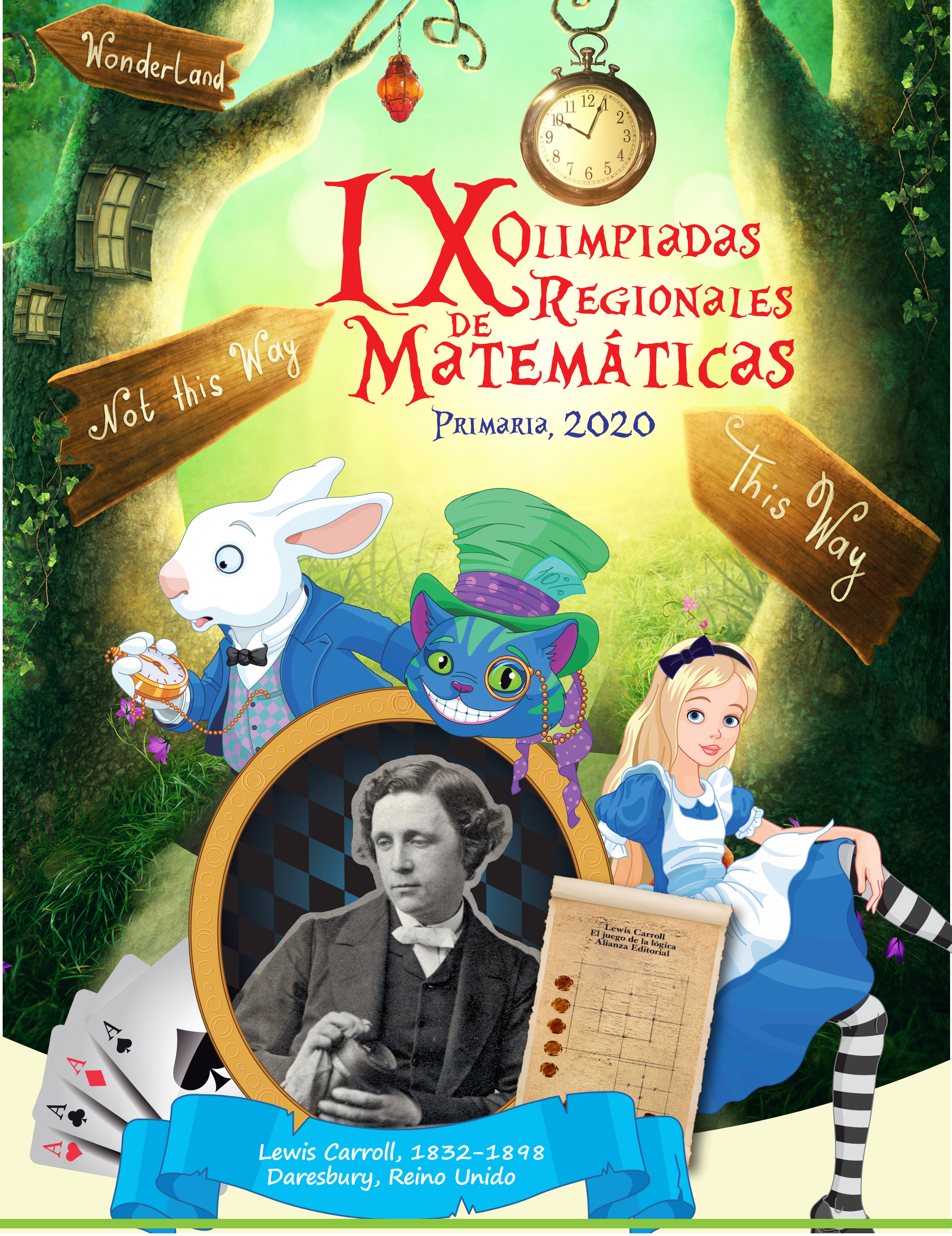


INFORMES
olimpiadas@matematicas.uis.edu.co
Tel.: 6450301, 6344000 Ext.: 2316, 2583, 2581
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

ORM Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Grupo Educación Matemática UIS EDUMAT

SEA Sistema de apoyo a la excelencia académica

IPRED Instituto de Proyección Regional y Educación a Distancia — Educación interactiva y abierta al liderazgo

Vicerrectoría Académica
Universidad Industrial de Santander
"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

Novenas Olimpiadas Regionales de Matemáticas Primaria

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga

2020

Elaboración y edición

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas - 2020.

Directora

Adriana Alexandra Albarracín Mantilla

Coordinador

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Monitores

Álvaro Javier Andrade Durán
Álvaro Javier Riaño Blanco
Edson Jair Suárez Porras
Gabriel Moncada Santos
Johan Sebastián Cortés Villamizar
José Camilo Rueda Niño
Juan David Rueda Centeno
Julián Enrique Neira Díaz
Natalia Isabel Pérez Niño
Santiago Niño Campos

Introducción

" (...) A primera vista, las aventuras de Alicia parecen irresponsables o casi arbitrarias; luego comprobamos que encierran el secreto rigor del ajedrez y de la baraja, que asimismo son aventuras de la imaginación. Carroll, según se sabe, fue profesor de matemáticas en la Universidad de Oxford: las paradojas logicomatemáticas que la obra nos propone no impide que ésta sea una magia para los niños"

Borges - El sueño de Lewis Carroll.

La Universidad Industrial de Santander, como institución de educación superior del ámbito regional, forma ciudadanos como profesionales integrales, éticos, con sentido político e innovadores; apropia, utiliza, crea, transfiere y divulga el conocimiento por medio de la investigación, la innovación científica, tecnológica y social, la creación artística y la promoción de la cultura, buscando de este modo el fortalecimiento de una sociedad democrática, participativa, deliberativa y pluralista, con justicia y equidad social, comprometida con la preservación del medio ambiente y el buen vivir.

En el marco de esta misión institucional, la Escuela de Matemáticas ofrece a la sociedad santandereana y de la región de influencia de la Universidad, un escenario de alta calidad para el cultivo de las matemáticas, promoviendo entre los integrantes de la comunidad académica una actitud creativa y rigurosa, y construyendo un ambiente académico basado en la solidaridad, la empatía y el reconocimiento de los otros en su dignidad humana. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado, sino también por su participación activa y crucial en la formación de los estudiantes de otros programas de la Universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a los diversos retos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las habilidades matemáticas en el nororiente colombiano, la Escuela de Matemáticas ha diseñado y ejecutado desde el 2009, el proyecto Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad

Industrial de Santander (ORM-UIS), para secundaria y primaria, a través del fortalecimiento de las competencias matemáticas de los estudiantes y la capacitación simultánea de los profesores que orientan dichos procesos. Incluso, en esta oportunidad, para el año 2020, haciendo esfuerzos logísticos y financieros, dio continuidad al proyecto, como una manera de contribuir a la "normalidad" que nos tocó a todos inventarnos, para no dejar de encontrarnos alrededor de nuestra pasión en común por los números.

Las ORM-UIS abordan cinco (5) áreas, a saber: i) teoría de números; ii) combinatoria; iii) álgebra, iv) lógica, y v) geometría. Por otra parte, las ORM-UIS se desarrollan en tres (3) niveles, según el grado de escolaridad de los participantes, de la formación en básica primaria, así:

- **Nivel Básico:** grado tercero,
- **Nivel Medio:** grado cuarto,
- **Nivel Avanzado:** grado quinto.

La cartilla que tiene en sus manos compendia los problemas matemáticos propuestos por el equipo de trabajo de las ORM-UIS en las distintas fases de la Novena versión del certamen, desarrollada durante el segundo semestre de 2020, dirigido a estudiantes de educación básica primaria. En esta oportunidad se contó con la participación de 78 colegios, para un total de 2736 estudiantes en competencia, provenientes de 30 municipios del nororiente colombiano.

En esta versión las ORM-UIS, como siempre lo hace con alguien en especial, destacó la vida y obra de Charles Lutwidge Dodgson, conocido mundialmente por su seudónimo de Lewis Carroll, sí, el autor de Alicia en el país de las maravillas (1865) y A través del espejo y lo que Alicia encontró allí (1871). Hay quienes han visto en la obra literaria, múltiples ideas para leerla desde una perspectiva matemática. Ciertamente, Carroll también fue un promotor de la lógica y la geometría, utilizando para tal fin lo que ahora llamamos "la divulgación científica", esto es, la capacidad para hacernos pensar a todos matemáticamente, a través de problemas sencillos que nos invitan a asomarnos "por en medio de ese universo mágico" que es la inteligencia humana y nuestra capacidad para "hablar" y "pensar" con números. En un mundo donde es habitual distinguir entre "quien es bueno para las matemáticas" y entre "quien es bueno para la literatura", Caroll irrumpe para destruir esos prejuicios que nada tienen que ver con la integralidad de nuestra existencia como seres pensantes y sintientes.

Este documento consta de tres (3) capítulos, cada uno correspondiente a un nivel de la competencia: nivel básico, nivel medio y nivel avanzado. En cada uno de ellos el lector encontrará los problemas y la correspondiente solución, de las distintas soluciones que puede tener cada uno. Por esa razón, el equipo de trabajo de las ORM-UIS recomienda e incentiva a quien desee enfrentar nuevamente estos problemas, a descubrir y proponer, métodos alternativos de solución que se destaquen por su sencillez, ingenio y belleza matemática.

La Escuela de Matemáticas, a través del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la UIS (EDUMAT), reconoce la labor esencial del maestro en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las competencias matemáticas de los estudiantes, y por ello elabora esta cartilla para su utilización en el aula de clase, que incluye, también, la preparación y discusión creativa entre pares en los espacios de formación docente. Esperamos que los participantes de la educación básica primaria, los profesores, y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, disfrute tanto como nosotros lo hicimos, el hermoso y milenario ejercicio del pensamiento matemático.

Las ORM-UIS no son una mera competencia, implican una puesta en escena colectiva para que los niños, niñas y adolescentes desplieguen sus capacidades, fortalezcan sus habilidades y se reconozcan como sujetos capaces de enfrentar problemas y solucionarlos. Esto psicológicamente fomenta la autopercepción como sujetos con comprensión de su entorno, y esa es la exigencia que hace hoy la humanidad. Creemos firmemente que allí debemos dirigir todos nuestros esfuerzos, al fortalecimiento de ciudadanías que, gracias al pensamiento crítico que se desarrolla desde el ejercicio matemático, puedan enfrentarse a la diversidad de problemáticas que enfrenta la sociedad actual y que requieren de una mirada no solo crítica, sino, además, creativa para ser solucionadas.

El proyecto ORM- UIS agradece y destaca al grupo de estudiantes que participaron de esta versión, y que han demostrado ser capaces de asumir el reto de pensar y sentir problemas sencillos y bellos de matemáticas, con pasión y con rigor, a pesar de los innumerables desafíos que la pandemia por la COVID-19 trajo para todos nosotros en este año.

Índice general

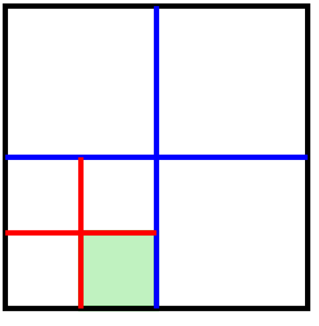
Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

Se divide un cuadrado en cuatro cuadrados con igual área, luego uno de estos cuadrados se divide en otros cuatro cuadrados con igual área, como se muestra en la figura. Si el perímetro del cuadrado sombreado en verde es $1\,cm$, ¿cuál es el perímetro del cuadrado más grande?



