8as Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Secundaria

$$V - E + F = 2$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

INFORMES
olimpiadas@matematicas.uis.edu.co
Tel: 6344000 ext: 2316
2583-2592, 6450301

Octavas Olimpiadas Regionales de Matemáticas Secundaria

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga

2016

Elaboración y redacción

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas:

Alexander Holguín Villa

Ana Milena Santamaría Bueno

Andrés Fabián Leal Archila

Andrés Sebastián Cañas Perez

Arnoldo Rafael Teherán Herrera

Astrid Katherine Pineda

Carlos Arturo Rodriguez Palma

Edilberto José Reyes González

Fredy Neira Roa

Gerson Leonel Barajas Ávila

Jenifer Tatiana Puentes Correa

Jesús David Hernandez

Jesús Fernando Carreño Díaz

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Juan Camilo Cala Barón

Laura Milena Romero Parada

Luis Eduardo Tavera Santamaría

Luis Manuel Ortiz Durán

Silvia Juliana Ballesteros Gualdrón

Yerly Vanesa Soler Porras

Yzel Wlly Alay Gómez Espíndola

Presentación

En los últimos años, los nuevos planteamientos de la filosofía de las matemáticas, el desarrollo de la educación matemática y los estudios sobre sociología del conocimiento, entre otros factores, han originado cambios profundos en las concepciones acerca de las matemáticas escolares basadas en considerar que el conocimiento matemático constituye una herramienta potente para el desarrollo de habilidades de pensamiento.

Las Olimpiadas en Matemáticas en la actualidad son conocidas a nivel internacional por la influencia en la transformación del pensamiento matemático, el crecimiento en las expectativas y el interés en aprender matemáticas por parte de los estudiantes. Generalmente las situaciones problemáticas expuestas en las pruebas exponen al estudiante a temas que no se estudian en la escuela, y éstos incluyen matemática que puede ser motivadora y sorprendente. Así las competencias no solamente prueban de manera directa el conocimiento o las destrezas matemáticas sino también la habilidad que tiene el estudiante de manejar situaciones más allá de experiencias reales.

Las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander buscan recrear el pensamiento matemático de tal forma que todos los jóvenes y jovencitas atraídos(as) por el deseo de enfrentar nuevos retos descubran caminos alternos y flexibilicen la exploración de ideas matemáticas de tal manera que su participación permita que tanto el estudiante como el docente puedan apreciar sus logros y juzgar su práctica desde una perspectiva nacional e internacional.

Introducción

La Universidad Industrial de Santander como institución de educación superior en el ámbito regional tiene como misión esencial educar mediante la generación y difusión de las ciencias, la tecnología, las humanidades y el arte como una clara vocación de servicio a la sociedad, posibilitando la formación integral del ser humano dentro de un espíritu creativo que permita el mejoramiento personal y el desarrollo de una sociedad democrática, tolerante y comprometida con los deberes civiles y los derechos humanos.

Desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander ha liderado en forma positiva la actividad matemática del nororiente del país, no sólo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de su programa académico de pregrado sino también por su participación en la formación de los estudiantes de la universidad. Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a las diversas dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje y desarrollo de las habilidades matemáticas en la región, la Escuela de Matemáticas ha definido un proyecto macro de fortalecimiento de las habilidades matemáticas de la comunidad estudiantil de la región, utilizando para este fin, diferentes actividades académicas entre las que se encuentran el proyecto de semilleros, la creación de diplomados y especializaciones para actualización y/o formación docente y el proyecto de Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander que pretende contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación secundaria en la región de incidencia de la UIS, a través del desarrollo de las habilidades matemáticas de los estudiantes y la capacitación docente.

Este proyecto es pieza clave para mejorar el nivel matemático de los estudiantes de la región, fortalecer la formación académica de los docentes a nivel secundaria y muy posiblemente aumentar el número de licenciados en matemáticas y matemáticos en la región, a partir del conocimiento y puesta en práctica de estrategias que mejoren la efectividad del proceso de planteamiento y resolución de problemas.

Las Olimpiadas se realizan en tres fases y en tres niveles de acuerdo al grado de escolaridad de los estudiantes; los niveles son: **básico**, para los estudiantes de los grados sexto y séptimo; **medio**, para los estudiantes de los grados octavo y noveno, y **avanzado**, para los estudiantes de los grados décimo y undécimo.

La Escuela de Matemáticas a través del grupo de Educación Matemática de la UIS-Edumat reconoce la labor esencial del maestro en el proceso de formación de ciudadanos competentes, por ello brinda tanto a los docentes como a los estudiantes una forma de vincularse a este mundo y en esta oportunidad lo hace presentando esta cartilla.

