n)}$ del triángulo T_n está dada por:

$$A_{(T_n)} = n^2 - A_1 - A_2 - A_3.$$

Por tanto, la expresión para calcular el área de T_n viene dada por:

$$A_{(T_n)} = n^2 - \frac{(n-1)^2}{2} - 2\left(\frac{n \times 1}{2}\right) = \frac{n^2 - 1}{2}.$$

12. Para establecer la cantidad de unos en la lista tenga en cuenta la siguiente tabla:

Rango	*Cantidad de unos*
Del 1 al 9	1
Del 10 al 19	11
Del 20 al 99	8
Del 100 al 109	11
Del 110 al 119	21
Del 120 al 199	88
Del 200 al 999	$20 \times 8 = 160$
1000	1
Total	301

2.2. Prueba Selectiva

2.2.1. Prueba Selectiva: 22 de septiembre

1. Vanesa, Jesús, Tatiana y Camilo jugaron al amigo secreto y para dar los regalos fueron a cenar a un restaurante. Ellos se regalaron entre sí: una gorra, un balón, una camiseta y una caja de chocolates. De cenar pidieron: una hamburguesa, un perro caliente, una porción de pizza y una ensalada. Si cada uno recibió un regalo diferente y comió algo diferente, determine qué regalo recibió Jesús y lo que comió sabiendo que:

- Camilo comió pizza y no recibió el balón ni los chocolates.
- Vanesa recibió los chocolates y no comió perro caliente.
- Tatiana recibió una gorra y no comió perro caliente ni hamburguesa.

(a) Balón y perro caliente.

(b) Camiseta y pizza.

(c) Gorra y ensalada.

(d) Chocolates y hamburguesa.

2. Una fábrica de muebles en crecimiento tenía cierto número de empleados y decide despedir a uno de ellos. Si el número de empleados que contratará es cinco veces los que le quedaron, y el cuadrado del número de empleados que tenía es igual al doble de la cantidad de empleados que contratará más 21 empleados. ¿Cuántos empleados contratará la fábrica?

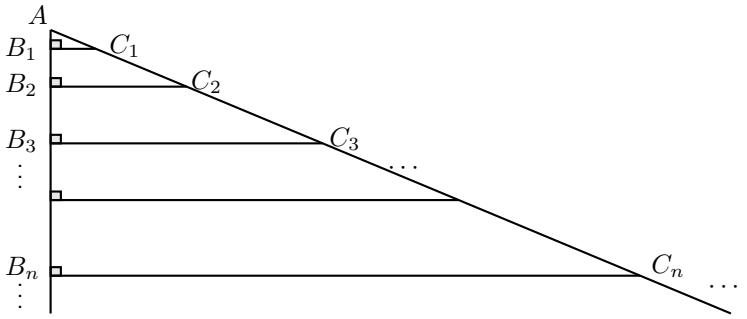
(a) 10

(b) 11

(c) 50

(d) 55

3. En la siguiente figura el triángulo AB_nC_n es rectángulo en B_n, para cada $n \in \mathbb{N}$. ¿Cuál de las siguientes cantidades es mayor si $AB_1 < B_1C_1$?



(a) $AB_{n-2} \times B_{n+2}C_{n+2}$ (c) $AB_{n-3} \times B_{n+2}C_{n+2}$

(b) $AB_{n+2} \times AC_{n+2}$ (d) $B_{n+2}C_{n+2} \times AC_{n+2}$

4. ¿Con cuántos ceros termina la expresión $33!$?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8

5. Jaime tiene una colección de 120 zapatos. Si uno de cada tres es deportivo, cuatro de cada cinco tienen cordones negros y siete de cada diez están nuevos. Entonces la mayor cantidad de zapatos que pueden ser deportivos nuevos con cordones negros es

(a) 24 (b) 40 (c) 84 (d) 60

6. Sea ABC un triángulo. Se construyen los puntos Q sobre $\overline{AC}$, S sobre $\overline{BC}$ de tal forma que $CQ = \dfrac{AC}{3}$ y $SC = \dfrac{BC}{3}$. Entonces **NO** es correcto afirmar que:

(a) $\triangle QSC$ es semejante a $\triangle ABC$ con razón de 1 a 3.

(b) El área de $\triangle ABC$ es 9 veces el área de $\triangle QSC$.

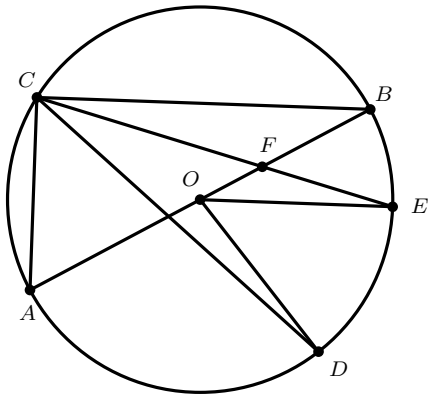
(c) La altura del $\triangle ABC$ con respecto a $\overline{AC}$ y la altura de $\triangle QSC$ con respecto a $\overline{QC}$ son paralelas.

(d) El perímetro de $\triangle ABC$ es 9 veces el perímetro de $\triangle QSC$.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7. Si $p(x) = ax^2 + x + 1$ y $q(x) = x^2 + ax + 1$. Halle $a \neq 1$ tal que $p(x)$ y $q(x)$ tienen una raíz común.

8. Si O es el centro de la circunferencia, $\measuredangle DOE = 50°$, $\measuredangle BAC = 60°$ y $\measuredangle ACD = 50°$, ¿cuánto mide el ángulo CFB?



9. Si n es un número formado por 9 nueves, es decir, $n = 999999999$. Halle la suma de los dígitos de n^2.

2.2.2. Solución

1. Primero observe que Camilo no recibió el balón ni los chocolates, entonces pudo recibir la gorra ó la camiseta, pero Tatiana recibió la gorra; por tanto el regalo que recibió Camilo fue la camiseta. Si Camilo recibió la camiseta, Tatiana la gorra y Vanessa los chocolates; entonces Jesús recibió el balón.

Por otra parte, note que Tatiana no comió perro caliente ni hamburguesa, entonces comió la ensalada ó la pizza; pero Camilo comió pizza, luego Tatiana comió ensalada. Como Vanessa no comió perro caliente, entonces ella comió hamburguesa. Por consiguiente, Jesús comió perro caliente.

En conclusión, Jesús recibió el balón y comió perro caliente.

2. Sean y el número de empleados que tenía la empresa antes de despedir a uno de ellos y x el número de empleados que contratará. Según las condiciones dadas en el enunciado,

$$x = 5(y-1), \tag{2.1}$$

$$y^2 = 2x + 21. \tag{2.2}$$

Reemplazando (2.1) en (2.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} 10(y-1) + 21 &= y^2 \\ 10y + 11 &= y^2 \\ y^2 - 10y - 11 &= 0 \\ (y-11)(y+1) &= 0. \end{aligned}$$

Por el contexto del problema y es un entero positivo, entonces $y = 11$ y por lo tanto $x = 5\,(11-1) = 50$.

3. Por construcción $AB_{n-3} < AB_{n-2}$ y $B_{n+2}C_{n+2} > 0$, entonces

$$AB_{n-3} \times B_{n+2}C_{n+2} < AB_{n-2} \times B_{n+2}C_{n+2}. \tag{2.3}$$

Además,

$$0 < AB_{n-2} < AB_{n+2} < B_{n+2}C_{n+2} \tag{2.4}$$

y

$$0 < B_{n+2}C_{n+2} < AC_{n+2}, \tag{2.5}$$

pues $\overline{AC_{n+2}}$ es la hipotenusa del triángulo $AB_{n+2}C_{n+2}$. De modo que por las desigualdades (2.3), (2.4) y (2.5) se tiene que:

$$\begin{aligned} AB_{n-3} \times B_{n+2}C_{n+2} &< AB_{n-2} \times B_{n+2}C_{n+2} \\ &< AB_{n+2} \times AC_{n+2} \\ &< B_{n+2}C_{n+2} \times AC_{n+2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $B_{n+2}C_{n+2} \times AC_{n+2}$ es la cantidad mayor entre las opciones.