(a) $8\,cm$ (b) $4\,cm$ (c) $16\,cm$ (d) $2\,cm$ (e) No sé.

Solución: *Note que la longitud de un lado del cuadrado más grande es cuatro veces la longitud de un lado del cuadrado sombreado, por lo tanto el perímetro del cuadrado grande es cuatro veces el perímetro del cuadrado sombreado, esto es* $4 \times 1\,cm = 4\,cm$.

Problema 2.

¿Cuántas sucesiones de 4 sonidos diferentes se pueden tocar con un piano al que solo le funcionan 6 teclas, si se toca una tecla a la vez?

(a) 24 (b) 1296 (c) 360 (d) 256 (e) No sé.

Solución: Dado que las sucesiones deben ser de 4 *sonidos diferentes, entonces las teclas no se pueden repetir y el orden al tocarlas importa. Así, para el primer sonido tenemos* 6 *opciones, para el segundo sonido tenemos* 5 *opciones, pues la tecla que se tocó primero ya no se puede usar; del mismo modo, para el tercer sonido tenemos* 4 *opciones y para el cuarto sonido tenemos* 3 *opciones. Así, por el principio multiplicativo tenemos* $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$, *sucesiones de cuatro sonidos diferentes.*

$$\underbrace{6 \text{ } opc.}_{sonido \text{ } 1} \times \underbrace{5 \text{ } opc.}_{sonido \text{ } 2} \times \underbrace{4 \text{ } opc.}_{sonido \text{ } 3} \times \underbrace{3 \text{ } opc.}_{sonido \text{ } 4} = \underbrace{360.}_{sucesiones}$$

Problema 3.

Duvan tiene 23 juguetes y Carlos solo tiene 13. Duvan, que es un buen amigo, decide regalarle a Carlos algunos juguetes para que los dos tengan la misma cantidad. ¿Cuántos juguetes debe regalarle Duvan a Carlos?

(a) 10 (b) 6 (c) 8 (d) 5 (e) No sé.

Solución: En total hay $13 + 23 = 36$ *juguetes, para que ambos tengan la misma cantidad, cada uno debe tener* 18. *Por tanto, Duvan debe regalarle* 5 *juguetes a Carlos.*

Problema 4.

La edad de Carlos es un número par de dos dígitos. Si uno de los dígitos es la tercera parte del otro, y el hermano menor de Carlos tiene 30 años, ¿cuál es la edad de Carlos?

(a) 62 (b) 26 (c) 39 (d) 84 (e) No sé.

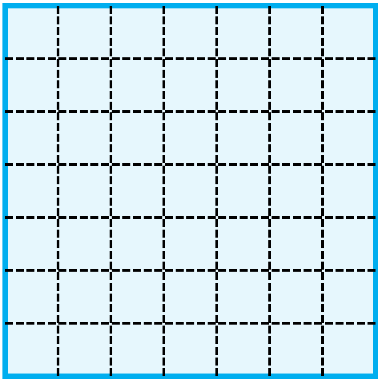
Solución: Dado que la edad de Carlos es un número par de dos dígitos y uno de los dígitos es la tercera parte del otro, las opciones son: 26 *o* 62, *pero se sabe que el hermano menor de Carlos tiene* 30 *años, entonces la edad de Carlos es* 62.

Problema 5.

Un constructor encontró en su taller algunas tabletas cuadradas de $1\,m$ de lado. Si con ellas pudo cubrir el piso cuadrado de una piscina, cuyo lado mide $7\,m$ y no le sobró alguna, ¿cuántas tabletas encontró el constructor?

(a) 28 (b) 49 (c) 56 (d) 25 (e) No sé.

Solución: Dado que el piso de la piscina tiene $7 \times 7 = 49\,cm^2$ *de área y cada tableta cubre* $1 \times 1 = 1\,cm^2$, *entonces para cubrir el piso de la piscina se requieren* 49 *tabletas y no sobra alguna, como se muestra en la siguiente figura:*



Problema 6.

Daniel está compitiendo en una carrera con sus 20 amigos. Él sabe que la cantidad de niños que van adelante de él es igual a la cantidad de niños que van detrás. ¿En qué puesto de la carrera va Daniel?

(a) 10 (b) 9 (c) 11 (d) No es posible lo que dice el enunciado. (e) No sé.

Solución: Dado que Daniel está compitiendo con 20 *amigos, entonces* 10 *de ellos deben ir adelante y* 10 *detrás, por tanto Daniel está en el puesto* 11.

1.2. Prueba Selectiva

Problema 1.

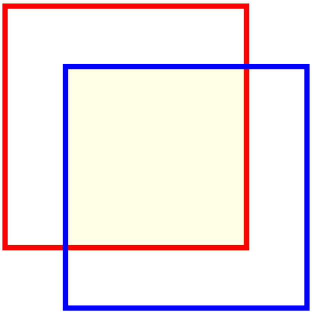
Cierta competencia de atletismo se lleva a cabo cada 1000 días, si la última vez se realizó un sábado, ¿qué día de la semana se realizará la próxima vez?

(a) viernes (b) domingo (c) jueves (d) lunes (e) No sé.

Solución: Dado que cada semana tiene 7 *días y* $1000 = 7 \times 142 + 6$, *entonces* 1000 *días equivalen a* 142 *semanas y* 6 *días. De modo que si la última vez que se realizó la competencia era un sábado, la próxima vez se realizará un viernes.*

Problema 2.

Dos fichas cuadradas, cada una con perímetro $150\,cm$ se sobreponen formado un nuevo cuadrado en la intersección, como se muestra a continuación:

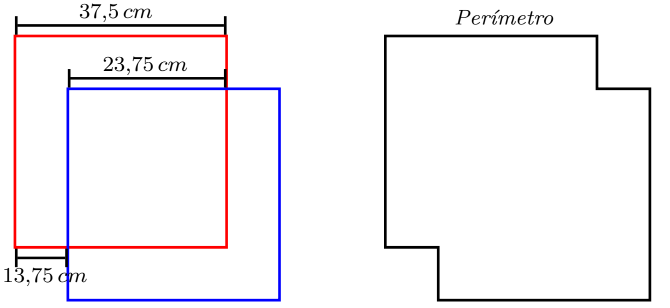


Si el perímetro del cuadrado de la intersección es $95\,cm$, ¿cuál es el perímetro de toda la figura?

(a) $205\,cm$ (b) $300\,cm$ (c) $245\,cm$ (d) $170\,cm$ (e) No sé.

Solución 1: Note que el perímetro de toda la figura coincide con la suma de los perímetros de las fichas menos el perímetro del cuadrado de la intersección, esto es $150 \times 2 - 95 = 205\,cm$.

Solución 2: Considere las siguientes figuras:



Dado que el perímetro de cada ficha cuadrada es $150\,cm$*, entonces cada lado de la ficha mide* $150 \div 4 = 37{,}5\,cm$ *y como el perímetro del cuadrado de la intersección es de* $95\,cm$*, entonces cada uno de sus lados mide* $95 \div 4 = 23{,}75\,cm$*. Ahora, note que el perímetro de la figura equivale a* 4 *veces la longitud de un lado de las fichas más cuatro veces la diferencia entre un lado de la ficha y un lado del cuadrado de la intersección, esto es:* $4 \times 37{,}5 + 4 \times 13{,}75 = 205\,cm$*.*

PROBLEMA 3.

Juan, María, Isabela y José están jugando a poner fichas sobre un tablero que tiene 64 casillas. En su turno, cada uno debe poner 6 fichas, una en cada casilla. Si gana el que coloque la última ficha que llena el tablero e Isabella quiere ganar el juego, ¿de qué posición debe empezar el juego?

(a) Primera (b) Segunda (c) Tercera (d) Cuarta (e) No sé.

Solución: Teniendo en cuenta que

$$64 = (6+6+6+6) + (6+6+6+6) + 6 + 6 + 4,$$

donde cada paréntesis de la última igualdad representa una ronda completa de los cuatro jugadores, podemos ver que después de dos rondas completas, el jugador uno y el jugador dos ponen todas sus fichas, pero el jugador 3 *solo alcanza a poner* 4 *fichas, por lo que este colocó la última ficha y sería el ganador. Por lo tanto, Isabella debería iniciar en la tercera posición para ganar el juego.*

PROBLEMA 4.

La rifa de la escuela tiene números entre 100 y 999. Si la mamá de Felipe, quiere comprar un número que tenga todas sus cifras impares, diferentes y que una de ellas sea 5, ¿cuántos números tienen estas condiciones?

(a) 12 (b) 25 (c) 45 (d) 36 (e) No sé.

Solución 1: Los dígitos impares son $\{1, 3, 5, 7, 9\}$*. Dado que el número debe estar entre* 100 *y* 999*, entonces este tiene tres cifras. Además una de las cifras debe ser el* 5*, luego tenemos los siguientes casos:*

$\boxed{5}\boxed{}\boxed{}$ *Si la primera cifra es el* 5*, entonces la segunda solo se puede escoger de* 4 *formas:* $1, 3, 7, 9$*; ya que no se pueden repetir cifras, y por cada una de estas cuatro formas, la tercera cifra se podrá escoger de* 3 *formas, pues ya se usaron dos dígitos impares en las cifras anteriores. Luego para este caso se tienen* $4 \times 3 = 12$ *posibles números que cumplen las condiciones del enunciado.*

$\boxed{}\boxed{5}\boxed{}$ *Si la segunda cifra es el* 5*, por analogía al caso anterior, se tienen* 12 *números posibles.*

$\boxed{}\boxed{}\boxed{5}$ *Si la tercera cifra es el* 5*, también se tienen* 12 *números posibles.*

De modo que el total de números que cumplen las condiciones es $12 \times 3 = 36$.

Solución 2: La cantidad de números de tres cifras, todas impares y diferentes entre sí, es $5 \times 4 \times 3 = 60$*. De estos, los que no tienen al* 5 *entre sus cifras son* $4 \times 3 \times 2 = 24$*. Por lo tanto, la cantidad de números entre* 100 *y* 999 *que tienen todas sus cifras impares, diferentes, y una de ellas es el* 5*, está dada por* $60 - 24 = 36$.

PROBLEMA 5.

Pablo quiere saber la fecha de nacimiento de su amiga Camila, para ello Camila le da las siguientes pistas:

- El número del mes corresponde a la suma de los dígitos del año.
- El día es la multiplicación de los dígitos del año que no son cero.

Si Camila es menor que Pablo 1 año y Pablo nació en 2009, ¿cuál es la fecha de nacimiento de Camila?

(*a*) Febrero 3 del 2010
(*b*) Noviembre 10 del 2008
(*c*) Octubre 16 del 2008
(*d*) Marzo 2 del 2010
(*e*) No sé.

Solución: *Pablo nació en el* 2009 *y Camila es menor* 1 *año, entonces Camila nació en el* 2010. *La suma de los dígitos de* 2010 *es* 3 *y el producto de los dígitos de* 2010 *que no son cero es* 2, *luego la fecha de nacimiento de Camila es Marzo* 2 *del* 2010.

Problema 6.

Sobre el segmento $\overline{AB}$ se marcan los puntos C, D y E, en ese orden, de manera que:

- (•) la longitud del segmento $\overline{AC}$ es la cuarta parte de la longitud del segmento $\overline{AB}$,
- (•) la longitud del segmento $\overline{AD}$ es la tercera parte de la longitud del segmento $\overline{AB}$,
- (•) la longitud del segmento $\overline{CE}$ es la mitad de la longitud del segmento $\overline{AB}$.

Si la longitud del segmento $\overline{AB}$ es $12\,cm$, ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{DE}$?