Este documento se encuentra divido en tres capítulos; en cada uno de estos se presentan los problemas correspondientes al proyecto de las olimpiadas regionales de matemáticas en su octava versión con su respectiva solución, en cada uno de los tres niveles, que permiten introducir, desarrollar y reflexionar algunas temáticas específicas de cada área en los diferentes sistemas como lo son el numérico-variacional, el geométrico-métrico y el aleatorio.

En el primer, segundo y tercer capítulo se presentan los problemas con las soluciones, correspondientes al nivel básico, medio y avanzado, respectivamente, en sus diferentes Fases: Clasificatoria, Selectiva y Final; en cada una de las tres áreas: teoría de números y combinatoria; álgebra y lógica; y geometría. Además, se adjuntan los nombres de los estudiantes con los mejores cinco puntajes en la fase final.

Índice general

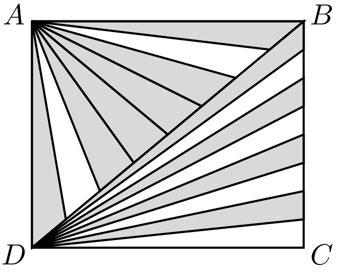
Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

1.1.1. Prueba Clasificatoria: 26 de agosto

1. En el rectángulo $ABCD$, los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{BC}$ están divididos en 8 partes iguales, como lo muestra la figura. Si $AB = 12\ cm$ y $BC = 10\ cm$, ¿cuál es el área de la región sombreada?



(a) $45\ cm^2$ (b) $60\ cm^2$ (c) $75\ cm^2$ (d) $90\ cm^2$

2. Una diagonal de un polígono es un segmento que une dos de sus vértices no adyacentes. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de 12 lados?

(a) 54 (b) 56 (c) 72 (d) 78

3. ¿Para cuántos valores de k, las fracciones $\frac{k}{16}$ y $\frac{9}{4k}$ son equivalentes?

(a) 1 (b) 2 (c) 6 (d) Infinitos

4. En una competencia de comer pizzas gana quién primero obtenga exactamente 33 puntos. Los puntos asignados por comer una pizza completa son:

- 10 puntos por una grande;
- 8 puntos por una mediana;
- 5 puntos por una pequeña.

Si el ganador del concurso consumió un número igual de pizzas grandes que medianas, ¿cuántas pizzas comió de cada una para ganar?

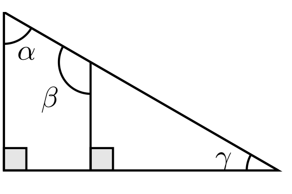
(a) 2 grandes, 1 mediana y 1 pequeña.

(b) 2 grandes y 2 medianas.

(c) 2 grandes, 2 medianas y 1 pequeña.

(d) 1 grande, 1 mediana y 3 pequeñas.

5. En la siguiente figura $\beta = 2\alpha$. ¿Cuál es el valor de γ?



(a) $30°$ (b) $45°$ (c) $60°$ (d) $120°$

6. ¿Cuál es el dígito de las unidades de 8^{6102}?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8

7. Si en una diferencia el minuendo se disminuye en 5 y el sustraendo se aumenta en 5, es correcto afirmar que la diferencia

(a) se mantiene.

(b) disminuye en 5.

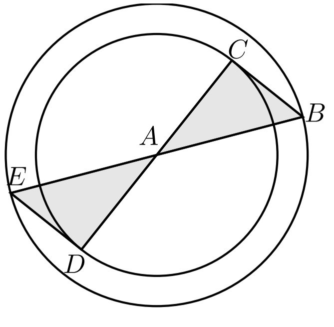
(c) aumenta en 5.

(d) disminuye en 10.

8. El residuo de dividir $13.920.045.372$ entre 33 es

(a) 0 (b) 2 (c) 24 (d) 17

9. En la siguiente figura, A es el centro de las dos circunferencias cuyos radios miden $4\ cm$ y $5\ cm$ respectivamente. Si $\overline{ED} \perp \overline{DC}$ y $\overline{ED} \| \overline{BC}$. El perímetro de la región sombreada es:



(a) $12\ cm$

(b) $18\ cm$

(c) $24\ cm$

(d) $26\ cm$

10. ¿Cuántos triángulos ABC isósceles en B se pueden construir, tal que $AC = 5\ cm$, $AB \leq 20$ y $\text{mcd}(AB, AC) = 1$?