4. Sabiendo que $33! = 33 \times 32 \times 31 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$, se puede reescribir esta expresión, usando la descomposición en factores primos, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 33! &= 2^{31} \times 3^{15} \times 5^7 \times 7^4 \times 11^3 \times 13^2 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \\ &= (2 \times 5)^7 \times 2^{24} \times 3^{15} \times 7^4 \times 11^3 \times 13^2 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \\ &= \mathbf{10^7} \times 2^{24} \times 3^{15} \times 7^4 \times 11^3 \times 13^2 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31. \end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión $33!$ termina en 7 ceros.

5. La información del enunciado permite deducir lo siguiente:

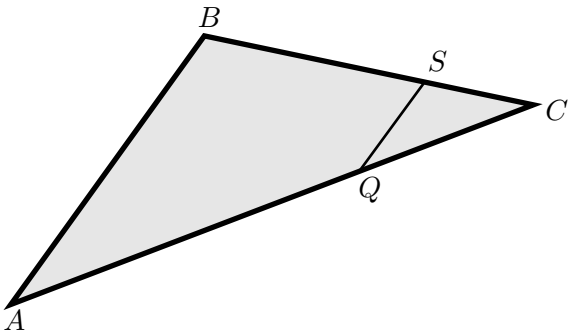
Cantidad de zapatos deportivos: $\dfrac{1}{3} \times 120 = 40$.

Cantidad de zapatos que tienen cordones negros: $\dfrac{4}{5} \times 120 = 96$.

Cantidad de zapatos nuevos: $\dfrac{7}{10} \times 120 = 84$.

Luego la mayor cantidad de zapatos que pueden ser deportivos nuevos con cordones negros es 40.

6. La siguiente figura representa la situación.



Note que los triángulos ABC y QSC son semejantes, además $AC = 3QC$, $BC = 3SC$ y $AB = 3QS$. De modo que, como el perímetro del triángulo QSC es $QC + SC + QS$ y el perímetro del triángulo ABC es $AB + BC + CA$; se tiene que:

$$\begin{aligned} AC + BC + AB &= 3QC + 3SC + 3QS \\ &= 3(QC + SC + QS). \end{aligned}$$

Esto muestra que el perímetro del triángulo ABC es el triple del perímetro del triángulo QSC, por lo tanto no es correcta la afirmación de la opción (d).

Se deja como ejercicio al lector verificar la validez de las otras afirmaciones.

7. Sea r la raíz común de $p(x)$ y $q(x)$. Entonces $p(r) = 0 = q(r)$, esto es:

$$ar^2 + r + 1 = 0, \tag{2.6}$$

$$r^2 + ar + 1 = 0. \tag{2.7}$$

Restando la ecuación (2.7) de la ecuación (2.6) obtenemos:

$$\begin{aligned} (a-1)r^2 + r(1-a) &= 0 \\ r(r(a-1) - (a-1)) &= 0 \\ r(a-1)(r-1) &= 0. \end{aligned}$$

De esta última línea tenemos que $r = 0$, $a = 1$ o $r = 1$. Pero si $r = 0$, las dos ecuaciones del primer sistema se reducen a $1 = 0$, lo cual no tiene sentido, y $a = 1$ se descarta por las condiciones del problema ($a \neq 1$). Por lo tanto $r = 1$. Reemplazando el valor de r en las ecuaciones (2.6) y (2.7) se concluye que $a = -2$ es el valor de a que hace que $p(x)$ y $q(x)$ tengan una raíz común.

8. Note que $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia, luego el triángulo ABC es rectángulo en C. Por lo tanto $\measuredangle ACB = 90^\circ$ y como $\measuredangle BAC = 60^\circ$, entonces $\measuredangle ABC = \measuredangle FBC = 30^\circ$, pues la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Por otra parte, como $\measuredangle DOE = 50^\circ$, por el teorema del ángulo central[2] se tiene que $\measuredangle DCE = 25^\circ$. De modo que

$$\begin{aligned}\measuredangle FCB &= \measuredangle ACB - \measuredangle ACD - \measuredangle DCE \\ &= 90^\circ - 50^\circ - 25^\circ \\ &= 15^\circ.\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\measuredangle CFB &= 180^\circ - \measuredangle FCB - \measuredangle FBC \\ &= 180^\circ - 15^\circ - 30^\circ \\ &= 135^\circ.\end{aligned}$$

9. Note que $n + 1 = 1.000.000.000 = 10^9$, luego

$$\begin{aligned}n^2 &= \left(10^9 - 1\right)^2 \\ &= 10^{18} - 2\left(10^9\right) + 1 \\ &= 10^9\left(10^9 - 2\right) + 1 \\ &= 10^9(999.999.998) + 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto la suma de las cifras de n^2 es $9(8) + 8 + 1 = 9(9) = 81$.

[2]Teorema del ángulo central: El ángulo central subtendido por dos puntos de una circunferencia es el doble que cualquier ángulo inscrito en la circunferencia subtendido por los mismos dos puntos.

2.3. Prueba Final

2.3.1. Resultados

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la novena versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Secundaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 1354 participantes del certamen en el nivel Medio, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

CUADRO DE HONOR

1^{er} Puesto, medalla de oro

Gabriel José Romero Reyes

Fundación Colegio UIS, Floridablanca.

2^{o} Puesto, medalla de plata

Alejandro Hernández Calderón

Colegio Cooperativo Comfenalco, Bucaramanga.

3^{er} Puesto, medalla de bronce

Karol Yatzari Ortega Monzalve

Instituto Técnico Nacional de Comercio, Bucaramanga.

4^{o} Puesto

Juan David Saavedra Lozada

Colegio Santa Cruz de La Nueva Baeza, San Gil.

5^{o} Puesto

Daniel Morales Rangel

Fundación Colegio UIS, Floridablanca.

2.3.2. Prueba Final: 28 de octubre

1. Alicia escribe el siguiente texto:

NOS VEMOS EL DOMINGO.

Bernardo lo reescribe a tres renglones (filas) así:

N E E M O

O V M S L O I G

S O D N

y César lee por renglones y en bloques de tres letras lo que escribe Bernardo así:

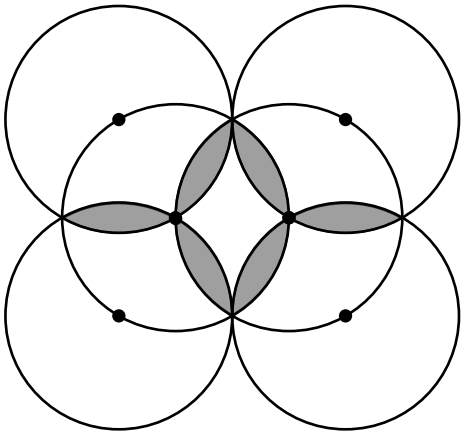
NEE MOO VMS LOI GSO DN.

Si Alicia escribió un segundo texto, el cual reescribió Bernardo y luego leyó César así:

EMO ULO IGN PEO DNO D,

¿cuál fue el segundo texto escrito por Alicia?

2. Si en la siguiente figura las circunferencias son de radio $1\ cm$, con centros en los puntos señalados, ¿cuánto mide el área de la región sombreada?



3. En una pizarra infinita se escriben en fila y en orden ascendente los números naturales (sin incluir el cero). Luego, se borran los números que son cuadrados perfectos. En esta nueva lista, ¿qué número ocupa la posición 1001?

4. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Si c es la longitud de su hipotenusa, muestre que:

$$abc = \sqrt{\frac{c^6 - b^6 - a^6}{3}}.$$

5. Halle todos los primos p de dos cifras tales que la cifra de las unidades de p^{2017} es 7.

6. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Se construye D sobre la extensión de $\overline{BC}$ de tal manera que $BC = CD$, de la misma manera se extiende $\overline{CA}$ hasta E de manera tal que $AE = 2AC$. Muestre que $BE = AD$.