(a) $5\,cm$ (b) $6\,cm$ (c) $4\,cm$ (d) $9\,cm$ (e) No sé.

Solución 1: *Considere el siguiente bosquejo:*

Según el enunciado $AC = \frac{1}{4}AB = 3\,cm$, $AD = \frac{1}{3}AB = 4\,cm$ *y* $CE = \frac{1}{2}AB = 6\,cm$. *Además, en el gráfico se observa que* $CD = AD - AC = 4 - 3 = 1\,cm$, *luego* $DE = CE - CD = 6 - 1 = 5\,cm$.

Solución 2: $DE = AE - AD = (AC + CE) - AD = (3 + 6) - 4 = 5\,cm$.

1.3. Prueba Final

PROBLEMA 1.

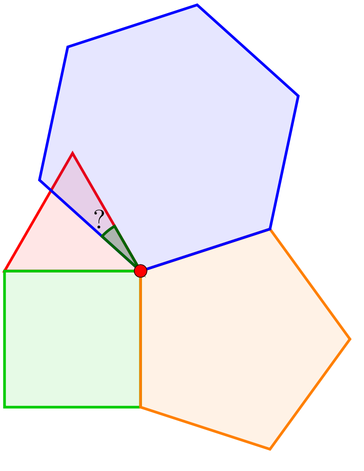
Los gemelos Tweedledum y Tweedledee fueron al cine y pidieron crispetas para disfrutar mientras veían una película. La mitad de las crispetas eran de caramelo y la otra mitad de mantequilla. Cuando aun quedaba la mitad de crispetas de caramelo, notaron que se habían comido $\frac{2}{5}$ del total de crispetas. ¿Qué fracción del total de crispetas que quedan son de mantequilla?

Solución 1: Al inicio, $\frac{1}{2}$ del total de crispetas eran de caramelo y $\frac{1}{2}$ de mantequilla. Cuando quedaba $\frac{1}{2}$ de las crispetas de caramelo, es decir cuando $\frac{1}{4}$ del total eran de caramelo, se habían comido $\frac{2}{5}$ del total de crispetas, por lo tanto quedaban $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ del total de crispetas, pero $\frac{1}{4}$ eran de caramelo, luego $\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$ del total aun eran de matequilla. Finalmente, si $\frac{3}{5}$ son todas las que quedan y $\frac{7}{20}$ aun son de mantequilla, la fracción que representan las que quedan de mantequilla del total de crispetas que quedan es $\frac{7}{20} \div \frac{3}{5} = \frac{7}{12}$.

Solución 2: Suponga que al inicio hay 100 crispetas, entonces 50 son de caramelo y 50 son de mantequilla. Cuando quedaban 25 crispetas de caramelo, notaron que se habían comido $\frac{2}{5}$ del total, es decir 40 crispetas, por lo tanto quedaban 60 crispetas y de estas, 25 eran de caramelo, luego $60 - 25 = 35$ eran de mantequilla; es decir, $\frac{35}{60} = \frac{7}{12}$ del total que quedan, son de mantequilla.

PROBLEMA 2.

Determinar la medida del ángulo señalado en la siguiente figura, sabiendo que los cuatro polígonos que se muestran con colores diferentes son regulares.



Solución: *Cada ángulo interno de un polígono regular con* 3, 4, 5, *y* 6, *lados mide, respectivamente,* $60°$, $90°$, $108°$ *y* $120°$. *Recuerde que una vuelta completa tiene* $360°$, *por lo tanto la medida del ángulo marcado, está dada por*

$$60° + 90° + 108° + 120° - 360° = 18°.$$

PROBLEMA 3.

La Reina de Corazones compró una caja de dulces con los siguientes sabores: limón, fresa, coco, piña, cereza, mora y sandía. En la caja vienen dulces de un sabor, de dos sabores y hasta de tres sabores combinados. Sabiendo que de todos los sabores y combinaciones viene la misma cantidad, ¿qué fracción del total de dulces de la caja no tiene sabor a coco, ni a piña combinado con mora?

Solución: *Dado que en la caja viene la misma cantidad de dulces de cada presentación, asumiremos que viene uno de cada uno para hacer nuestro análisis. Primero contemos las posibles combinaciones de sabores que trae la caja. De un solo sabor hay* 7 *opciones, de solo dos sabores hay* 21 *opciones y de tres sabores hay* 35 *opciones. En total hay* $7 + 21 + 35 = 63$ *versiones diferentes de dulces.*

Ahora contemos las opciones que tienen sabor a coco, o piña combinado con mora. Estas son: de un sabor solo hay 1 *opción (coco), de las opciones de dos sabores,* 6 *tienen sabor a coco y* 1 *piña con mora, y de las opciones con tres sabores,* $\frac{6\times5}{2} = 15$ *tienen coco y* 5 *tienen piña combinado con mora, pero de estas últimas,* 1 *tiene coco y ya la habíamos contado, luego en total* $1+6+1+15+4 = 27$ *opciones tienen coco, o piña combinado con mora.*

	coco	*piña con mora (sin coco)*
1 sabor	1	0
2 sabores	6	1
3 sabores	15	4

Luego $63 - 27 = 36$ *opciones no tienen coco o piña combinado con mora.*

Finalmente, dado que de todas las opciones viene la misma cantidad de dulces en la caja, entonces la fracción del total de dulces de la caja que no tiene sabor a coco, ni a piña combinado con mora es $\dfrac{36}{63} = \dfrac{4}{7}$.

PROBLEMA 4.

En un acuario hay dos grupos de animales: peces y aves marinas. Para evitar el contagio del COVID-19, los administradores del acuario determinaron que por día, cada persona solo puede ir a ver a uno de los dos grupos de animales. Para ello ofrecen 4 tipos de boleta: para adultos que van a ver a los peces, para niños que van a ver a los peces, para adultos que van a ver a las aves y para niños que van a ver a las aves. Si se sabe que ayer visitaron el acuario 2020 adultos, 3000 personas vieron a los peces y que de las 1600 personas que vieron a las aves, exactamente 1000 eran niños, ¿cuántos niños vieron los peces?

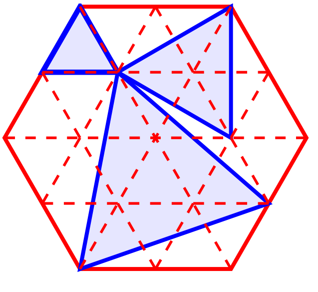
Solución 1: Dado que de las 1600 personas que vieron las aves 1000 eran niños, entonces 600 eran adultos, luego de los 2020 adultos visitantes solo 1420 vieron los peces, esto nos deja que $3000 - 1420 = 1580$ niños vieron los peces.

Solución 2: Considere el siguiente diagrama de Carroll, en el que los datos en negro son dados en el enunciado, los datos en azul y rojo se deducen, siendo el rojo la respuesta al problema.

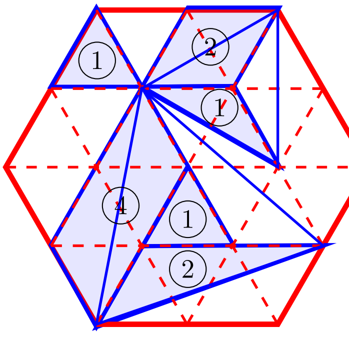
	Peces	*Aves marinas*	*Total*
Adultos	1420	600	2020
Niños	1580	1000	2580
Total	3000	1600	4600

PROBLEMA 5.

En la siguiente figura se muestra un hexágono regular de color rojo, dividido en 24 triángulos equiláteros de igual tamaño. Si la región sombreada en azul tiene $33\,cm^2$ de área, ¿cuál es el área total, en centímetros cuadrados, del hexágono rojo?



Solución: *Completando triangulitos como se muesta en la siguiente figura, tenemos que la región azul equivale a* 11 *triangulitos,*



Luego el área de cada uno de ellos es $\dfrac{33}{11} = 3\,cm^2$. *Por lo tanto el área del hexágono regular es* $3 \times 24 = 72\,cm^2$.

Problema 6.

Para la celebración de un *no-cumpleaños*, el Sombrerero Loco debe comprar los caramelos en una tienda de golosinas donde solo venden caramelos de chocolate en paquetes de 15 unidades, caramelos de fresa en paquetes de 18 unidades y caramelos de miel en paquetes de 20 unidades. ¿Cuál es la mínima cantidad de paquetes que debe comprar el Sombrerero Loco para que cumpla con su deber y se garantice que lleva la misma cantidad de caramelos de cada sabor?

Solución: *Dado que* $mcm(15, 18, 20) = 180$, *entonces el Sombrerero Loco debe comprar como mínimo* 180 *caramelos de cada sabor, esto es,* 12 *paquetes de caramelos de chocolate,* 10 *de fresa y* 9 *de miel, para garantizar que lleva la misma cantidad de caramelos de cada sabor. Por lo tanto, la mínima cantidad de paquetes que debe comprar el Sombrerero Loco es* $31 = 12 + 10 + 9$.

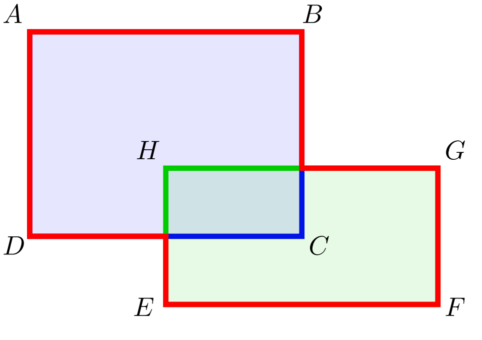
Capítulo 2

Nivel Medio

2.1. Prueba Clasificatoria

PROBLEMA 1.

Suponga que el perímetro del rectángulo $ABCD$ que se muestra en la figura es $36\,cm$ y el perímetro del rectángulo $EFGH$ es $18\,cm$. Si C es el centro del rectángulo $EFGH$ y los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{HG}$ son paralelos, ¿cuál es la longitud de la línea roja?



(a) $54\,cm$ (b) $45\,cm$ (c) $42\,cm$ (d) No es posible determinarlo (e) No sé.

Solución: *Note que la longitud de la línea roja equivale a la suma de los perímetros de los rectángulos $ABCD$ y $EFGH$, menos el perímetro del rectángulo intersección. Además el perímetro del rectángulo intersección equivale a la mitad del perímetro del rectángulo verde, por lo tanto la longitud de la línea roja es $36 + 18 - 9 = 45\,cm$.*

Problema 2.

La profesora de matemáticas ha dictado cinco números naturales. Mario, por no prestar atención, solo escuchó los números 7, 1 y 6. Si su compañera Sofía dice que la suma de los números dictados por la profesora es 22 y ningún número está repetido, ¿cuál es el producto (multiplicación) de los números que no escuchó Mario?

(a) 12 (b) 8 (c) 15 (d) 7 (e) No sé.

Solución: La suma de los cinco números dictados por la profesora es 22*, pero la suma de los tres números que Mario escuchó es* $7+1+6=14$*, de modo que los dos números que no escuchó Mario suman* 8*. Finalmente, los dos únicos números naturales, diferentes a los ya registrados, cuya suma es* 8 *son* 3 *y* 5*, por lo tanto el producto de los números que Mario no escuchó es* $3\times 5=15$.

Problema 3.

Pedro y Juan extraen, cada uno, 4 pelotas de una bolsa donde hay exactamente 8 pelotas de colores, 3 de ellas son amarillas, otras 3 son rojas y las 2 restantes son azules. Si 2 de las pelotas que extrajo Pedro son azules, podemos asegurar que de las 4 pelotas que sacó Juan

(a) 3 son amarillas y 1 es roja.