(a) 12 (b) 14 (c) 16 (d) 20

11. Al dividir 235 entre n, el residuo es 14. ¿Cuál es el residuo al dividir 470 entre n?

(a) 17 (b) 11 (c) 14 (d) 28

12. En una urna de pelotas, un cuarto de ellas son blancas, $\frac{4}{9}$ del resto son rojas y las 10 restantes son azules. Sin sacar alguna de ellas, ¿cuántas pelotas blancas se deben añadir para conseguir que las blancas sean la mitad del total?

(a) 6 (b) 12 (c) 14 (d) 18

1.1.2. Solución

1. Note que el rectángulo $ABCD$ está dividido en 16 triángulos con igual área (¿por qué?), de los cuales 10 forman la región sombreada. Además el área del rectángulo es $12 \times 10 = 120\ cm^2$. Por lo tanto, el área de la región sombreada es

$$\frac{10}{16} \times 120 = 75\ cm^2.$$

2. Se sabe que un polígono regular de 12 lados tiene 12 vértices; por tanto en cada vértice concurren 9 diagonales, ya que no pueden haber diagonales entre vértices adyacentes. Como una diagonal une dos vértices; entonces se tendrá que el número total de diagonales en un polígono regular de 12 lados viene dado por la expresión:

$$\frac{9 \times 12}{2} = 54.$$

3. Si se supone que las fracciones son equivalentes entonces $\dfrac{k}{16} = \dfrac{9}{4k}$, esto es, $4k^2 = 144$. Luego $k = 6$ o $k = -6$. Por tanto, los posibles valores que puede tomar k son dos.

4. Sean x, y, z el número de pizzas grandes, medianas y pequeñas respectivamente. Para ganar se debe cumplir la ecuación $10x + 8y + 5z = 33$. Como solo se puede consumir pizzas completas, x, y, z son enteros. Además $x = y$, de modo que

$$18x + 5z = 33. \tag{1.1}$$

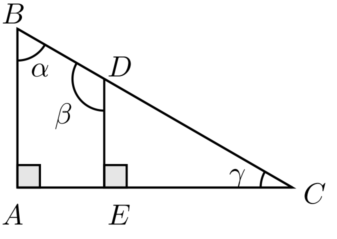
Por otra parte, los posibles valores para x son $x = 0$ o $x = 1$, pues si $x > 1$, se superaría la cantidad de puntos para ganar. Ahora, si $x = 0$ entonces $z = \dfrac{33}{5}$, el cual no es entero. Por tanto, el valor posible para x es $x = 1$.

Reemplazando este valor en la ecuación (1.1) se tiene que

$$z = \frac{33 - 18}{5} = 3.$$

Luego el ganador de la competencia comió 1 pizza grande, 1 mediana y 3 pequeñas.

5. Considere la siguiente figura:



Dado que $\measuredangle BAC = \measuredangle DEC$, los triángulos ABC y EDC son semejantes, así $\measuredangle CDE = \alpha$. Por otra parte, observe que los ángulos β y CDE son suplementarios, y como $\beta = 2\alpha$, se tiene la ecuación

$$180^\circ = \beta + \measuredangle CDE = 2\alpha + \alpha = 3\alpha,$$

luego $\alpha = 60^\circ$.
Finalmente, como la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo suman 180°, se tiene que

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 30^\circ.$$

Nota: *Sabiendo que la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°, se tiene que $\alpha + \beta + 90^\circ + 90^\circ = 3\alpha + 180^\circ = 360^\circ$, luego $\alpha = 60^\circ$. Otra forma de ver esto es notando que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ son paralelos, de modo que $\measuredangle CDE = \alpha$ y por lo tanto $\alpha + \beta = 3\alpha = 180^\circ$, esto es $\alpha = 60^\circ$.*

6. Para hallar el dígito de las unidades de 8^{6102}, se calculan las primeras potencias de 8:

$$8^1 = \mathbf{8},\qquad 8^5 = 3276\mathbf{8},$$
$$8^2 = 6\mathbf{4},\qquad 8^6 = 26214\mathbf{4},$$
$$8^3 = 51\mathbf{2},\qquad 8^7 = 209715\mathbf{2},$$
$$8^4 = 409\mathbf{6},\qquad 8^8 = 1677721\mathbf{6}.$$

Observe que el dígito de las unidades se repite cada 4 potencias, y como $6102 = 4 \times 1525 + 2$, el dígito de las unidades de 8^{6102} es 4.

7. Sea a el minuendo y b el sustraendo entonces la diferencia es $a - b$. Ahora, como a se disminuye en 5 y b se aumenta en 5, se tiene que la nueva diferencia es

$$(a - 5) - (b + 5) = a - 5 - b - 5 = (a - b) - 10.$$

Por lo tanto, la diferencia disminuye en 10.