2.3.3. Solución

1. Escribiendo el texto de la forma que lo hizo Bernardo tenemos lo siguiente:

```
E       M       O       U
  L   O   I   G   N   P   E   O
    D       N       O       D
```

Por lo tanto el texto escrito por Alicia fue:

EL DOMINGO NO PUEDO.

2. Considere las siguientes figuras:

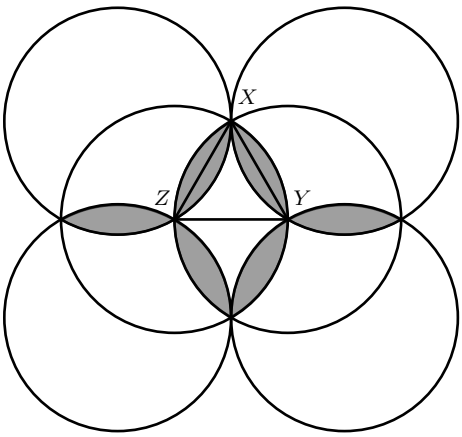


Figura 1.

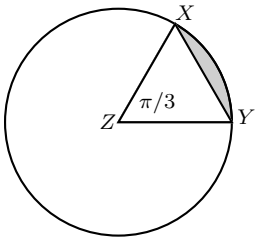


Figura 2.

Note que el triángulo XYZ es equilátero con área $A = \frac{\sqrt{3}}{4}\,cm^2$, pues sus lados corresponden a radios de circunferencias con radio $1\,cm$.

Por otra parte, el sector circular XZY señalado en la Figura 2. tiene $1\,cm$ de radio y su ángulo barrido mide $\dfrac{\pi}{3}$ radianes, luego su área es:

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}\,cm^2.$$

De modo que el área sombreada en la Figura 2. está dada por:

$$S - A = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi - 6\sqrt{3}}{24}\, cm^2.$$

Observe que el área sombreada en la Figura 1. equivale a 12 veces el área sombreada en la Figura 2. Por lo tanto el área sombreada es:

$$12 \times \frac{4\pi - 6\sqrt{3}}{24} = 2\pi - 3\sqrt{3}\, cm^2.$$

3. La lista de los números cuadrados perfectos es la siguiente:

$$1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ \ldots,\ 32^2 = 1024,\ 33^2 = 1089,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots$$

Por otro lado, si listamos los números naturales en una pizarra y tachamos los cuadrados perfectos se tiene lo siguiente:

$$\not{1},\ 2,\ 3,\ \not{4},\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \not{9},\ \ldots,\ \not{1024},\ \ldots$$

Note que hasta el 1025 se han quitado 32 números, entonces 1025 ocupa la posición $993 = 1025 - 32$. Por lo tanto en la posición 1001 queda el número 1033.

4. Dado que a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo y c es la medida de la hipotenusa, el teorema de Pitágoras establece que $c^2 = a^2 + b^2$. Luego,

$$c^6 = \left(a^2 + b^2\right)^3 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6,$$
$$c^6 - b^6 - a^6 = 3a^2b^2c^2.$$

Por lo tanto $abc = \sqrt{\dfrac{c^6 - b^6 - a^6}{3}}$.

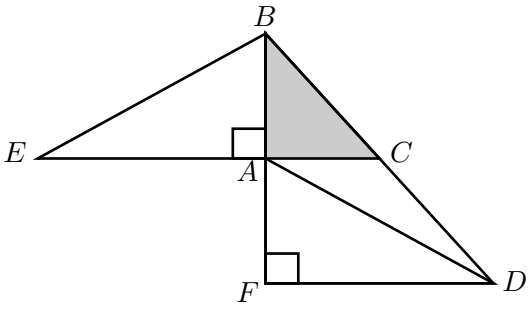
5. Note que dado un número de dos cifras ab, donde b es la cifra de las unidades y a la de las decenas; se tiene que la cifra de las unidades del número $(ab)^n$ coincide con la cifra de las unidades de b^n, para n un

número natural. Además los números primos de dos cifras terminan en 1, 3, 7 y 9. Descartamos los primos que terminan en 1 ya que según lo anterior sus potencias siempre terminan en 1. Así que basta considerar las potencias de los dígitos: 3, 7 y 9. En la siguiente tabla vemos que las potencias de 9 nunca terminan en 7 y además la cifra de las unidades de las potencias de 3 y 7 se repiten cada 4 potencias:

$3^1 = \textcircled{3}$	$7^1 = \textcircled{7}$	$9^1 = \textcircled{9}$
$3^2 = \textcircled{9}$	$7^2 = 4\textcircled{9}$	$9^2 = 8\textcircled{1}$
$3^3 = 2\textcircled{7}$	$7^3 = 34\textcircled{3}$	$9^3 = 72\textcircled{9}$
$3^4 = 8\textcircled{1}$	$7^4 = 2.40\textcircled{1}$	$9^4 = 6.56\textcircled{1}$
$3^5 = 24\textcircled{3}$	$7^5 = 16.80\textcircled{7}$	$9^5 = 59.04\textcircled{9}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Como $2017 = 4 \times 504 + 1$, es decir deja residuo 1 al dividirse entre 4, entonces los números primos de dos cifras que nos interesa encontrar son todos los que terminan en 7, a saber: $17, 37, 47, 67$ y 97.

6. Considere la siguiente construcción auxiliar, donde el ángulo AFD es recto. Bastará demostrar que los triángulos ABE y AFD son congruentes.



Observe que por construcción los triángulos ABC y FBD son semejantes ya que son rectángulos y comparten un ángulo interno menor que $90°$. Además, C es punto medio de $\overline{BD}$, de modo que:

$$\frac{BA}{BF} = \frac{AC}{FD} = \frac{BC}{BD} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $2BA = BF = BA + AF$, luego $BA = AF$ y además $FD = 2AC = AE$. De esta manera, por el criterio de congruencia para triángulos LAL (Lado-Ángulo-Lado), se concluye que los triángulos ABE y AFD son congruentes, de ahí que $BE = AD$.

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

3.1.1. Prueba Clasificatoria: 25 de agosto

1. La nota de la prueba clasificatoria es un elemento del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que deben presentar la prueba para que por lo menos 10 de ellos obtengan la misma nota?

(a) 45

(b) 46

(c) 50

(d) 51

2. Sean p y q enteros y x un número real distinto de cero. Podemos asegurar que la expresión $x^{\frac{p}{q}}$ representa un número real cuando

(a) $q \neq 0$.

(b) q es par.

(c) p es impar y q par.

(d) p es par y q impar.

3. Para cada número entero positivo n; considere el triángulo T_n, cuyos vértices están en los puntos $(0,0)$, $(1,n)$ y $(n,1)$. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa el perímetro de T_n?

(a) $2(n+1)+\sqrt{2}(n-1)$

(b) $3\sqrt{n^2+1}$

(c) $3\sqrt{2}(n-1)$

(d) $2\sqrt{n^2+1}+(n-1)\sqrt{2}$

4. El término $n-$ésimo de una sucesión tiene n cifras y se construye alternando las cifras 5 y 7 empezando en 5. Por ejemplo:

$$x_1 = 5,\ x_2 = 57,\ x_3 = 575,\ x_4 = 5757,\ x_5 = 57575, \ldots$$

¿Cuántos términos de la sucesión son primos?

(a) infinitos (b) ninguno (c) 2 (d) 1

5. La expresión $h(x) = -x^2 + 8x + 10$ modela la altura de un globo meteorológico en función del número de horas. Si el globo se suelta a las $8:00$ a.m. desde la azotea de un edificio, ¿a qué hora alcanza su altura máxima?

(a) $4:00$ p.m.

(b) $10:00$ a.m.

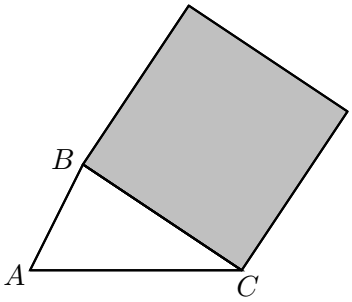
(c) $12:00$ m.