(b) 3 son rojas o 3 son amarillas.

(c) 2 son amarillas y 2 son rojas.

(d) 2 son amarillas o 2 son rojas.

(e) No sé.

Solución: Dado que dos de las pelotas que extrajo Pedro son las azules, entonces para las otras dos que extrajo Pedro están las siguientes opciones:

- 2 **amarillas,** *en cuyo caso Juan debió extraer* 1 *amarilla y las* 3 *rojas.*
- 2 **rojas,** *y entonces Juan debió extraer* 1 *roja y las* 3 *amarillas.*
- 1 **amarilla y** 1 **roja,** *luego Juan debió extraer* 2 *amarillas y* 2 *rojas.*

Por lo anterior, lo que se puede asegurar es que de las 4 *pelotas que sacó Juan* 2 *son amarillas o* 2 *son rojas.*

PROBLEMA 4.

Natalia va a una tienda donde hacen jugos con 6 frutas: mango, fresa, mora, coco, sandía y limón. Los jugos pueden tener una o dos de estas frutas. Si Natalia es alérgica al coco y no le gusta el mango acompañado de otra fruta, ¿cuántos jugos diferentes de los que ofrecen en la tienda, le gustaría tomar a Natalia?

(a) 11 (b) 10 (c) 16 (d) 19 (e) No sé.

Solución: *De los 6 sabores que ofrecen en la tienda, Natalia no tomaría jugos con coco, pues es alérgica y tampoco de mango mezclado con otro sabor. Por lo tanto, de los jugos que ofrecen en la tienda Natalia tomaría:*

de 1 sabor	5	*mango, fresa, mora, sandía y limón.*
de 2 sabores	6	*fresa-mora, fresa-sandía, fresa-limón, mora-sandía, mora-limón y sandía-limón*

En total, 11 jugos diferentes.

PROBLEMA 5.

La profesora de matemáticas le dice a Juan que si nombra un elemento que pertenezca a la intersección de los siguientes conjuntos no presenta el examen final:

A : el conjunto de los números primos.

B : el conjunto de los divisores de 18.

C : el conjunto de los divisores de 30.

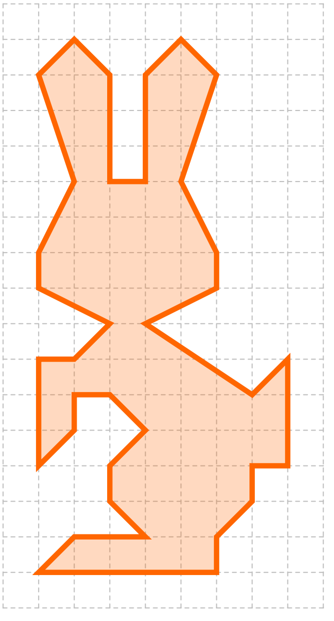
¿Cuántos números puede decir Juan para no presentar el examen?

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 4 (e) No sé.

Solución: *Los divisores de 18 son $\{1,2,3,6,9,18\}$, y los divisores de 30 son $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$. Note que los números que pertenecen a ambos conjuntos son $\{1,2,3,6\}$; sin embargo, de estos solo el 2 y el 3 son primos, por lo tanto solo existen 2 números que puede decir Juan para no presentar el examen.*

Problema 6.

¿Cuál es el área del la imagen del conejo que se muestra en la siguiente figura, si cada cuadradito de la cuadrícula tiene $3\,cm$ de lado?



(a) $684\,cm^2$ (b) $171\,cm^2$ (c) $513\,cm^2$ (d) $57\,cm^2$ (e) No sé.

Solución 1: Dividiendo la figura como indica la cuadrícula y completando los cuadraditos cuando es necesario, se llega a que el área de la figura equivale al área de 57 cuadraditos. Además, el área de cada cuadradito es $3 \times 3 = 9\,cm^2$, por lo tanto que el área de la imagen del conejo es $57 \times 9 = 513\,cm^2$.

Solución 2: Usando la Fórmula de Pick[1], tenemos:

[1]Para calcular el área de un polígono **cuyos vértices coinciden con algunos vértices de una cuadrícula** sobre la cual está dibujado, aplicamos el siguiente algoritmo:

1. Contamos los vértices de la cuadrícula que están en el **contorno** del polígono.
2. Contamos los vértices de la cuadrícula que están **dentro** del polígono.
3. Calculamos la suma de la mitad de los vértices que están en el contorno con los vértices que están en el interior, y restamos 1.
4. Finalmente, el área del polígono será el producto del resultado anterior con el área de un cuadradito de la cuadrícula.

- *número de vértices de la cuadrícula en el contorno de la figura:* 48
- *número de vértices de la cuadrícula dentro de la figura:* 34.
- *la suma de la mitad de los vértices que están en el contorno con los vértices que están en el interior menos* 1 *es* $\dfrac{48}{2} + 34 - 1 = 57$.

Finalmente, dado que el área de cada cuadradito de la cuadrícula es $9\,cm^2$, *entonces el área de la imagen del conejo es* $57 \times 9 = 513\,cm^2$.

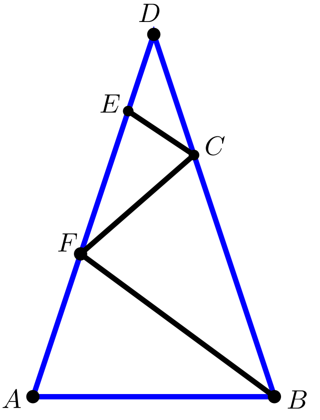
2.2. Prueba Selectiva

PROBLEMA 1.

En la siguiente figura:

- El triángulo ADB es isósceles.
- Los triángulos ABF y FBC son isósceles en B, cada uno con $90\,cm$ de perímetro.
- El triángulo EFC es isósceles en F y su perímetro es $52\,cm$.
- $CE = ED$.
- El perímetro del cuadrilátero $ABCF$ es $110\,cm$.

¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{CD}$?



(a) $12\,cm$ (b) $17\,cm$ (c) $20\,cm$ (d) $35\,cm$ (e) No sé.

Solución: *El perímetro del cuadrilátero* $ABCF$ *es* $110\,cm$ *y la suma de los perímetros de los triángulos* ABF *y* FBC *es* $180\,cm$, *luego la diferencia* $180 - 110 = 70\,cm$, *corresponde al doble de la medida del segmento* $\overline{BF}$, *entonces* $BF = BC = 35\,cm$. *De lo que se deduce que* $FC = 20\,cm$, *pues el triángulo* FBC *es isósceles, con* $BF = BC$. *Por otra parte, note que la longitud de* $\overline{AD}$ *es igual al perímetro del triángulo* EFC, *pues* $AF = FC$ *y* $CE = ED$. *Luego,*

$$DC = DB - BC = AD - BC = 52 - 35 = 17\,cm.$$

PROBLEMA 2.

Doña Lucía, la mamá de Felipe, hizo una pizza para los invitados al cumpleaños de su hijo. Para poder repartirla, primero la cortó en cuartos y luego cada cuarto en tercios. ¿A qué fracción de toda la pizza corresponde cada pedazo?

(a) $\frac{1}{12}$ (b) $\frac{2}{7}$ (c) $\frac{7}{12}$ (d) $\frac{1}{7}$ (e) No sé.

Solución: Doña Lucía cortó la pizza en 4 partes y cada parte la cortó en 3, entonces entonces la pizza quedó dividida en 12 pedazos, de modo que cada pedazo corresponde a $\frac{1}{12}$ de toda la pizza.

PROBLEMA 3.

Juan dibuja un rectángulo y Diego dibuja otro, de manera que las longitudes de los lados del rectángulo de Diego son el doble de las del rectángulo de Juan. En una caja encontraron fichas cuadradas, todas del mismo tamaño. Si con 80 de estas fichas, pueden cubrir exactamente el rectángulo de Diego, ¿cuántas fichas se necesitan para cubrir el rectángulo que hizo Juan?
Nota: las fichas no pueden sobreponerse.

(a) 10 (b) 25 (c) 20 (d) 40 (e) No sé.

Solución: Tomando como unidad de área, el área de cada ficha cuadrada, tenemos que el área del rectángulo que dibujó Diego es $80\,u^2$. Ahora, si a y b son las longitudes del rectángulo que dibujó Juan, entonces las longitudes del rectángulo de Diego son $2 \times a$ y $2 \times b$ y por lo tanto su área es $4 \times a \times b = 80\,u^2$, de ahí que el área del rectángulo de Juan es $a \times b = 20\,u^2$. Por lo tanto se necesitan 20 fichas para cubrir dicho rectángulo.

PROBLEMA 4.

David compró un libro de cuentos. El primer día de sus vacaciones, leyó 2 páginas, y como cada vez que leía le gustaban más las historias, cada día leía dos páginas más que el día anterior. Si justo el último día de sus vacaciones terminó de leer el libro que tenía 136 hojas, ¿cuántos días duraron sus vacaciones?

(a) 11 (b) 32 (c) 17 (d) 16 (e) No sé.

Solución: En la siguiente tabla registramos el número de páginas leídas por día y el acumulado de hojas leídas. Tener en cuenta que una hoja son dos páginas.

Día	*Páginas leídas*	*Total (acumulado) de hojas leídas*
1	2	1
2	4	3
3	6	6
4	8	10
5	10	15
6	12	21
7	14	28
8	16	36
9	18	45
10	20	55
11	22	66
12	24	78
13	26	91
14	28	105
15	30	120
16	32	**136**

Como el libro tiene 136 *hojas y David empezó a leer el libro el primer día de las vacaciones y terminó de leerlo el último día de sus vacaciones, se concluye que las vacaciones de David duraron* 16 *días.*

Problema 5.

Camilo tiene dos libros de matemáticas: uno verde y uno rojo, dos libros de sociales: uno azul y uno rojo, y dos libros de ciencias naturales: uno verde y uno azul. Si Camilo desea ordenarlos en una fila por colores, ¿de cuántas maneras puede hacerlo?

(a) 24 (b) 18 (c) 36 (d) 48 (e) No sé.

Solución: Para el orden de colores verde-rojo-azul, los libros se pueden ordenar de 8 *formas diferentes, a saber:*

Verde		*Rojo*		*Azul*	
M	C	M	S	S	C
M	C	M	S	C	S
M	C	S	M	S	C
M	C	S	M	C	S
C	M	M	S	S	C
C	M	M	S	C	S
C	M	S	M	S	C
C	M	S	M	C	S

Note que los colores se pueden ordenar de 6 *formas diferentes y para cada una de esas formas, los libros se pueden organizar de* 8 *formas diferentes, por lo tanto Camilo puede ordenar los libros de* $6 \times 8 = 48$ *formas diferentes.*

Problema 6.

¿Cuántos números naturales de 2 cifras dejan residuo 3 cuando se dividen entre 4?

(a) 23 (b) 25 (c) 22 (d) 24 (e) No sé.

Solución: *Los números naturales que dejan residuo* 3 *al dividirse entre* 4 *son los múltiplos* 4 *más* 3 *es decir, los números de la forma* $4 \times n + 3$*, siendo* n *un número natural. Sin embargo, cuando* $n = 0$ *y* $n = 1$ *se obtienen los números* 3 *y* 7*, respectivamente, que no son de dos cifras y lo mismo sucede cuando* n *es mayor a* 24*, de modo que,* n *debe ser mayor que* 1 *y menor o igual a* 24*. Por lo tanto hay* 23 *números naturales de dos cifras que dejan residuo* 3 *al dividirse entre* 4*.*

También es factible listar estos números: 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 59, 63, 67, 71, 75, 79, 83, 87, 91, 95 *y* 99.