8. Realizando la división $13.920.045.372 \div 33$, se obtiene que

$$13.920.045.372 = 33 \times 421.819.556 + 24,$$

luego el residuo es 24.

9. Note que los triángulos EDA y BCA son triángulos rectángulos congruentes, debido a que $\overline{ED} \perp \overline{DC}$, $\overline{ED} \| \overline{BC}$, $EA = AB = 5\ cm$ y $DA = AC = 4\ cm$. Usando el Teorema de Pitágoras, se tiene que $ED = CB = 3\ cm$; luego el perímetro de la región sombreada es

$$5 + 5 + 4 + 4 + 3 + 3 = 24\ cm.$$

10. Como $AB \leq 20$ y $\text{mcd}(AB, 5) = 1$ se tiene que

$$AB \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19\}.$$

Por otra parte, usando la desigualdad triangular se tiene que AB no puede medir ni 1 ni 2. Por lo tanto, el lado AB de los triángulos construibles puede medir $3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18$ o 19, es decir, se pueden construir 14 triángulos isósceles con estas condiciones.

11. Como al dividir 235 entre n el residuo es 14, por el algoritmo de la división se tiene que $235 = nq + 14$, para algún q entero, además $14 < n$. De ahí que

$$nq = 235 - 14 = 221 = 13 \times 17,$$

por lo cual $n = 13$ o $n = 17$, pero $14 \not< 13$; entonces $n = 17$. Ahora, dividiendo 470 entre 17 se tiene que el residuo es 11, puesto que $470 = 17 \times 27 + 11$.

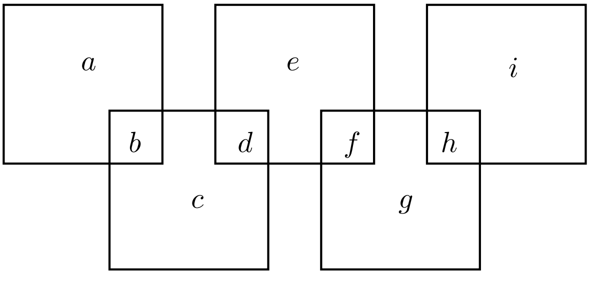
12. Sea x el número total de pelotas que se encuentran dentro de la urna. Los datos del problema indican que las pelotas blancas son $\frac{1}{4}x$, las pelotas rojas son $\frac{4}{9} \times \frac{3}{4}x = \frac{1}{3}x$ y las restantes $\frac{5}{12}x = 10$ son azules, de donde se deduce que $x = 24$. Luego hay 6 pelotas blancas.

Finalmente, para conseguir que las pelotas blancas sean la mitad del total, estas deben ser la misma cantidad de pelotas que hay entre rojas y azules, en este caso 18; y como inicialmente habían 6 de ellas se concluye que se deben añadir 12 pelotas blancas.

1.2. Prueba Selectiva

1.2.1. Prueba Selectiva: 30 de septiembre

1. En la siguiente figura, las letras a, b, c, d, e, f, g, h, i representan números diferentes del 1 al 9. Si los números en cada uno de los cuadrados grandes suman 11, ¿cuál número representa la letra e?



(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 9

2. Si a, b, c y d son números enteros positivos distintos, ¿cuál de las siguientes expresiones **NO** es una posible representación del número 2016?

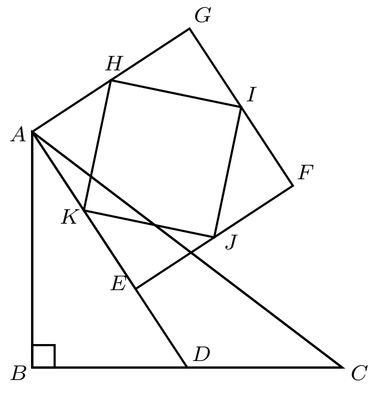
(a) $a^{a+b} \times b^a \times c$

(c) $a^b \times b^c \times c^a$

(b) $a^a \times b^a \times c^a \times d^a$

(d) $a^{2b-d} \times b^{2d} \times c^d \times d^{a+b+c}$

3. En la siguiente figura $AEFG$ es un cuadrado; H, I, J, K, D son los puntos medios de $\overline{AG}$, $\overline{GF}$, $\overline{FE}$, $\overline{EA}$, $\overline{BC}$ respectivamente; ABC es un triángulo rectángulo en B, con $AB = 8\,km$ y $AC = 10\,km$. Si $AE = 2ED$, ¿cuál es el área del cuadrilátero $HIJK$?