(d) $2:00$ p.m.

6. ¿Cuál es el residuo de dividir $30 + 300 + 3000 + \cdots + 3 \times 10^{2017}$ entre 11?

(a) 8 (b) 3 (c) 2 (d) 0

7. En la siguiente figura se muestra un triángulo y un cuadrado con un lado en común.



Si se desea hallar el área del cuadrado es suficiente conocer

(a) que el triángulo es rectángulo y la medida de uno de sus lados.

(b) la longitud de dos lados del triángulo.

(c) la medida de los ángulos internos del triángulo.

(d) la medida de dos ángulos internos del triángulo y la longitud de uno de sus lados.

8. Si a es la medida de una altura de un triángulo y b es la medida de la correspondiente base, es correcto afirmar que el área del triángulo siempre es menor o igual que:

(a) $2\sqrt{ab}$ (b) $\dfrac{a+b}{2}$ (c) $\dfrac{a^2+b^2}{4}$ (d) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

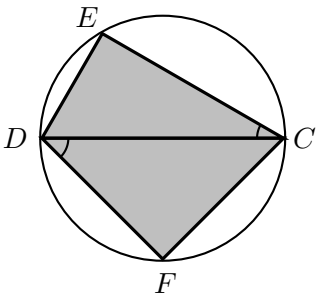
9. ¿Cuál es el dígito de las unidades del número $1! + 2! + 3! + \cdots + 2017!$?

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

10. Gabriel compró manzanas y cocos y pagó $\$17.700$. Si las manzanas costaran $\$500$ más y los cocos $\$300$ menos, tendría que pagar $\$2.000$ más que antes. Entonces la menor cantidad de frutas que pudo comprar Gabriel es:

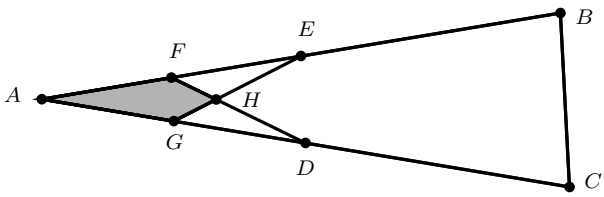
(a) 10 (b) 12 (c) 20 (d) 28

11. En la siguiente figura el círculo tiene de diámetro $DC = 4\ cm$ y E, F son puntos de la circunferencia. Si el ángulo DCE mide $30°$ y el ángulo CDF mide $45°$, ¿cuál es el área, en centímetros cuadrados, de la región sombreada?



$(a)\ 4+2\sqrt{3}$ $(b)\ 8$ $(c)\ 4+2\sqrt{2}$ $(d)\ 4\pi+2\sqrt{3}$

12. En la siguiente figura D, G, E y F son los puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AE}$ respectivamente. Si el área del triángulo ABC es $36\,cm^2$, ¿cuál es el área de la región sombreada?



$(a)\ 3\,cm^2$ $(b)\ 9\,cm^2$ $(c)\ 6\,cm^2$ $(d)\ 4\,cm^2$

3.1.2. Solución

1. Luego de presentar la prueba Clasificatoria podemos agrupar a los estudiantes, según la nota obtenida, en 5 grupos (uno por cada posible nota). El "peor de los casos" para esta situación es que en cada grupo hayan 9 estudiantes, 45 en total; en tal caso, con un estudiante más podemos asegurar que en un grupo hay por lo menos 10 estudiantes. De modo que si 46 estudiantes presentan la prueba, podemos asegurar, por el Principio del Palomar[1], que por lo menos 10 obtienen la misma nota.

2. Sean p y q números enteros y x un número real diferente de cero. Veamos los siguientes casos:

- Si p y q son ambos positivos o ambos negativos y p es par, entonces x^p es positivo y en tal caso la raíz $q-$ésima de x^p está definida para cualquier valor de q, es decir la expresión $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ representa un número real.
- Si p y q tienen signo contrario, es decir $\dfrac{p}{q} < 0$. Entonces

$$x^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[|q|]{x^{|p|}}},$$

  donde $\sqrt[|q|]{x^{|p|}}$, como en el caso anterior, representa un número real, que además es diferente de cero pues $x \neq 0$.
- Si $p = 0$ y q impar, entonces $x^{\frac{p}{q}} = x^0 = 1$ es un número real.

De los anteriores casos se concluye que si p es par y q impar, entonces la expresión $x^{\frac{p}{q}}$ representa un número real. Por otra parte, tomando $p = 1$, $q = 2$ y $x = -1$, notamos que la expresión $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ no es número real; este ejemplo permite descartar las demás opciones.

[1] El Principio del Palomar establece que si se distribuyen $n + 1$ palomas en n palomares, entonces al menos un palomar contiene dos o más palomas. Una versión más general de este principio establece que si $n(k - 1) + 1$ objetos son colocados en n casilleros, entonces al menos uno de los casilleros contiene al menos k objetos.

3. El perímetro del triángulo T_n es la suma de las distancias del punto $(0,0)$ a los puntos $(1,n)$ y $(n,1)$ y la distancia entre los puntos $(1,n)$ y $(n,1)$. La distancia entre $(0,0)$ a $(1,n)$ es

$$\sqrt{|1-0|^2+|n-0|^2}=\sqrt{1+n^2}.$$

La distancia entre $(0,0)$ a $(n,1)$ es

$$\sqrt{|n-0|^2+|1-0|^2}=\sqrt{n^2+1}.$$

Por último, la distancia entre $(1,n)$ y $(n,1)$ es

$$\sqrt{|1-n|^2+|n-1|^2}=\sqrt{2|n-1|^2}=(n-1)\sqrt{2}.$$

Por lo tanto el perímetro del triángulo T_n está dado por

$$\sqrt{1+n^2}+\sqrt{1+n^2}+(n-1)\sqrt{2}=2\sqrt{1+n^2}+(n-1)\sqrt{2}.$$

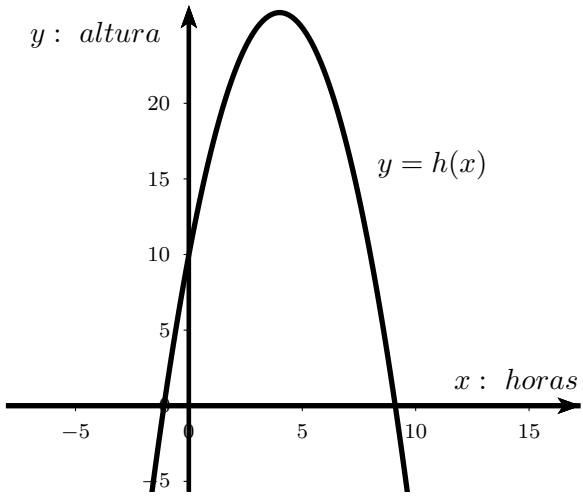
4. Considere las siguientes dos observaciones:

a) Todos los términos en las posiciones impares de la sucesión, es decir los de la forma x_{2n-1}, con $n\in\mathbb{N}$; son múltiplos de 5 y de ellos el único término que es primo es $x_1=5$.

b) Todos los términos en las posiciones pares de la sucesión , es decir los de la forma x_{2n}, con $n\in\mathbb{N}$; son divisibles por 3, pues la suma de sus cifras es múltiplo de 12 y por lo tanto de 3. Al ser todos mayores que 3 se concluye que ninguno de estos es primo.

De modo que solo hay un número primo en la sucesión.

5. Observemos la gráfica de la función $h(x) = -x^2 + 8x + 10$.



Como la parábola abre hacia abajo, la altura máxima del globo se tiene justo en el vértice de la misma, es decir, cuando $x = \dfrac{-8}{2(-1)} = 4$. Como el globo se suelta a las $8:00$ a.m., entonces su altura máxima se alcanza 4 horas después a las $12:00$ m.