29115788521

2.3. Prueba Final

Problema 1.

El *reverso* de un número es el número que se obtiene escribiendo el número de derecha a izquierda. Por ejemplo, el reverso de 78 es 87, el reverso de 123 es 321.
Determinar todas las fracciones equivalentes a $\frac{4}{7}$ tales que el numerador sea un número de dos cifras y el denominador sea el reverso del numerador.

Solución 1: Se trata de buscar los dígitos a *y* b *tales que* $\dfrac{ab}{ba} = \dfrac{4}{7}$*. Note que* $ab = 10a + b$ *y* $ba = 10b + a$*, luego*

$$\begin{aligned} \frac{ab}{ba} = \frac{10a+b}{10b+a} &= \frac{4}{7} \\ 7(10a+b) &= 4(10b+a), \\ 70a + 7b &= 40b + 4a, \\ 70a - 4a &= 40b - 7b, \\ 66a &= 33b, \\ 2a &= b. \end{aligned}$$

De modo que las fracciones que cumplen la condición del enunciado son: $\dfrac{12}{21}$, $\dfrac{24}{42}$, $\dfrac{36}{63}$, $\dfrac{48}{84}$.

Solución 2: Se hallarán los valores posibles para n *de modo que la fracción* $\dfrac{4\times n}{7\times n}$ *cumpla con la condiciones dadas.*

El menor y mayor valor que puede tomar n *es* 3 *y* 14*, respectivamente, pues tanto el numerador como el deniminador deben ser un números de dos cifras y se tiene que* $4 \times 3 = 12$ *y* $7 \times 14 = 98$*. También descartamos* $n = 10$*, pues* $7 \times 10 = 70$ *y el inverso es* 7 *(no tiene dos cifras).*

También podemos descartar los valores de n *que hagan que el dígito de las unidades del denominador sea mayor o igual que el de las decenas, pues su reverso sería mayor o igual, pero el numerador debe ser menor que el denominador. Por ejemplo, el inverso de* $7 \times 4 = 28$ *es* 84 *(el numerador sería mayor que el denominador), con eso descartamos los siguientes valores de* $n : 4, 5, 7, 8, 11$.

Solo nos quedan como posibles valores para n *los números* $3, 6, 9, 12, 13$ *y* 14*, los cuales podemos verificar uno por uno, obteniendo que las fracciones que cumplen* *las condiciones del enunciado son:*

$$\frac{4}{7} = \frac{4\times 3}{7\times 3} = \frac{4\times 6}{7\times 6} = \frac{4\times 9}{7\times 9} = \frac{4\times 12}{7\times 12},$$

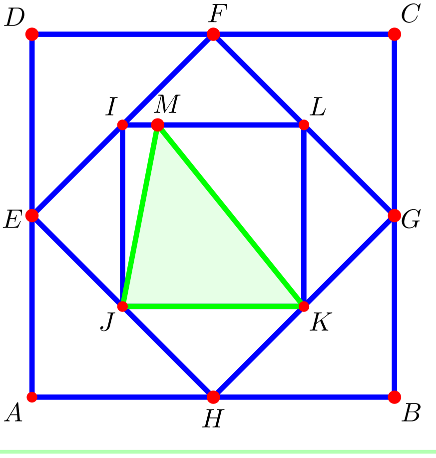
$$\frac{4}{7} = \frac{12}{21} = \frac{24}{42} = \frac{36}{63} = \frac{48}{84}.$$

Solución 3: Sean $ab = 10a + b$ *y* $ba = 10b + a$ *el numerador y denominador, respectivamente, de una fracción equivalente a* $\frac{4}{7}$*, cumpliendo las condiciones del enunciado. La diferencia de estos dos números es* $9a - 9b = 9(a - b)$*. Por otra parte, el numerador y denominador tal fracción deben ser de la forma* $4 \times c$ *y* $7 \times c$*, respectivamente, de modo que su diferencia es* $7 \times c - 4 \times c = 3 \times c$*, que por lo anterior debe ser múltiplo de 9, luego* c *es múltiplo de 3, así basta probar para* $c = 3, 6, 9$ *y* 12*. Las fracciones equivalentes a* $\frac{4}{7}$ *que cumplen las condiciones del enunciado son:*

$$\frac{12}{21}, \frac{24}{42}, \frac{36}{63}, \frac{48}{84}.$$

PROBLEMA 2.

En la siguiente figura $ABCD$ es un cuadrado, E, F, G, H, I, J, K, y L son los puntos medios de los correspondientes segmentos, y M es un punto sobre el segmento $\overline{IL}$. Si el área del triángulo JKM es $18\,cm^2$, ¿cuál es el perímetro del cuadrado $ABCD$?



Solución 1: *Dado que E, F, G, H, I, J, K, y L son los puntos medios de los correspondientes segmentos y $ABCD$ es un cuadrado, se deduce que $EFGH$ y $JILK$ también son cuadrados. Además, el área de $EFGH$ es la mitad del área de $ABCD$ y el área de $JILK$ es la mitad del área de $EFGH$, luego el área de $ABCD$ es cuatro veces el área de $JILK$.*

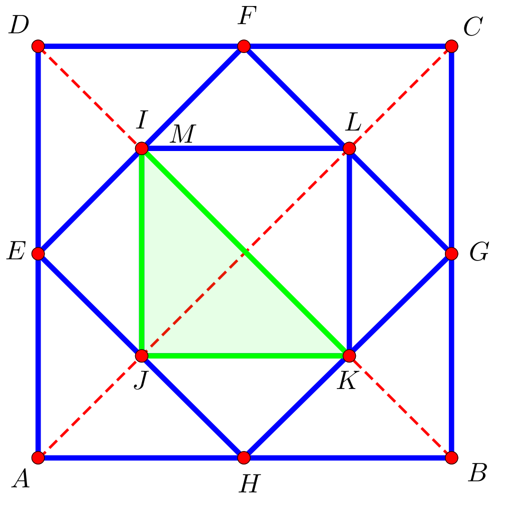
Por otro lado, note que la altura del triángulo JKM, respecto a la base $\overline{JK}$, coincide con la longitud segmento $\overline{IJ}$, así que el área de este triángulo es

$$\frac{IJ \times JK}{2} = 18\ cm^2,$$

de ahí que el área del cuadrado $JILK$ es $IJ \times JK = 36\,cm^2$.

Por lo anterior, el área del cuadrado $ABCD$ es $4 \times 36 = 144\,cm^2$, y dado que $144 = 12 \times 12$, se conluye que cada lado de este cuadrado mide $12\,cm$, luego su perímetro es $4 \times 12 = 48\,cm$.

Solución 2: *Dado que M es cualquier punto sobre el segmento $\overline{IL}$, podemos "deslizar"M hasta I y dividir el cuadrado $ABCD$ en 16 triángulos iguales, trazando las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, como se muestra en la figura:*



Note que el área de 2 de dos de los 16 triángulos es $18\,cm^2$, luego el área del cuadrado $ABCD$, esto es, de los 16 triangulos, está dada por $144\,cm^2 = 12 \times 12\,cm^2$, por lo que el perímetro de dicho cuadrado es $48\,cm$.

Problema 3.

Cuando Alicia emprendió su persecución al Conejo Blanco, cayó por la madriguera y llegó a un extraño vestíbulo que tenía 1000 puertas en línea recta enumeradas desde el 1 hasta el 1000. Alicia sabía que alguna de ellas llevaba al Conejo Blanco, así que decidió probar abriendo las puertas de tres formas: primero, intentó abriendo todas las puertas cuyo número era un múltiplo de 15. Después, intentó abriendo las puertas cuyo número fuera un múltiplo de 9. Y finalmente, desesperada, abrió cada puerta cuyo número era un múltiplo de 4 y la siguiente. Si cada vez que Alicia abría una puerta la volvía a cerrar, ¿cuántas puertas fueron abiertas 3 veces por Alicia?

Solución 1: *Dado que Alicia realizó 3 intentos, buscamos las puertas abiertas en las 3 ocasiones. Haremos el conteo en dos partes, así:*

Caso 1. ***Las puertas cuyo número es múltiplo de*** 15, ***de*** 9 ***y de*** 4***;*** *es decir, múltiplo del mínimo común múltiplo de dichos números, que es* 180. *Por tanto, entre la puerta* 1 *y la puerta* 1000 *las que tienen los números:* 180, 180×2, 180×3, 180×4 *y* 180×5, *fueron abiertas tres veces por Alicia.*

Caso 2. ***Las puertas cuyo número es múltiplo de*** 15, ***de*** 9 ***y también son el siguiente de un múltiplo de*** 4. *Hallamos el mínimo común múltiplo de* 15 *y* 9, *que es* 45 *y buscamos entre las opciones:* $45, 45 \times 2, 45 \times 3, \ldots, 45 \times 22$ *aquellas que cumplan la última condición. Sabemos que si un número es el siguiente de un múltiplo de* 4, *al restarle* 1 *nos quedará un múltiplo de* 4, *así, podemos comprobar si un número de la lista anterior cumple, restándole* 1 *y verificando, con el criterio de divisibilidad del* 4, *si es múltiplo de este número. De tal forma, encontramos las* 6 *puertas:* 45, 45×5, 45×9, 45×13, 45×17 *y* 45×21.

Se concluye que en total hay $5 + 6 = 11$ *puertas que Alicia abrió* 3 *veces.*

Solución 2: *Cada puerta que haya sido abierta* 3 *veces es múltiplo de* 15 *y de* 9, *es decir, de* 45, *y es múltiplo de* 4 *o deja residuo* 1 *entre* 4. *Sea* $P = 45n$ *el número de una puerta que fue abierta* 3 *veces, entonces el máximo valor que puede tomar* n *es* 22, *pues* $45 \times 23 = 1035$. *Además,* $45 = 4k + 1$, *entonces* $P = 45n$ *deja el mismo residuo entre* 4 *que* n. *Considerando las posibilidades de* n, *desde el* 1 *hasta el* 22, *hay* 5 *múltiplos de* 4 *y* 6 *números que dejan residuo*

1 *entre* 4. *Luego hay* 11 *puertas cuyos números son múltiplos de* 45 *y que dejan residuo* 0 *o* 1 *entre* 4, *estas son las puertas que Alicia abrió* 3 *veces.*

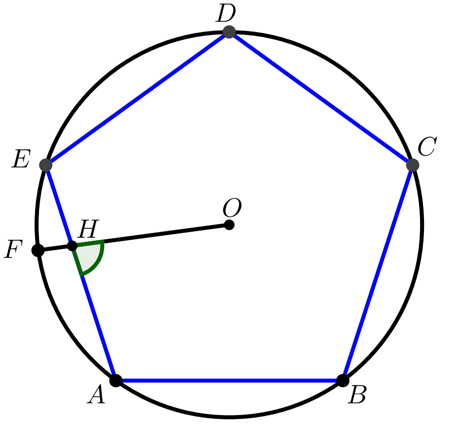
PROBLEMA 4.

El Sombrerero Loco hace un experimento: lanza dos dados y anota en su libreta el resultado de sumar los números que quedan en la cara superior de cada dado. ¿Cuántas veces debe lanzar los dados el Sombrerero Loco, para estar seguro de que ha escrito el mismo número al menos 5 veces?
Nota: Cada dado es un cubo cuyas caras están enumeradas del 1 al 6.