(a) $12\ km^2$

(b) $\dfrac{73}{2}\ km^2$

(c) $\dfrac{73}{3}\ km^2$

(d) $\dfrac{146}{9}\ km^2$

4. De los primeros 10 enteros positivos, ¿cuál es el valor de la suma de sus primeros 10 múltiplos positivos?

(a) 100×10 (b) 55×10 (c) 100×55 (d) 55×55

5. Sea A el menor subconjunto de los números enteros tal que

- $0 \in A$ y
- Si $n \in A$, entonces $n + 2$ y $n - 2 \in A$.

NO es correcto afirmar que

(a) A es un conjunto infinito.

(b) Si $a, b \in A$, entonces $a + b \in A$ y $ab \in A$.

(c) $2016 \in A$.

(d) A contiene infinitos números primos.

6. Si en un triángulo un lado y su altura correspondiente son respectivamente congruentes a un lado y su altura correspondiente de otro triángulo, es correcto afirmar que

(a) los triángulos son congruentes.

(b) los triángulos tienen igual área.

(c) los triángulos tienen igual perímetro.

(d) si la altura es congruente con la base entonces los triángulos son isósceles.

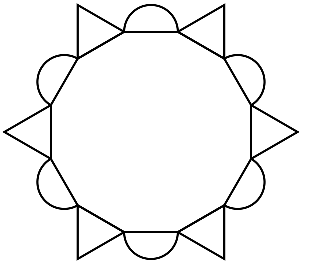
PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7. Sean Z y W números capicúa de 4 cifras, múltiplos de 3 y 5 respectivamente. Si $Z + W = 6336$, ¿cuál es el valor de $W - Z$?

Nota: *Un número es* **capicúa** *si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.*

8. Una universidad admitió 1.400 estudiantes para el primer semestre del año 2017. Los códigos de los alumnos nuevos están formados por una de las 27 letras del alfabeto y un número divisor de q^4 (en ese orden), donde q es un número primo entre 40 y 100. Si gracias al programa "Ser pilo paga" son admitidos 86 alumnos más, ¿cuántos estudiantes quedarán sin código?

9. La figura está formada por un polígono regular de 12 lados, triángulos equiláteros y semicircunferencias. Halle el perímetro de la figura en términos del lado l de uno de los triángulos equiláteros.



1.2.2. Solución

1. Como la suma de cada cuadrado grande debe ser 11 y cada letra corresponde a un número diferente del 1 al 9, entonces $a = 9$ o $i = 9$.

Suponga que $a = 9$, entonces $b = 2$. Ahora, para ubicar el 8 las opciones son $c = 8$ o $i = 8$. Si $c = 8$ entonces $d = 1$. Observando las posibilidades para los valores de las letras restantes, se encuentra que algunos números se repiten; por lo tanto $c \neq 8$, esto quiere decir que $i = 8$. Para $i = 8$ se concluye que $c = 5$, $d = 4$, $e = 6$, $f = 1$, $g = 7$ y $h = 3$.

De manera análoga, si se supone que $i = 9$, se tiene que $h = 2$, $a = 8$, $b = 3$, $c = 7$, $d = 1$, $e = 6$, $f = 4$ y $g = 5$.

En conclusión, hay dos maneras de resolver el problema, y en las dos $e = 6$.

2. Utilizando el Teorema Fundamental de la Aritmética[1] para expresar a 2016 como producto de primos se tiene

$$\begin{array}{c|l} 2016 & 2 \\ 1008 & 2 \\ 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

[1] Todo entero $n > 1$ puede ser expresado como producto de primos y esta representación es única, salvo el orden de los factores

$$\begin{aligned}2016 &= 2^5 \times 3^2 \times 7\\ &= 2^{2+3} \times 3^2 \times 7\\ &= 1^1 \times 32^1 \times 9^1 \times 7^1\\ &= 2^{2(3)-1} \times 3^{2(1)} \times 7^1 \times 1^{2+3+7}\end{aligned}$$

Por lo tanto, es posible representar a 2016 mediante las expresiones de las opciones (a), (b) y (d). Sin embargo, la expresión $a^b \times b^c \times c^a$ no corresponde a una representación del 2016. Veamos:

Si $a = 1$, entonces b o c es múltiplo de 7; pero si b es múltiplo de 7 entonces $c = 1 = a$, lo cual no es posible; y c tampoco puede ser múltiplo de 7, ya que ningún factor de 2016 puede tener exponente 7, salvo el 1. De manera que $a \neq 1$, y por la misma razón $b \neq 1$ y $c \neq 1$.

Por otra parte, por la descomposición de 2016 sabemos que a, b o c debe ser múltiplo de 7 y en tal caso b, c o a debería ser 1 (respectivamente), pero ya vimos que esto es imposible.