6. Sea $N = 30+300+3000+\cdots+3\times10^{2017}$. Note que N es un número de 2018 cifras, donde cada una de ellas es 3 excepto la cifra de las unidades, la cual es 0. Utilizando el criterio de divisibilidad por 11 que establece que: *un número es divisible por* 11 *si y solo si la diferencia de la suma de los dígitos que ocupan las posiciones impares y la suma de los dígitos que ocupan las posiciones pares es un múltiplo de* 11; se deduce que $N + 3$ es divisible por 11. Lo anterior indica que el residuo al dividir N entre 11 es igual a 8.

7. Conociendo la medida de dos ángulos internos de un triángulo, podemos determinar la medida del tercer ángulo interno, pues en todo triángulo la suma de las medidas de sus tres ángulos internos es $180°$. Si además se conoce la longitud de uno de sus lados es posible determinar la longitud

de los otros dos, usando el teorema del seno [2]. De esta manera, si del triángulo de la figura conocemos la información de la opción (d) es posible conocer la longitud de sus tres lados y por lo tanto es suficiente esta información para determinar el área del cuadrado, ya que uno de sus lados coincide con un lado del triángulo. Por otra parte la información dada en las opciones (a), (b) y (c) no es suficiente para hallar el área del cuadrado de la figura, como ejercicio para el lector se deja buscar ejemplos que sustenten esta última afirmación.

8. **Solución** 1. Veamos que para cualesquiera números reales a y b se tiene que

$$\frac{a \cdot b}{2} \leq \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

En efecto:

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Multiplicando por 2 ambos lados de la desigualdad anterior se tiene: $0 \leq 2a^2 - 4ab + 2b^2$, o equivalentemente

$$\frac{a \cdot b}{2} \leq \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Las demás opciones se descartan tomando, por ejemplo, $a = 6$, $b = 8$.

Solución 2. Por la desigualdad de Young[3] se tiene que

$$a \cdot b \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

[2] Si en un triángulo ABC, las medidas de los lados opuestos a los ángulos A, B y C son respectivamente a, b, c, entonces:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

[3] Desigualdad de Young: sean x, y, p, q números reales tales que $x, y \geq 0$; $p, q > 1$, y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; entonces

$$x \cdot y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Luego, $\dfrac{a \cdot b}{2} \leq \dfrac{a^2 + b^2}{4}$.

Como ejercicio para el lector se deja probar que dados a y b números reales positivos, se tiene que

- $\dfrac{a \cdot b}{2} \leq 2\sqrt{ab}$, si y solo si, $a \cdot b \leq 16$.
- $\dfrac{a \cdot b}{2} \leq \dfrac{a+b}{2}$, si y solo si, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq 1$.
- $\dfrac{a \cdot b}{2} \leq \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, si y solo si, $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} \geq 1$.

9. Note que $n!$ es divisible por 10 cuando $n \geq 5$. Esto es, su cifra de las unidades es 0. En consecuencia basta considerar la cifra de las unidades de $1!$, $2!$, $3!$ y $4!$. Como $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ y $4! = 24$. Sumando la cifra de las unidades de estos cuatro números se obtiene:

$$1 + 2 + 6 + 4 = 1\underline{3}.$$

Luego el dígito de las unidades del número $1! + 2! + 3! + \cdots + 2017!$ es 3.

10. Sean M el precio de cada manzana, C el precio de cada coco, x la cantidad de manzanas e y la cantidad de cocos. De la información del enunciado podemos establecer que:

$$Mx + Cy = 17700,$$
$$(M + 500)x + (C - 300)y = 17700 + 2000.$$

Al restar la primera ecuación de la segunda encontramos que

$$500x - 300y = 2000.$$

Las soluciones enteras positivas de esta ecuación son

$$(x, y) \in \{(7, 5), (10, 10), (13, 15), \ldots\}.$$

De aquí que la menor cantidad de frutas que pudo comprar Gabriel es: $7 + 5 = 12$.

11. Note que los triángulos DEC y CFD están inscritos en una semicircunferencia y por tanto son rectángulos en E y F respectivamente. Luego, el área del triángulo DEC está dada por:

$$\frac{DE \times EC}{2} = \frac{4\sin(30°) \times 4\cos(30°)}{2} = 2\sqrt{3}\, cm^2,$$

y el área del triángulo CFD está dada por:

$$\frac{DF \times FC}{2} = \frac{4\sin(45°) \times 4\cos(45°)}{2} = 4\, cm^2.$$

Por lo tanto el área sombreada es $4 + 2\sqrt{3}\, cm^2$.

12. Como E y D son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, entonces se tiene que el triángulo AED es semejante al triángulo ABC a razón de 1 a 2, luego el área del triángulo AED es un cuarto del área del triángulo ABC, esto es:

$$\frac{1}{4} \times 36 = 9\, cm^2.$$

Observe que los segmentos $\overline{FD}$ y $\overline{GE}$ son medianas del triángulo AED. Teniendo en cuenta que las tres medianas de un triángulo dividen al triángulo en 6 partes de igual área, se concluye que el área de la región sombreada corresponde a la tercera parte del área del triángulo AED, esto es,

$$\frac{9}{3} = 3\, cm^2.$$

3.2. Prueba Selectiva

3.2.1. Prueba Selectiva: 22 de septiembre

1. Vanesa, Leonel, Jesús, Tatiana y Camilo jugaron al amigo secreto y dieron sus regalos en un restaurante. Ellos se regalaron entre sí: una gorra, un balón, una camiseta, unos audífonos y una caja de chocolates. De cenar pidieron: una hamburguesa, un perro caliente, una porción de pizza, una ensalada y una carne asada. Si cada uno recibió un regalo diferente y comió algo diferente, determine qué regalo recibió Jesús y lo que comió sabiendo que:

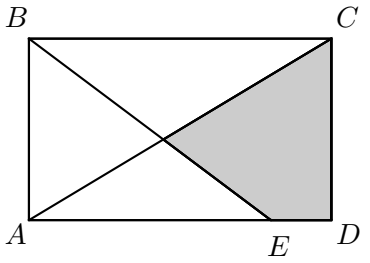
   - Camilo recibió una gorra, no comió pizza ni hamburguesa y le regaló a una mujer una caja de chocolates.
   - Jesús no comió perro y le regaló unos audífonos a una mujer que comió ensalada.
   - Vanesa no comió carne asada ni perro caliente.
   - Tatiana comió carne asada y le regaló un balón a Leonel.
   - Leonel comió pizza y le regaló una camiseta a Jesús.

   (a) Balón y pizza.
   (b) Camiseta y hamburguesa.
   (c) Camiseta y pizza.
   (d) Balón y hamburguesa.

2. Considere las siguientes funciones $f(x) = 3^x + 5x$ y $g(x) = \sqrt{x} + x^3$. Si x es un número real, es correcto afirmar que

   (a) si $x < 0$, entonces $f(x) \times g(x) < 0$.
   (b) $f(x) + g(x) = 0$, si $x = 0$.
   (c) $f(x) \times g(x) = 8x^2 + 8x^4$.
   (d) $g(f(0)) = 2$.

3. En la siguiente figura $ABCD$ es un rectángulo, $BE = BC = 5\ cm$ y $BA = 3\ cm$, ¿cuál es el área de la región sombreada en cm^2?



(a) 6 (c) $\frac{45}{8}$

(b) $\frac{29}{6}$ (d) $\frac{60}{9}$

4. Considere el número $N = 111\ldots1$, formado por 2016 unos. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. N es divisible por 7.
II. N es divisible por 9.
III. N es múltiplo de 11.
IV. N es múltiplo de 6.

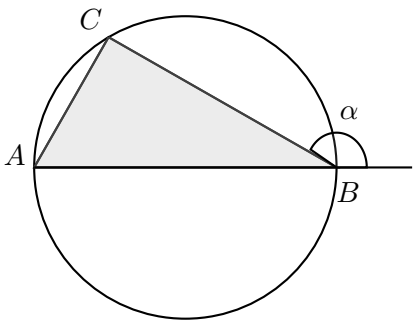
(a) II y IV. (c) Solamente II y III.