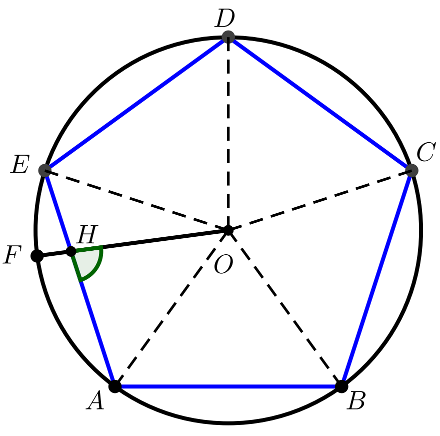
Solución: El Sombrerero Loco puede anotar 11 *números:* 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 *y* 12. *En el peor de los casos, el Sombrerero anota cada posible resultado* 4 *veces, y en tal caso habrá realizado* $4 \times 11 = 44$ *lanzamientos. Así, basta lanzar otra vez los dados para garantizar que hay uno escrito al menos* 5 *veces, por lo que con* 45 *lanzamientos, el Sombrerero podrá estar seguro de que ha escrito el mismo número al menos* 5 *veces.*

PROBLEMA 5.

En la siguiente figura, el pentágono $ABCDE$ es regular y está inscrito en la circunferencia, cuyo centro es el punto O. Además, el punto F está sobre la circunferencia y H es el punto intersección entre los segmentos $\overline{EA}$ y $\overline{FO}$. Si la longitud del arco FA es el doble de la longitud del arco EF, ¿cuál es la medida del ángulo AHO?



Solución: Considere la siguiente figura:



Note que los segmentos punteados dividen al círculo en 5 *partes iguales, luego* $\measuredangle EOA = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. *Como la longitud del arco* FA *es el doble del arco* EF *entonces*

$$\measuredangle FOA = \measuredangle HOA = \frac{2}{3}\measuredangle EOA = \frac{2}{3} \times 72^\circ = 48^\circ.$$

Por otra parte, note que el triángulo AOE *es isósceles en* O *(pues dos de sus lados son radios del círculo), entonces* $\measuredangle OAH = \measuredangle AEO$ *y la suma de las medidas de los ángulos internos de todo tríangulo es* 180°, *por lo tanto*

$$\begin{aligned}
\measuredangle OAH + \measuredangle AEO + \measuredangle EOA &= 180^\circ,\\
2 \times \measuredangle OAH + 72^\circ &= 180^\circ,\\
2 \times \measuredangle OAH &= 180^\circ - 72^\circ,\\
2 \times \measuredangle OAH &= 108^\circ,\\
\measuredangle OAH &= 54^\circ.
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el mismo resultado de la suma de ángulos internos al triángulo OHA *tenemos:*

$$\begin{aligned}
\measuredangle AHO &= 180^\circ - \measuredangle HOA - \measuredangle OAH,\\
\measuredangle AHO &= 180^\circ - 48^\circ - 54^\circ,\\
\measuredangle AHO &= 78^\circ.
\end{aligned}$$

Problema 6.

La Reina Blanca invita a Alicia y a sus 5 amigos a jugar dominó. Sin embargo, como es el *País de las Maravillas,* las fichas de este dominó tienen números del 0 al 15. ¿Cuál es la cantidad máxima de fichas que puede recibir cada jugador para que todos tengan la misma cantidad de fichas?
Nota: El dominó está compuesto por fichas rectangulares distintas, de manera que una de sus caras está dividida en dos cuadrados, cada uno de los cuales tiene un número de puntos, en este caso entre 0 a 15 puntos.

Solución: Desde el 0 hasta el 15 hay 16 números. Contemos las fichas del dominó considerando los siguientes casos:

Caso 1. *Los números de la ficha son el mismo. En este caso hay 16 fichas:*

$$\boxed{0\,|\,0},\ \boxed{1\,|\,1},\ \boxed{2\,|\,2},\ \boxed{3\,|\,3},\dots,\boxed{15|15}.$$

Caso 2. *Los dos números de la ficha son diferentes. En este caso, cada uno de los 16 números puede ir con alguno de los otros 15, por lo tanto habrán $16\times 15 = 240$, pero hasta aquí hemos contado dos veces la misma ficha, pues por ejemplo, la ficha $\boxed{1\,|\,0}$ es la misma $\boxed{0\,|\,1}$. Por lo tanto solo hay $\dfrac{240}{2} = 120$ fichas diferentes en este caso.*

En total el dominó tiene 136 fichas y hay 7 jugadores, así que para que todos tengan la misma cantidad de fichas, la máxima cantidad que le corresponde a cada uno es 19, pues $7\times 19 = 133$, y sobran 3 fichas.

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

Problema 1.

David debe construir un rectángulo cuyo perímetro sea $20\,cm$ usando fichas cuadradas de área $4\,cm^2$. ¿Cuál es el mayor área que puede tener este rectángulo?

(a) $16\,cm^2$ (b) $36\,cm^2$ (c) $24\,cm^2$ (d) $40\,cm^2$ (e) No sé.

Solución: Dado que cada ficha cuadrada tiene $4\,cm^2$ de área, cada uno de sus lados mide $2\,cm$, así el rectángulo que construya David debe tener lados de longitud par (en centímetros). Además, como el perímetro del rectángulo debe ser $20\,cm$ y este se puede interpertar como el doble la suma de las longitudes de dos lados consecutivos, entonces dicha suma debe ser $10\,cm$. De modo que el rectángulo puede tener lados de 2 y 8 o de 4 y 6 centímetros, respectivamente. Pero es el segundo rectángulo, que se forma con 3 fichas de base y 2 de altura, el que tiene la mayor área: $24\,cm^2$.

Problema 2.

Pedro necesita una clave para su celular de 4 dígitos, pero quiere que tenga estas condiciones:

- Los dígitos deben estar en forma ascendente de izquierda a derecha.
- El último dígito debe ser par.
- No puede haber 2 dígitos consecutivos.

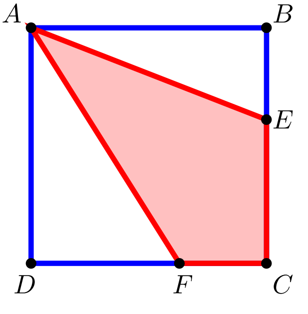
¿Cuántas claves diferentes cumplen estas condiciones?

(a) 11 (b) 8 (c) 10 (d) 7 (e) No sé.

Solución: En total hay 11 claves diferentes que cumplen estas condiciones, a saber: $\boxed{0246}$, $\boxed{2468}$, $\boxed{1468}$, $\boxed{0468}$, $\boxed{1368}$, $\boxed{0368}$, $\boxed{0268}$, $\boxed{1358}$, $\boxed{0358}$, $\boxed{0258}$ *y* $\boxed{0248}$.

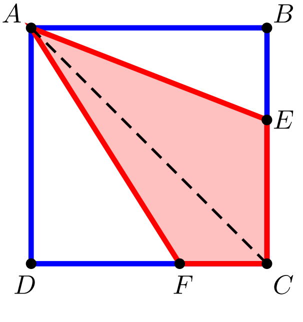
Problema 3.

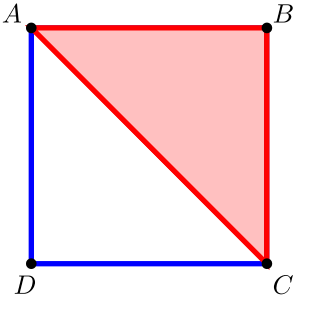
En la siguiente figura el área del cuadrado $ABCD$ es $30\,cm^2$. Si $EB = FC$, ¿cuál es el área de la región sombreada de rojo?



(a) $20\,cm^2$ (b) $15\,cm^2$ (c) $10\,cm^2$ (d) $18\,cm^2$ (e) No sé.

Solución: Considere las siguientes figuras:





Dado que $ABCD$ es un cuadrado tenemos que $\overline{AD} = \overline{AB}$ y además, $\overline{EB} = \overline{FC}$ luego el área de los triángulos $\triangle AFC$ y $\triangle AEB$ es igual. Por lo tanto, el área sombreada de rojo es igual a la mitad del área del cuadrado $ABCD$, es decir $\dfrac{30\,cm^2}{2} = 15\,cm^2$.

Problema 4.

La temperatura en Bucaramanga aumenta $1^\circ\,C$ cada 2 horas hasta llegar a las $12:00$ del medio día, a partir de esta hora la temperatura disminuye $2^\circ\,C$ cada hora y media. Si a las $8:00$ de la mañana se registra una temperatura de $21^\circ\,C$, ¿qué temperatura tendrá Bucaramanga a las $4:30$ de la tarde?

(a) $19^\circ\ C$ (b) $17^\circ\ C$ (c) $20^\circ\ C$ (d) $15^\circ\ C$ (e) No sé.

Solución: Desde las 8 a.m. hasta las 12 m. hay 4 horas, por lo tanto la temperatura a las 12 m. será $21^\circ + 2^\circ = 23^\circ\,C$, pues cada dos horas aumenta un grado. Ahora, desde las 12 m. hasta las $4:30$ p.m hay 4 horas y media, por lo tanto la temperatura a las $4:30$ de la tarde será $23^\circ - 6^\circ = 17^\circ\,C$, ya que desde las 12 m. cada hora y media disminuye 2 grados.

Problema 5.

Sofía y Juan José están haciendo una venta de ponqués. La señora Isabel les dice que el precio total del ponqué de vainilla es 6000 pesos y el de chocolate es 4000 pesos . Si un cliente solo quiere comprar $\frac{3}{4}$ del ponqué de vainilla y un $\frac{1}{4}$ del ponqué de chocolate, ¿cuánto deben cobrarle al cliente?

(a) 2500 pesos (c) 6000 pesos (e) No sé

(b) 5000 pesos (d) 5500 pesos

Solución: La unidad de ponqué de vainilla vale 6000 pesos, entonces $\frac{3}{4}$ de este ponqué valen

$$\frac{3}{4}(6000) = 4500.$$

Por otro lado, la unidad de ponqué de chocolate vale 4000, por lo que $\frac{1}{4}$ vale

$$\frac{1}{4}(4000) = 1000.$$

De esta forma, Sofía y Juan José deben cobrarle 5500 pesos al cliente.

Problema 6.

Luis extrae dos balotas de una bolsa donde hay 20 balotas enumeradas del 1 a 20. Luis reta a su amigo Camilo a que le diga la diferencia entre el mayor y el menor de los números que tienen las balotas que extrajo, y para ello le da las siguientes pistas:

- ★ Un número es múltiplo de 5 y el otro es múltiplo de 2.
- ★ La suma de los dos números es múltiplo de 11.
- ★ El máximo común divisor de los números es 3.

¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor de los números que tienen las balotas que extrajo Luis?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) No sé.

Solución 1: *Dado que un número es múltiplo de* 5, *el otro es múltiplo de* 2, *y el máximo común divisor de los números es* 3, *entonces un número es múltiplo de* 15 *y el otro, múltiplo de* 6. *Además, ambos números están entre* 1 *y* 20, *por lo tanto el que es múltiplo de* 15 *es el mismo* 15 *y los posibles múltiplos de* 6 *son:* $6, 12, 18$. *Finalmente, el par de números cuya suma es múltiplo de* 11 *es:* 15 *y* 18. *Así que la diferencia entre el mayor y el menor de los números que tienen las balotas que extrajo Luis es* $18 - 15 = 3$.

Solución 2: *Ambos números son múltiplos de* 3, *por lo que su diferencia es un múltiplo de* 3, *y la única opción de respuesta que cumple esto es* 3.

3.2. Prueba Selectiva

Problema 1.