3. Por el Teorema de Pitágoras se sigue que

$$BC = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\,km.$$

Dado que D es punto medio de BC, entonces $BD = 3\,km$. Ahora, el triángulo ABD es un triángulo rectángulo (en B) con catetos de longitud $8\,km$ y $3\,km$; así, aplicando nuevamente el Teorema de Pitágoras se obtiene que

$$AD = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}\,km.$$

Teniendo en cuenta que $AE = 2ED$ y $AD = AE + ED$, se puede concluir que $AD = \dfrac{3AE}{2}$, es decir,

$$AE = \frac{2AD}{3} = \frac{2\sqrt{73}}{3}.$$

Ahora, el área del cuadrado $HIJK$ es la mitad del área del cuadrado $AEFG$ (¿puede decir por qué?) esto es:

$$\frac{1}{2} \times AE^2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2\sqrt{73}}{3}\right)^2 = \frac{4 \times 73}{2 \times 9} = \frac{146}{9}\, km^2.$$

4. Si n es un entero positivo, la suma de sus primeros diez múltiplos positivos es

$$n + 2n + \cdots + 10n = n(1 + 2 + \cdots + 10) = 55n.$$

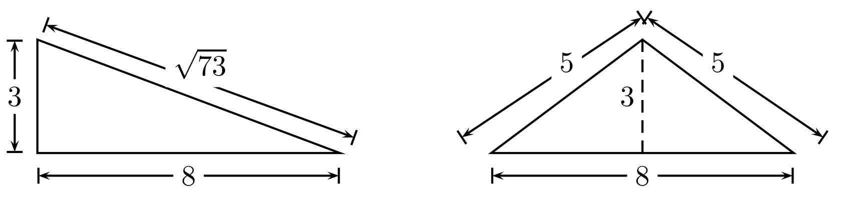
Luego la suma de los primeros diez múltiplos positivos de los primeros diez enteros positivos es:

$$\sum_{n=1}^{10} 55n = 55 \sum_{n=1}^{10} n = 55(55).$$

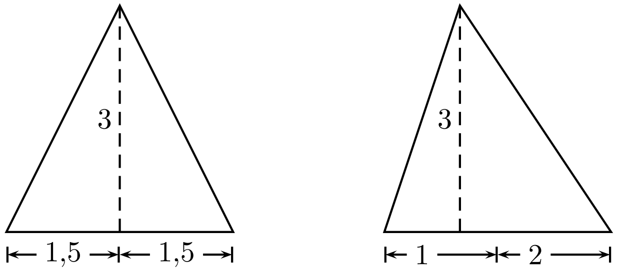
5. Es fácil ver que este subconjunto de los números enteros es el conjunto de los números pares, es decir, los múltiplos de 2. Sabiendo que A es el conjunto de los números pares **no** es correcto afirmar que hay infinitos números primos en él, ya que el único número primo que pertenece a A es 2, los demás números primos son impares.

6. Considere los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.



Ejemplo 2.



Los pares de triángulos en los ejemplos 1 y 2 cumplen con las condiciones del enunciado; sin embargo, como se puede ver, esto no implica que los pares de triángulos sean congruentes o tengan el mismo perímetro o sean isósceles, aun cuando su base y altura correspondientes sean congruentes. Por otra parte, es claro que dos triángulos que cumplan las condiciones del enunciado deben tener la misma área, puesto que para encontrar el área de un triángulo basta multiplcar la mitad de la medida de la base por la medida altura.

7. Sabiendo que Z y W son números capicúa de 4 cifras entonces $Z = abba$ y $W = cddc$; donde a, b, c, d son dígitos. Además, como W es múltiplo de 5 se tiene que $c = 5$. Considere el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{cccc} a & b & b & a\,+ \\ 5 & d & d & 5 \\ \hline 6 & 3 & 3 & 6 \end{array}$$

De la suma anterior, $a + 5 = 6$ entonces $a = 1$ y dado que $b + d = 3$, entonces b puede ser 0, 1, 2 o 3. Teniendo en cuenta que Z es múltiplo de 3 y por lo tanto la suma de sus cifras $2(a + b) = 2(1 + b)$ es múltiplo de 3, se deduce que $b = 2$ y por tanto $d = 1$. De esta manera, $Z = 1.221$ y $W = 5.115$, luego $W - Z = 3.894$.

8. Note que entre 40 y 100 hay exactamente 13 números primos, a saber, $\{41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$, y para cada número primo q, hay exactamente 5 divisores de q^4 los cuales son $\{1, q, q^2, q^3, q^4\}$. Por lo tanto, se pueden usar $13 \times 4 + 1 = 53$ números para formar los códigos. De modo que, por el principio multiplicativo se pueden construir $27 \times 53 = 1.431$ códigos. Como en total fueron admitidos 1.486 estudiantes, tenemos que $1.486 - 1.431 = 55$ estudiantes se quedarán sin código.