(b) I, II y III. (d) Todas son verdaderas.

5. ¿Cuál es el residuo de dividir 125^{4577} entre 13?

(a) 0 (b) 2 (c) 5 (d) 8

6. En la siguiente figura el triángulo sombreado está inscrito en la circunferencia. Para hallar la medida del ángulo α NO es suficiente conocer



(a) la medida del ángulo A y la longitud de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$.

(b) la medida del ángulo A y que $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia.

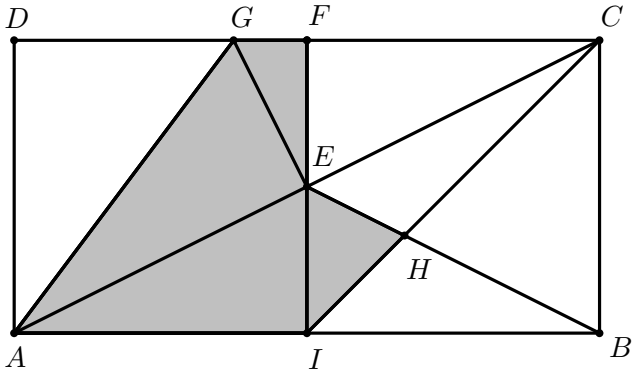
(c) la medida del ángulo A y la longitud del radio de la circunferencia.

(d) la longitud de los lados del triángulo.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7. Sean $p(x) = ax^3 - x^2 + bx + 1$ y $q(x) = bx^3 - x^2 + ax + 1$. Halle a y b, con $a \neq b$ de tal forma que $p(x)$ y $q(x)$ tengan dos raíces comunes.

8. En la siguiente figura $ABCD$ es un rectángulo donde $AB = 2BC$, $FC = 3\,cm$, F es punto medio de $\overline{DC}$, I es punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{GE}$ es perpendicular a $\overline{AC}$. Halle el perímetro de $AIHEFG$.



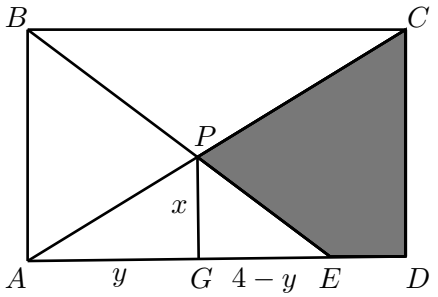
9. Una tienda de cosméticos tiene una nueva colección de esmaltes que posee 3 colores diferentes de la gama de los rojos, 4 colores diferentes de la gama de los verdes, 3 colores diferentes de la gama de los azules, 2 colores diferentes de la gama de los morados y 3 colores diferentes de la gama de los amarillos. Si se quiere armar un kit de muestra que contenga tres esmaltes de diferente color, ¿cuál es la probabilidad de que los tres esmaltes sean de gamas distintas?

3.2.2. Solución

1. La última condición del problema dice que Jesús recibió como regalo una camiseta. Ahora, Jesús no comió perro, ni comió ensalada pues este alimento fue para una mujer. Además la carne asada fue para Tatiana y Leonel comió pizza. Luego Jesús comió hamburguesa, ya que esta no fue consumida por Camilo.

2. Note que $f(0) = 3^0 + 5(0) = 1$ y $g(1) = \sqrt{1} + 1^3 = 2$, entonces $g(f(0)) = g(1) = 2$. Las demás afirmaciones no son correctas, pues si $x < 0$, entonces $g(x)$ no es un número real; si $x = 0$, $f(x) + g(x) = 1$; y $f(x) \times g(x) = (3^x + 5x)\left(\sqrt{x} + x^3\right) \neq 8x^2 + 8x^4$.

3. Consideremos la siguiente figura en la que $\overline{PG}$ es la altura del triángulo APE respecto a su base $\overline{AE}$.



Como $BE = 5\,cm$ y $BA = 3\,cm$, por el teorema de Pitágoras tenemos $AE = 4\,cm$. Sean x la longitud del segmento $\overline{PG}$ e y la longitud de $\overline{AG}$, entonces $GE = 4 - y$. Note que los triángulos ACD y APG son semejantes, luego

$$\frac{CD}{AD} = \frac{3}{5} = \frac{x}{y},$$

es decir $x = \dfrac{3y}{5}$. También los triángulos ABE y PGE son semejantes, así:

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{4-y},$$

de donde $x = \dfrac{3(4-y)}{4}$.

Igualando los dos resultados anteriores para x se tiene que $y = \dfrac{20}{9}$ y por lo tanto $x = \dfrac{4}{3}$. De modo que el área del triángulo APE es

$$A_{APE} = \frac{AE \times x}{2} = \frac{8}{3}.$$

Por último, note que el área sombreada S se puede determinar restando el área del triángulo APE del área del triángulo ACD, es decir

$$S = A_{ACD} - A_{APE} = \frac{5 \times 3}{2} - \frac{8}{3} = \frac{29}{6}.$$

4. Teniendo en cuenta los criterios de divisibilidad se establece la veracidad o falsedad de cada una de las afirmaciones:

I. N es divisible por 7, puesto que si $N = a_{2016} \cdots a_3 a_2 a_1$, donde a_i representa la cifra en la posición $i-$ésima (contando de derecha a izquierda) del número N, entonces $a_i = 1$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$. Luego

$$a_1 + 3a_2 + 2a_3 - a_4 - 3a_5 - 2a_6 + a_7 + 3a_8 + 2a_9 - \cdots - 2a_{2016} = 0,$$

y así, por un criterio de divisibilidad[4] para 7 se concluye que N es divisible entre 7.

II. Aplicando el criterio de divisibilidad por 11 también se prueba que N es divisible por 11, pues la suma de las cifras impares de N es igual a la suma de sus cifras pares y por lo tanto la diferencia de estas sumas es 0.

III. N es un múltiplo de 9, pues la suma de sus cifras es 2016, que es múltiplo de 9.

IV. N no es divisible por 6, porque N es impar.

Por lo tanto las afirmaciones correctas son I, II y III.

[4] Un número $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ es divisible por 7, si y solo si, $a_1 + 3a_2 + 2a_3 - a_4 - 3a_5 - 2a_6 + a_7 + 3a_8 + 2a_9 \cdots$ es múltiplo de 7.

5. Observe que

$$\begin{aligned} 125 &\equiv 8 \pmod{13}, \\ 125^2 &\equiv 12 \pmod{13}, \\ 125^3 &\equiv 5 \pmod{13}, \\ 125^4 &\equiv 1 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Así $125^{4(1144)} \equiv 1 \pmod{13}$, luego $125^{4577} \equiv 8 \pmod{13}$.

6. Note que $\measuredangle\alpha = \measuredangle A + \measuredangle C$ y $\measuredangle\alpha = 180^\circ - \measuredangle B$. Analicemos cada una de las opciones:

Si se conoce la medida del ángulo A y la longitud de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$, usando el teorema del seno se puede calcular $\measuredangle C$; y por lo tanto la información de la opción (a) es suficiente para conocer la medida del ángulo α. Si se sabe que $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia, entonces $\measuredangle C = 90^\circ$, luego la información de (b) también es suficiente para hallar la medida del ángulo α. Con la información de (d), mediante el teorema del coseno, se puede hallar la medida de todos los ángulos internos del triángulo ABC y por lo tanto la medida del ángulo α. Por último, note que la longitud del radio y la amplitud de los ángulos no tienen relación; para ver esto, el lector puede imaginarse una ampliación de la figura del ejercicio y observar que las medidas de los ángulos se mantienen invariantes, pero el radio de la circunferencia varia; por ende los datos de la opción (c) son insuficientes para hallar la medida de α.