Laura sale de su casa y cuando llega a su cita médica mira su reloj y se da cuenta que llegó a tiempo. Luego mira el reloj que está en la pared y descubre que había llegado 20 minutos tarde, por lo que decide ajustar la hora en su reloj con la que marca el reloj de la pared. Después llega a la peluquería y la señorita le dice que ha llegado 5 minutos antes de la cita. A Laura le parece raro puesto que acorde con su reloj llegó puntual. Si el reloj de la señorita estaba adelantado 3 minutos, ¿cuántos minutos estaba adelantado o atrasado el reloj de Laura al principio?

(a) 8 minutos atrasado

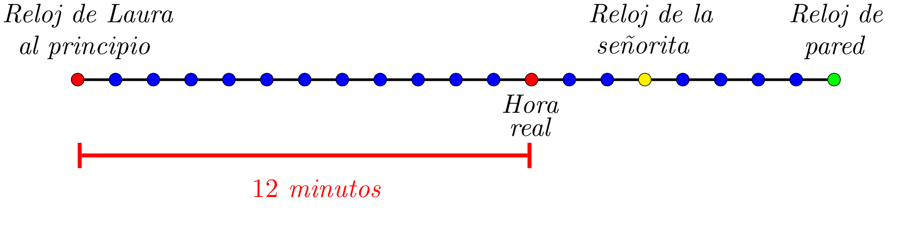
(b) 12 minutos atrasado

(c) 17 minutos adelantado

(d) 17 minutos atrasado

(e) No sé.

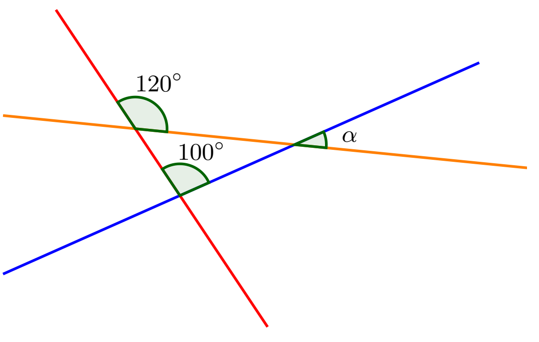
Solución 1: *De la información: "Laura sale de su casa y cuando llega a su cita médica mira su reloj y se da cuenta que llegó a tiempo. Luego mira el reloj que está en la pared y descubre que había llegado 20 minutos tarde", se deduce que el reloj de Laura estaba atrasado 20 minutos con respecto al de la pared (en el lugar de la cita médica). En este momento, Laura decide "ajustar la hora en su reloj con la que marca el reloj de la pared". Ahora, al llegar a la peluquería la señorita le dice que ha llegado 5 minutos antes de la cita, pero el reloj de la señorita estaba adelantado 3 minutos, esto es, la hora que marcaba el reloj de pared (que es la que ahora marca el reloj de Laura) estaba adelantada 8 minutos respecto a la hora correcta, por lo tanto, el reloj de Laura estaba atrasado solo $20 - 8 = 12$ minutos. El siguiente diagrama ilustra la solución.*



Solución 2: Supongamos que Laura tiene su cita médica a las 9 *y su cita en la peluquería a las* 10.
Laura llega al médico, ve su reloj y se da cuenta que marca las 9 *en punto, pero ve que el reloj de la pared marca las* $9:20$, *entonces Laura adelanta su reloj a las* $9:20$, *pasan* 40 *minutos y Laura llega a su cita en la peluquería pensando que está a tiempo, pero la señorita de la peluquería le dice que son las* $9:55$, *sin embargo, realmente son las* $9:52$.
Entonces, hace 40 *minutos, cuando el reloj de Laura marcaba las* 9 *eran realmente las* $9:12$. *Esto quiere decir que al principio el reloj de Laura estaba atrasado* 12 *minutos.*

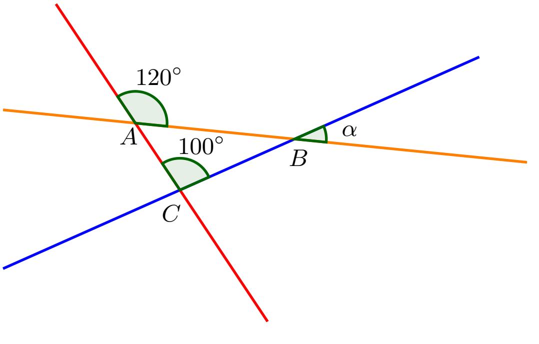
PROBLEMA 2.

Teniendo en cuenta la información que se muestra en la siguiente figura, ¿cuál es la medida del ángulo marcado con α?



(a) 30° (b) 60° (c) 40° (d) 20° (e) No sé.

Solución: Considere la siguiente figura, en la que se han nombrado los puntos de intersección de las rectas:



Note que $\measuredangle CAB = 180° - 120° = 60°$ *y dado que la suma de las medidas de los ángulos interiores de todo triángulo es* $180°$, *entonces*

$$\measuredangle ABC = 180° - 60° - 100° = 20°.$$

Finalmente, note que los ángulos ABC *y* α *son opuestos por el vértice, por lo tanto miden lo mismo, de ahí que* $\alpha = 20°$.

PROBLEMA 3.

Pedro fue al mercado y compró 2 manzanas y 3 peras. El vendedor por equivocación intercambió los precios de las manzanas con los de las peras y le cobró a Pedro 6000 pesos. Si el valor cobrado excede en 1000 pesos al valor real de compra, ¿cuál es el valor de una manzana y una pera?

(a) 1100 pesos

(b) 1200 pesos

(c) 2200 pesos

(d) 2300 pesos

(e) No sé.

Solución 1: Si m *es el precio de una manzana y* p *el precio de una pera, entonces el vendedor cobró* $3m+2p = 6000$, *pero el valor real es* $2m+3p = 5000$. *Sumando estas dos ecuaciones tenemos:*

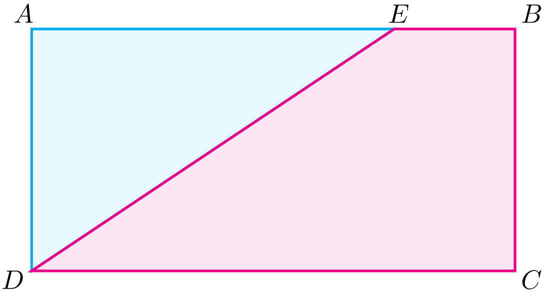
$$\begin{array}{c} 3m + 2p = 6000 \\ 2m + 3p = 5000 \\ \hline 5m + 5p = 11000 \end{array}$$

Por lo tanto una manzana y una pera cuestan $m + p = \dfrac{11000}{5} = 2200$ *pesos.*

Solución 2: La diferencia entre el valor cobrado y el valor real es 1000 *pesos, entonces el precio de una manzana es* 1000 *pesos más que el de una pera, luego el precio de dos manzanas será* 2000 *pesos más que el precio de* 2 *peras, pero esto quiere decir que* 5 *peras valen* 3000 *pesos, así que cada pera vale* $\$600$ *y entonces una manzana vale* $\$1600$. *Por lo tanto, el valor de una manzana y una pera es* 2200 *pesos.*

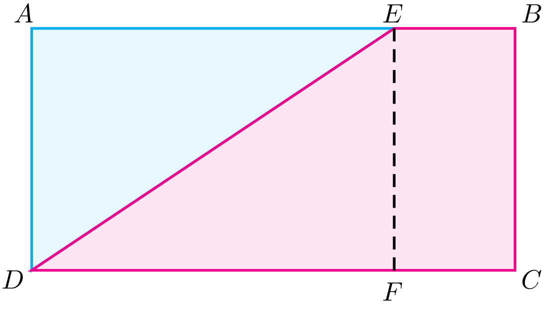
PROBLEMA 4.

En la siguiente figura, $ABCD$ es un rectángulo tal que el lado $\overline{AB}$ mide el doble del lado $\overline{AD}$. Si el área del cuadrilátero $DEBC$ es el doble del área del triángulo AED y el perímetro del rectángulo $ABCD$ es $36\,cm$, ¿cuánto mide el segmento $\overline{AE}$?



(a) $6\,cm$ (b) $12\,cm$ (c) $8\,cm$ (d) $10\,cm$ (e) No sé.

Solución: Considere la siguiente figura, en la que se ha trazado $\overline{EF}$ perpendicular a $\overline{DC}$.



Note que los triángulos AED y FDE tienen la misma área, y dado que el área del cuadrilátero $DEBC$ es el doble del área del triángulo AED, entonces el área del rectángulo $EBCF$ es igual al área del triángulo AED, es decir

$$EB \times BC = \frac{AE \times AD}{2},$$

pero $AD = BC$, entonces $2 \times EB = AE$.

Por otra parte, el perímetro del rectángulo $ABCD$ es $2 \times (BC + AB) = 36\,cm$

y del enunciado se tiene que $BC = \dfrac{1}{2}AB$, *entonces*

$$\begin{aligned} 2 \times (BC + AB) = 2 \times \left(\frac{1}{2}AB + AB\right) &= 36\,cm, \\ 2 \times \frac{3}{2}AB &= 36\,cm, \\ 3 \times AB &= 36\,cm, \\ AB &= 12\,cm. \end{aligned}$$

Finalmente, note que $AB = AE + EB$, *pero vimos que* $2 \times EB = AE$, *entonces* $EB = 4\,cm$ *y* $AE = 8\,cm$.

PROBLEMA 5.

El producto de tres números naturales múltiplos de 3, pero diferentes de 3, es 2835. ¿Cuál es la suma de estos números?

(a) 53 (b) 45 (c) 93 (d) 49 (e) No sé.

Solución: *La descomposición de* 2835 *en factores primos es* $2835 = 3^4 \times 5 \times 7$, *luego los tres números naturales múltiplos de* 3, *diferentes de* 3, *cuyo producto es* 2835, *son:* 9, 15 *y* 21, *pues* $2835 = 3^2 \times (5 \times 3) \times (7 \times 3) = 9 \times 15 \times 21$; *y la suma de estos números es* $9 + 15 + 21 = 45$.

PROBLEMA 6.

Laura quiere elegir una clave para su celular que sea un múltiplo de 3 de cuatro cifras, que además cumpla las siguientes condiciones:

- Dos de sus dígitos deben ser pares y los otros dos impares.
- La clave debe leerse igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

¿Cuántas posibilidades tiene Laura para elegir la clave?

(a) 16 (b) 9 (c) 18 (d) 50 (e) No sé.

Solución: *El número de la clave se debe leer igual de izquierda a derecha y de derecha a izquierda, entonces tiene la forma:* $abba$, *donde* a *y* b *son dígitos. Además, debe ser múltiplo de* 3, *entonces la suma de sus cifras:* $a + b + b + a = 2 \times (a + b)$, *tiene que ser múltiplo de* 3, *de ahí que* $a + b$ *es múltiplo de* 3.

Por otro lado, a y b deben tener diferente paridad, es decir, uno es par y el otro impar. Así, buscamos las parejas de cifras de diferente paridad y que sumadas den un múltiplo de 3. *Estas son:* $(0,3)$, $(0,9)$, $(2,1)$, $(2,7)$, $(4,5)$, $(6,3)$, $(6,9)$, $(8,1)$ *y* $(8,7)$. *El caso donde a es par y b es impar son las parejas descritas anteriormente y el caso donde a es impar y b es par, son las mismas parejas, pero cambiando de orden las entradas, sin embargo, los números* $0330 = 330$ *y* $0990 = 990$ *no pueden incluirse, pues no son de cuatro cifras, sino de tres.* [1]

Por tanto, Laura tiene $(2 \times 9) - 2 = 18 - 2 = 16$, *maneras diferentes de escoger su clave, a saber:* 1221, 1881, 3003, 3663, 5445, 7227, 7887, 9009, 9669, 2112, 8118, 6336, 4554, 2772, 8778 *y* 6996.