9. Note que cada lado de los triángulos mide l y como el polígono de 12 lados es regular, entonces el diámetro de las semicircunferencias es también l. En conclusión, el perímetro de la figura se encuentra formado por 6 semicircunferencias cada una de perímetro $\dfrac{2\pi \cdot r}{2} = \dfrac{l}{2}\pi$ y 12 segmentos de longitud l. Luego el perímetro total de la figura es

$$6\left(\frac{\pi}{2}l\right) + 12l = 3l(\pi + 4).$$

1.3. Prueba Final

1.3.1. Resultados

CUADRO DE HONOR				
Nombre	**Colegio/Institución**	**Municipio**	**Posición**	**Mención**
Natalia Juliana Lozano Duarte	Gimnasio San Diego	Floridablanca	1	Oro
Carlos José Gómez Osma	Instituto San José de la Salle	Bucaramanga	2	Plata
Jhurgen Reynel Santamaria	Institución Educativa las Américas	Bucaramanga	3	Bronce
Nicole Daniela Vega Márquez	Colegio Cooperativo Comfenalco	Bucaramanga	4	Diploma
Helber Adrian Caballero Jaimes	Oriente Miraflores	Bucaramanga	5	Diploma

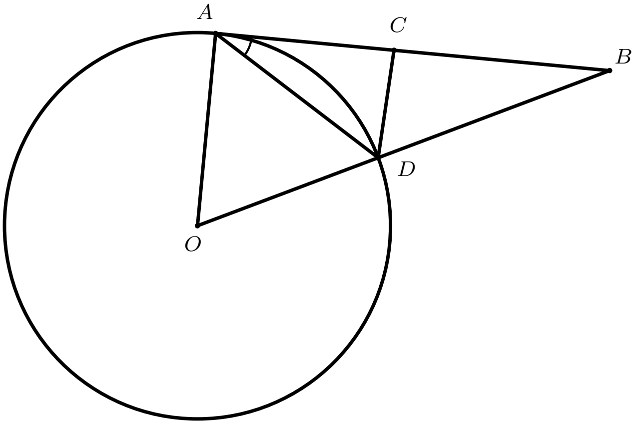
1.3.2. Prueba Final: 29 de octubre

1. Encuentre el menor entero x que satisface la desigualdad

$$2^2 \times 3^3 \times 5^5 \leq 30^{(x/3)}.$$

2. Sea n la suma de los primeros 32 enteros positivos que dejan residuo 1 al dividirse entre 4. ¿Cuántos divisores primos tiene n?

3. En la siguiente figura, $\overline{OA}$ y $\overline{OD}$ son radios de la circunferencia. $\overline{AB}$ es tangente a la circunferencia en A y C es un punto sobre $\overline{AB}$ tal que $\overline{DC}$ biseca al ángulo ADB. Si el ángulo CAD mide $32°$, ¿cuánto mide el ángulo DCA?



4. Cada una de las siguientes figuras está formada por un cuadrado de lado a y cuartos de circunferencias de igual radio, como se ve en la secuencia. Halle el área sombreada de la Figura k en términos de a.

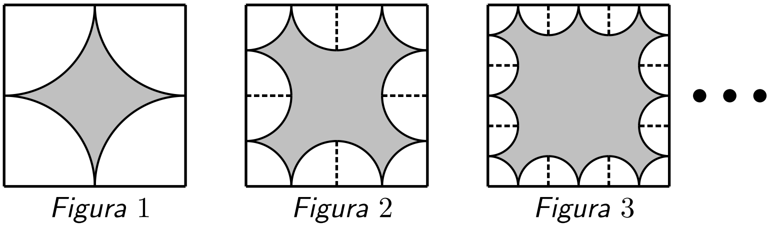


Figura 1 *Figura* 2 *Figura* 3

5. Se escriben los números impares desde 215 hasta 2017 uno seguido del otro para formar el número S, es decir,

$$S = 215217219221 \cdots 20152017.$$

¿Cuál es la cifra que está en la mitad de S?

6. Sea ABC un triángulo equilátero de lado 4, se construyen las medianas $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ que se intersectan en F. ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{FD}$?