7. Si r es una raíz común de $p(x)$ y $q(x)$, entonces $p(r) = q(r) = 0$ y por tanto $ar^3 - r^2 + br + 1 = br^3 - r^2 + ar + 1$. De lo anterior se deduce que

$$\begin{aligned} 0 &= ar^3 - br^3 + br - ar \\ &= (a-b)r^3 - (a-b)r \\ &= (a-b)r\left(r^2 - 1\right) \\ &= (a-b)r\,(r-1)\,(r+1)\,. \end{aligned}$$

Como $a \neq b$, se tiene que $r = 0$, $r = 1$ o $r = -1$.

Además $r = 0$ no es raíz de $p(x)$ ni de $q(x)$, entonces las raíces comunes de los polinomios son $r = 1$ y $r = -1$. De modo que

$$0 = p(1) = a - 1 + b + 1 = -a - 1 - b + 1 = p\,(-1)\,.$$

De esto último se concluye que $a + b = 0$, o equivalentemente, $a = -b$.

8. Como $ABCD$ es un rectángulo, F es punto medio de $\overline{DC}$ y $FC = 3\,cm$, entonces $DC = AB = 6\,cm$, además I es punto medio de $\overline{AB}$ y $AB = 2BC$, luego $AI = 3\,cm$ y $BC = 3\,cm$. Note que E es punto medio de $\overline{FI}$ y $FI = BC = 3\,cm$, por lo tanto $EF = \dfrac{3}{2}\,cm$. Por otra parte, observe que los triángulos GFE y EFC son semejantes, así podemos establecer la proporción $\dfrac{FG}{EF} = \dfrac{EF}{FC}$, de donde

$$FG = \frac{(EF)^2}{FC} = \frac{\frac{9}{4}}{3} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}\,cm.$$

De aquí que $DG = 3 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{4}\,cm$.

Por el teorema de Pitágoras, se tiene lo siguiente:

$$GA = \sqrt{(DG)^2 + (DA)^2} = \sqrt{\frac{81}{16} + 9} = \frac{15}{4}\,cm,$$

$$EB = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}\,cm,$$

$$CI = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}\,cm.$$

Ahora, note que $\overline{EB}$ y $\overline{CI}$ son medianas del triángulo ACB y H es su baricentro, así por teorema de medianas[5] se tiene que:

$$HE = \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}\,cm,$$

$$IH = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\,cm.$$

[5]Dos tercios de la longitud de cada mediana están entre el vértice y el baricentro, mientras que el tercio restante está entre el baricentro y el punto medio del lado opuesto.

Por lo tanto el perímetro P del polígono $AIHEFG$ es

$$\begin{aligned} P &= AI + IH + HE + EF + FG + GA \\ &= 3 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{15}{4} \\ &= 9 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\, cm. \end{aligned}$$

9. Los esmaltes de la colección se encuentran distribuidos por gamas de la siguiente manera:

Rojos	Verdes	Azules	Morados	Neones
3	4	3	2	3

El kit de muestra se puede armar de $\binom{15}{3} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = 455$ formas diferentes. Para hallar cuántos de esos kits NO cumplen con la condición de que los tres esmaltes sean de gamas distintas, calculamos cuántos kits tienen dos esmaltes de la misma gama y cuántos tienen tres esmaltes de la misma gama. La siguiente tabla comprende todos los casos posibles:

Esmaltes	Rojos	Verdes	Azules	Morados	Neones
2 misma gama	$12 \times \binom{3}{2}$	$11 \times \binom{4}{2}$	$12 \times \binom{3}{2}$	13	$12 \times \binom{3}{2}$
3 misma gama	1	4	1	0	1

En total hay $36 + 66 + 36 + 13 + 36 + 1 + 4 + 1 + 1 = 194$ kits que NO cumplen la condición, luego los que SI cumplen la condición son $455 - 194 = 261$, de esta manera la probabilidad de que los tres esmaltes sean de gamas distintas es $\frac{261}{455.}$

3.3. Prueba Final

3.3.1. Resultados

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la novena versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Secundaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 1189 participantes del certamen en el nivel Avanzado, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

CUADRO DE HONOR

1er Puesto, medalla de oro

Sergio Alejandro Acelas Ávila

Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana, Floridablanca.

2o Puesto, medalla de plata

Cristhian Alejandro González Duarte

Colegio Santa Isabel de Hungría, Floridablanca.

3er Puesto, medalla de bronce

Silvia Juliana Rueda Guerrero

Aspaen Gimnasio Cantillana, Piedecuesta.

4o Puesto

Joaquín Peñuela Parra

Colegio Cooperativo Comfenalco, Bucaramanga.

5o Puesto

Sneider Arbey Herazo Puentes

Colegio Cooperativo Comfenalco, Bucaramanga.

3.3.2. Prueba Final: 28 de octubre

1. Se escriben los números naturales impares de la siguiente forma:

$\vdots$						$\cdots$
Piso 5					21	$\cdots$
Piso 4				13	**23**	$\cdots$
Piso 3			7	15	25	$\cdots$
Piso 2		3	9	17	27	$\cdots$
Piso 1	1	5	11	19	29	$\cdots$
	Torre 1	**Torre 2**	**Torre 3**	**Torre 4**	**Torre 5**	$\cdots$

De esta representación decimos por ejemplo que 23 está localizado en la Torre 5 Piso 4.

$a)$ Determine la Torre y el Piso en que se ubica el número 2017.

$b)$ Halle la suma de los números que se encuentran en la Torre 2017.

2. Encuentre todas las parejas de enteros no negativos (x, y) tales que:

$$y^2(x+1) = 70 + x^2.$$

3. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ segmentos de longitud $7\,cm$ y $6\,cm$ respectivamente. Se traza una semirecta que parte de B y no corta a $\overline{AC}$ pero sí a la semirecta que parte de A y pasa por C, en un punto E, de forma que $AC = 2CE$. Sea F el punto de intersección del segmento $\overline{BE}$ con la bisectriz del ángulo CAB. Si el ángulo ABE es recto, halle la longitud de $\overline{BF}$ y $\overline{FE}$.

4. ¿Cuántas ternas pitagóricas están compuestas únicamente por números primos?

5. Halle todos los pares de enteros m, n que son solución de la ecuación

$$\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} = m.$$

6. Dado un triángulo ABC. Sean D y E puntos de intersección de la bisectriz del ángulo A con el segmento BC y el circuncírculo del triángulo ABC respectivamente. Defina al punto F, como la intersección del circuncírculo de ABD con el segmento AC. Muestre que los triángulos BFE y BFC tienen la misma área.

3.3.3. Solución

1. (a) En la lista ordenada creciente de los enteros positivos impares el número $2017 = 2(1009) - 1$ ocupa el puesto 1009. Fácilmente se observa que en la $n-$ésima torre hay n enteros positivos impares, luego en las primeras n torres están los primeros

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

enteros positivos impares. De modo que hasta la torre 44 se han escrito los primeros $\dfrac{44 \times 45}{2} = 990$ enteros positivos impares, mientras que hasta la torre 45 se han escrito los primeros $\dfrac{45 \times 46}{2} = 1035$ de estos números y por lo tanto el número $2017 = 2(1009) - 1$ que ocupa el puesto 1009 está en la torre 45.

Por otra parte, el número que se encuentra en el primer piso de la torre 45 es el que ocupa el puesto 1035 en la lista de enteros positivos impares, es decir $2(1035) - 1 = 2069$. Luego en el segundo piso está el entero $2067 = 2069 - 2(1)$, en el tercer piso está el número $2065 = 2069 - 2(2)$ y continuando de esta forma se tiene que $2017 = 2069 - 2(26)$ está en el piso 27. Por lo anterior 2017 está en la torre 45 piso 27.