[1] ¡Por una coma!
En el enunciado dice:

> *Laura quiere elegir una clave para su celular que sea un múltiplo de* 3 *de cuatro cifras, que además cumpla las siguientes condiciones:* (...)

y no,

> *Laura quiere elegir una clave para su celular que sea un múltiplo de* 3, *de cuatro cifras que además cumpla las siguientes condiciones:* (...)

Para el segundo caso, sí serían válidas las claves 0330 y 0990, puesto que 330 y 990 son múltiplos de 3 y la clave tiene cuatro cifras. Pero, el enunciado pedía claves que sean múltiplos de 3 de cuatro cifras, y los números 330 y 990 aunque son múltiplos de 3, no tienen cuatro cifras.

3.3. Prueba Final

PROBLEMA 1.

Un granjero repartió todo el contenido del último sobre de fertilizante para sus tres cultivos, en forma directamente proporcional a su extensión. El cultivo de zahanorias tiene $25\,m^2$ de extensión, el de habichuelas, $15\,m^2$ y el de arvejas, $10\,m^2$. Si al cultivo de zanahorias le correspondió 140 gramos más de fertilizante que al cultivo de habichuelas, ¿cuántos gramos de fertilizante tenía el sobre del granjero?

Solución: El cultivo de zanahoria tiene $10\,m^2$ más de extensión que el de habicuelas, y le correspondió 140 gramos más de fertilizante que al cultivo de habichuela, entonces por cada $10\,m^2$ de extensión se necesitan 140 gramos de fertilizante o equivalentemente por cada $5\,m^2$ de extensión se necesitan 70 gramos de fertilizante. Así, tenemos que en el cultivo de arvejas se utilizaron 140 gramos de fertilizante, en el de habichuelas, $140 + 70 = 210$ gramos y en el de zanahorias, $210+140 = 350$ gramos. Sumando estas cantidades concluimos que el sobre del granjero tenía $140 + 210 + 350 = 700$ gramos de fertilizante.

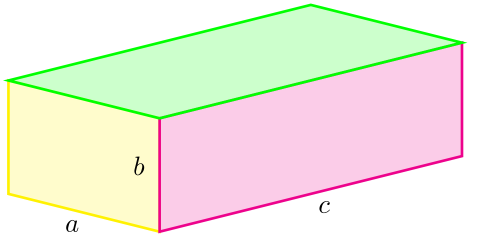
PROBLEMA 2.

El Sombrerero Loco desea obsequiar a la Reina de Corazones uno de sus fabulosos sombreros. Para ello, elabora una caja tal que el área superficial de tres de sus caras es: $49\,cm^2$, $27\,cm^2$ y $75\,cm^2$. ¿Cuál es el volumen de la caja para el fabuloso sombrero?
Nota: todas las caras de la caja son rectangulares.

Solución: Siendo a, b y c el largo, ancho y alto de la caja, respectivamente, se tiene, sin pérdida de generalidad, que: $a \times b = 49$, $a \times c = 27$ y $b \times c = 75$. Luego,

$$\begin{aligned}(a \times b) \times (a \times c) \times (b \times c) &= 49 \times 27 \times 75,\\ a^2 \times b^2 \times c^2 &= 7^2 \times 5^2 \times 3^4,\\ (a \times b \times c)^2 &= (7 \times 5 \times 9)^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto el volumen es $a \times b \times c = 7 \times 5 \times 9 = 315\,cm^3$.



Problema 3.

Alicia y el Sombrerero Loco juegan a "disfrazar" de números las palabras que tienen a lo sumo 10 letras diferentes. Para ello, reemplazan cada letra diferente por un dígito diferente. ¿De cuántas maneras distintas pueden "disfrazar" la palabra JABBERWOCKY de un número que sea múltiplo de 60 y no de 9?

Solución: *Dado que el número debe ser múltiplo de* 60, *entonces es divisible por:* 10, 4 *y* 3 *pero no por* 9. *Entonces* $Y = 0$ *y* KY *debe ser múltiplo de* 4, *luego* $K \in \{2, 4, 6, 8\}$. *Ahora bien, la suma de todos los dígitos es* 45, *entonces la letra que se repite* B *debe ser* 3 *o* 6, *para que la suma de los dígitos del número sea múltiplo de* 3, *pero no de* 9. *Consideremos los siguientes casos:*

Caso $B = 3$: $Y = 0$, *es decir tiene* 1 *sola opción,* K *tiene* 4 *opciones,* J *tiene* 7 *opciones,* A *tiene* 6 *opciones,* E *tiene* 5, R *tiene* 4, W *tiene* 3, O *tiene* 2 *y* C *tiene* 1, *por el principio multiplicativo hay*

$$4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 20160.$$

Caso $B = 6$: $Y = 0$, *es decir tiene* 1 *sola opción,* K *tiene* 3 *opciones,* J *tiene* 7 *opciones,* A *tiene* 6 *opciones,* E *tiene* 5, R *tiene* 4, W *tiene* 3, O *tiene* 2 *y* C *tiene* 1, *por el principio multiplicativo hay*

$$3 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 15120.$$

En total, 35280 *"disfraces" diferentes.*

PROBLEMA 4.

En un grupo de 15 científicos algunos son matemáticos y los demás son biólogos. Se sabe que el promedio de las edades de los biólogos es 41 años, mientras que el promedio de las edades de los matemáticos es 38 años. Si el promedio de las edades de los 15 científicos es 39,8 años, ¿cuántos científicos de este grupo son matemáticos?

Solución: Podemos suponer que la edad de cada uno de los matemáticos es 38 años y la edad de cada biólogo es 41 años, entonces el promedio está dado por

$$\frac{41B + 38M}{B + M} = 39{,}8,$$

donde B y M representan el número de biólogos y matemáticos, respectivamente. Operando,

$$\begin{aligned} 41B + 38M &= 39{,}8\,(B + M)\,, \\ 41B - 39{,}8B &= 39{,}8M - 38M, \\ 1{,}2B &= 1{,}8M. \end{aligned}$$

Luego $\frac{6}{5}B = \frac{9}{5}M$, esto es $B = \frac{3}{2}M$. Teniendo esta relación, solo nos queda encontrar valores que cumplan que $B + M = 15$ y $B = \frac{3}{2}M$ sea un número natural, estos son: $M = 6$ y $B = \dfrac{3 \times 6}{2} = 9$. Por lo tanto, en el grupo de científicos, 6 son matemáticos.

PROBLEMA 5.

La clave del teléfono de Karen es un número de cuatro cifras que al ser multiplicado por 99999 se obtiene un número cuyas últimas cuatro cifras son 2379. ¿Cuál es la clave del teléfono de Karen?

Solución: Sea abcd la clave del teléfono de Karen. Note que:

$$\begin{aligned} abcd \times 99999 &= abcd \times (100000 - 1) \\ &= abcd00000 - abcd \\ &= \ldots 2379. \end{aligned}$$

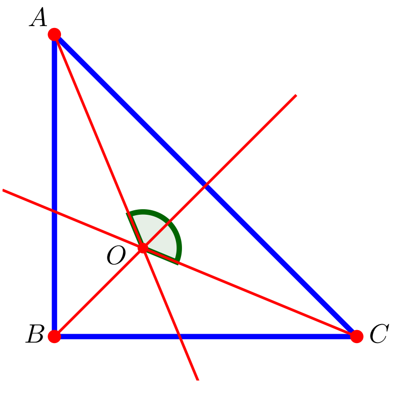
Reescribiendo la última igualdad en forma vertical tenemos:

$$\begin{array}{r} abcd00000 \\ - \qquad\quad abcd \\ \hline \ldots 2379 \end{array}$$

De donde podemos deducir fácilmente que la clave del teléfono de Karen es $abcd = 7621$.

Problema 6.

En un triángulo ABC isósceles y rectángulo en B, se trazan las bisectrices de sus ángulos interiores, las cuales se cortan en un punto O, llamado el baricentro. Determine la medida del ángulo COA en grados.



Nota: La bisectriz de un ángulo es una semirrecta con punto inicial en el vértice del ángulo y que lo divide en dos ángulos con la misma medida.

Solución: *El triángulo* ABC *es rectángulo e isósceles en* B, *entonces* $\measuredangle CBA = 90°$ *y* $\measuredangle BAC = \measuredangle ACB = 45°$. *Además,* $\overrightarrow{AO}$ *y* $\overrightarrow{CO}$ *son bisectrices, entonces* $\measuredangle OAC = \measuredangle ACO = \dfrac{45°}{2} = 22{,}5°$. *Finalmente, dado que la suma de las medidas de los ángulos internos de todo triángulo es* $180°$, *se concluye que* $\measuredangle COA = 180° - 2 \times 22{,}5° = 135°$.

Apéndice A

Cuadro de Honor

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la Novena versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Primaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 2736 participantes del certamen, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

NIVEL BÁSICO

Puesto	Medalla	Participante
1.º		*Andrés Stiven Lozano Guillin* *IE Colegio Cristiano Luz y Vida, Ocaña.*
2.º		*Andrés Felipe Mejía Peñaloza* *Colegio La Buena Semilla, Socorro.*
3.º		*Juan Esteban Cárdenas Olarte* *Colegio La Buena Semilla, Socorro.*
4.º		*Josué Daniel Castellanos Quiroga* *Liceo Patria Ciencia Virtud, Bucaramanga.*
5.º		*Isabela Torres Zuleta* *ENS Francisco de Paula Santander, Málaga.*

NIVEL MEDIO

Puesto	Medalla	Participante
1.º		*Michell Karina Beltrán Saraza* *Colegio de Santander, Bucaramanga.*
2.º		*Eloísa Barrera Sánchez* *Glenn Doman Escuela Precoz, Floridablanca.*
3.º		*Juan Miguel Lemus Guerrero* *Don Bosco School, Ocaña.*
4.º		*Ana Sofía Vergel Yaruro* *Gimnasio Campestre Villa Margarita, Ocaña.*
5.º		*Nicolás Bonilla Chinchilla* *ENS Francisco de Paula Santander, Málaga.*

NIVEL AVANZADO

Puesto	Medalla	Participante
1.º		*Pablo Andrés Encinales Rivera* *Gimnasio San Diego, Floridablanca.*
2.º		*Julieth Torres Contreras* *Colegio Campestre Goyavier, Floridablanca.*
3.º		*Sara Victoria Rojas Baene* *Institución Educativa La Presentación, Ocaña.*
4.º		*Tomás David Villamizar Salazar* *Gimnasio Superior Empresarial Bilingüe, Bucaramanga.*
5.º		*Janetxy Katerin Avendaño Ortiz* *Escuela Normal Superior Sady Tobón Calle, Cerrito.*

Bibliografía

[1] Gómez J., Valdez R. y Vázquez R. *Principio de las Casillas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2011.

[2] Hemmerling E. *Geometría Elemental.* Bakersfield College. Limusa, México, 2009.

[3] Madroñero J y Contreras I. *Un recorrido por el Álgebra.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[4] Soberón P. *Combinatoria para olimpiadas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2010.

[5] Restrepo P. *Un recorrido por la Combinatoria I.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

Vicerrectoría Administrativa
Vicerrectoría de Investigación y Extensión

Vicerrectoría Académica
Universidad Industrial de Santander
"VIGILADA MINEDUCACIÓN"