(b) De la primera parte se tiene que en las primeras 2016 torres están los primeros $\frac{2016 \times 2017}{2} = 2033136$ enteros positivos impares; siendo el mayor $a = 2(2033136) - 1 = 4066271$ y por lo tanto los 2017 escritos en la torre 2017 son: $a + 2(1), a + 2(2), a + 2(3), \ldots, a + 2(2017)$ cuya suma S es:

$$\begin{aligned} S &= (a + 2(1)) + (a + 2(2)) + (a + 2(3)) + \cdots + (a + 2(2017)), \\ &= 2017a + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 2017), \\ &= 2017a + 2017(2018) = 2017(a + 2018). \end{aligned}$$

NOTA: La primera parte de este problema también se puede resolver observando que:

- Los números impares del primer piso de las torres ordenadamente son: $1, 5, 11, 19, 41, \ldots$ de lo que se puede deducir son de la forma $n(n+1) - 1$; para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
- O también, observando que en el piso superior de las torres ordenadamente están los números $1, 3, 7, 13, 21, 31, \ldots$ que son de la forma $1 + n(n-1)$, para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
- La segunda parte también se puede resolver recordando que $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$, para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

2. Suponga que la pareja (x, y) de enteros no negativos satisface:

$$y^2(x+1) = 70 + x^2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} y^2(x+1) &= 71 + x^2 - 1, \\ (y^2 - x + 1)(x+1) &= 71. \end{aligned}$$

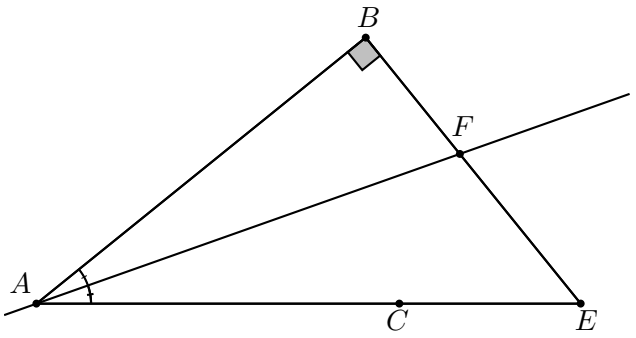
Como 71 es primo, basta analizar los siguientes casos:

Caso 1: Si $x + 1 = 1$ y $y^2 - x + 1 = 71$, entonces $x = 0$ y $y = \sqrt{70}$. Como $\sqrt{70}$ no es entero, entonces este caso no es posible.

Caso 2: Si $x + 1 = 71$ y $y^2 - x + 1 = 1$, entonces $x = 70$ y $y = \sqrt{70}$. Nuevamente como $\sqrt{70}$ no es entero, este caso tampoco es posible.

Por tanto, no existen parejas (x, y) de enteros no negativos tales que $y^2(x+1) = 70 + x^2$.

3. Considere la siguiente construcción



Como $AC = 6\,cm$ y $AC = 2CE$, entonces $AE = 9\,cm$. Por el teorema de la bisectriz [6] se tiene que:

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BA}{AE} = \frac{7}{9},$$

es decir $FE = \frac{9}{7}BF$. Además, por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$BF + FE = BE = \sqrt{9^2 - 7^2} = 4\sqrt{2}.$$

De modo que,

$$BF + \frac{9}{7}BF = 4\sqrt{2}, \qquad \frac{7\sqrt{2}}{4} + FE = 4\sqrt{2},$$
$$BF = \frac{7\sqrt{2}}{4}, \qquad FE = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Nota: *Las condiciones del problema 3 propuesto en la prueba final, generaban contradicciones matemáticas, puesto que la figura descrita en el enunciado no*

[6] Teorema de la bisectriz: Dado el triángulo ABC, sea $\overline{AD}$ la bisectriz del ángulo interno BAC, entonces se cumple la proporción:

$$\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

era construible. Presentamos disculpas por las molestias que esto pudo generar y aclaramos que los puntos de este problema fueron otorgados a quienes evidenciaron por escrito tales contradicciones.

4. Sean p, q, y r números primos tales que

$$p^2 + q^2 = r^2.$$

Observe que p, q y r no pueden ser todos impares, dado que el cuadrado de un número impar es impar y la suma de dos números impares es par. De modo que alguno de estos debe ser 2. Si $p = 2$, entonces $r^2 - q^2 = (r-q)(r+q) = 4$ y esto es imposible si r y q son primos (el lector debe verificar esta afirmación), análogamente si $q = 2$. Si $r = 2$, entonces $p^2 + q^2 = 4$ lo cual es imposible para p y q primos, pues $p, q \geq 2$ y por lo tanto $p^2 + q^2 > 4$. Por lo tanto no existen ternas pitagóricas formadas únicamente por números primos.

5. Haciendo $n = 0$ se ve que $m = 0$ y esto ya es una solución de la ecuación

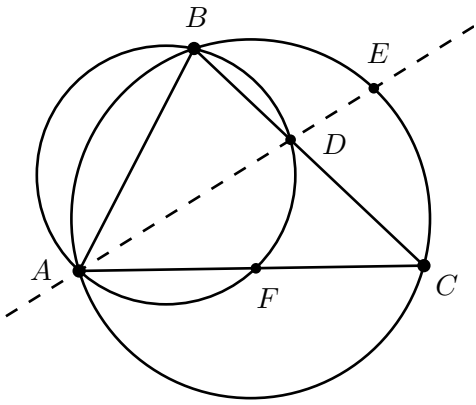
$$\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} = m.$$

Veamos esta es la única solución en los enteros de la ecuación en cuestión. En efecto, si $m, n \in \mathbb{Z}$ también solucionan la ecuación, deben ser enteros no negativos y tenemos, al elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad, que $\sqrt{n + \sqrt{n}} = m^2 - n$. Elevando nuevamente al cuadrado ambos miembros de la igualdad anterior, se ve que $\sqrt{n} = \left(m^2 - n\right)^2 - n$ es un entero no negativo, es decir n debe ser un cuadrado perfecto, digamos $n = k^2$, con k un entero y así $k^2 + k = (m^2 - n)^2$. O sea que $k^2 + k$ es un cuadrado perfecto. Sin embargo, observe que

$$k^2 < k^2 + k < k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Esto es, $k^2 + k$ está estrictamente entre dos cuadrados perfectos consecutivos, lo cual es absurdo.

6. Consideremos la siguiente figura



Para probar que BFE y BFC tienen la misma área, basta ver que tienen la misma altura, respecto a la base $\overline{BF}$ que comparten, para esto veamos que $\overline{CE}$ y $\overline{BF}$ son paralelos.

En efecto, como $ABDF$ es un cuadrilátero cíclico, tenemos que $\measuredangle FBD = \measuredangle FAD$, por abrir el mismo arco FD.

También, como $ABEC$ es un cuadrilátero cíclico, tenemos que $\measuredangle BCE$ y $\measuredangle BAE$ son iguales por abrir el mismo arco BE.

Pero $\measuredangle BAE = \measuredangle FAD$, pues $\overline{AD}$ es bisectriz. Así, $\measuredangle FBD = \measuredangle BCE$, lo cual implica que $\overline{BF}$ es paralela a $\overline{CE}$, como se quería ver.

Bibliografía

[1] Bolaños W. *Problemas y Soluciones Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas Universitaria 1998-2019.* Universidad Antonio Nariño y Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[2] Brochero F. y Restrepo J. *Un recorrido por la Teoría de Números.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[3] Gómez J., Valdez R. y Vázquez R. *Principio de las Casillas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2011.

[4] Hemmerling E. *Geometría Elemental.* Bakersfield College. Limusa, México, 2009.

[5] Jiménez L., Gordillo J. y Rubiano G. *Teoría de números para principiantes.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.

[6] Madroñero J y Contreras I. *Un recorrido por el Álgebra.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[7] Soberón P. *Combinatoria para olimpiadas* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2010.

[8] Restrepo P. *Un recorrido por la Combinatoria I.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

[9] Valderrama A. y González E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Nivel Intermedio 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010

[10] Valderrama A. y González E. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Primer Nivel 2010* Universidad Antonio Nariño, 2010.

IX OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMÁTICAS

SECUNDARIA UIS 2017

Diseño e Impresión: DIVISIÓN DE PUBLICACIONES UIS - TEL. 6344000, ext. 2196

Vicerrectoría Administrativa
Vicerrectoría de Investigación y Extensión

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"