1.3.3. Solución

1. De la desigualdad del enunciado de sigue que $2^6 \times 3^9 \times 5^{15} \leq 2^x \times 3^x \times 5^x$, luego

$$1 \leq 2^{x-6} \times 3^{x-9} \times 5^{x-15}.$$

De esta manera, si $x = 15$ se tiene que $1 \leq 2^9 \times 3^6$; sin embargo éste no es el menor entero x que satisface la desigualdad, pues probando con valores de x iguales a $14, 13$ y 12 también se cumple desigualdad ¡verifíquelo!
Ahora, si $x = 11$ se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2^5 \times 3^2 \times 5^{-4} \\ 5^4 &\leq 2^5 \times 3^2 \\ 625 &\leq 288, \end{aligned}$$

lo cual no es cierto. Por lo tanto, 12 es el menor entero x que satisface la desigualdad

$$2^2 \times 3^3 \times 5^5 \leq 30^{(x/3)}.$$

2. Los primeros 32 números enteros positivos que dejan residuo 1 al dividirse entre 4 son de la forma $4k+1$, donde $k \in \{0, 1, 2, \cdots, 31\}$. Luego

$$n = \sum_{k=0}^{31}(4k+1) = 4\sum_{k=0}^{31} k + \sum_{p=0}^{31} 1 = 4\left(\frac{31 \times 32}{2}\right) + 32 = 2016.$$

Descomponiendo $n = 2016$ en factores primos, se tiene que sus divisores primos son: $2, 3$ y 7.

3. Como $\overline{AB}$ es tangente a la circunferencia en A, el ángulo OAB mide $90°$. Además, dado que el ángulo CAD mide $32°$ tenemos que el ángulo OAD mide $90° - 32° = 58°$.

En vista de que $\overline{OA}$ y $\overline{OD}$ son radios, el triángulo AOD es isósceles en O, luego los ángulos OAD y ODA son iguales, por lo cual $\measuredangle ODA = 58°$.

Adicionalmente, observe que el ángulo ODB es un ángulo llano, entonces se tiene que el ángulo ADB mide $180° - 58° = 122°$, y dado que $\overline{DC}$ biseca el ángulo ADB, tenemos que el ángulo ADC mide $61°$. Por lo tanto, el ángulo DCA mide

$$180° - 32° - 61° = 87°.$$

4. El área sombreada de cada figura es el área del cuadrado menos el área del total de cuartos de círculo.

En la *Figura* 1 hay 4 cuartos de círculo de radio $\frac{a}{2}$, la suma de sus áreas equivale al área de 1 círculo de radio $\frac{a}{2}$. Así, el área de la *Figura* 1 es

$$A_1 = a^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2\pi}{2^2}.$$

En la *Figura* 2 hay 12 cuartos de círculo de radio $\frac{a}{4}$, luego la suma de sus áreas equivale al área de 3 círculos de radio $\frac{a}{4}$. Entonces el área de la *Figura* 2 es

$$A_2 = a^2 - 3\pi\left(\frac{a}{4}\right)^2 = a^2 - \frac{3a^2\pi}{4^2}.$$

En la *Figura* 3 hay 20 cuartos de círculo de radio $\frac{a}{6}$, luego la suma de sus áreas equivale al área de 5 círculos de radio $\frac{a}{6}$. Por lo tanto, el área de la *Figura* 3 corresponde a

$$A_3 = a^2 - 5\pi\left(\frac{a}{6}\right)^2 = a^2 - \frac{5a^2\pi}{6^2}.$$

De manera general, se deduce que en cada figura hay 8 cuartos de círculo más que en la figura inmediatamente anterior. Puesto que la *Figura* 1 contiene 4 cuartos de círculo, la expresión general para contar los cuartos de círculos que hay en la *Figura* k, para $k > 1$, es

$$c_k = 4 + 8(k-1) = 4(2k-1).$$

De modo que la suma de las áreas de los cuartos de círculo que hay en la *Figura* k, es equivalente al área de $2k-1$ círculos de radio $\frac{a}{2k}$.

Así, el área de la *Figura* k, es

$$A_k = a^2 - (2k-1)\pi\left(\frac{a}{2k}\right)^2,$$
$$A_k = a^2\left(1 - \frac{(2k-1)\pi}{(2k)^2}\right).$$

5. Sea $S = 215217219221\cdots20152017$. Primero se calcula la cantidad de cifras del número S. Para ello, calculamos la cantidad de impares que hay entre 215 y 2017 con las siguiente tabla

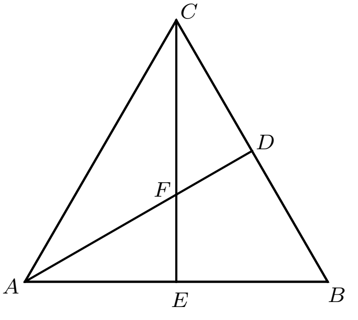
Intervalo	**Cantidad de impares**
215 - 999	393
1000 - 1999	500
2000 - 2017	9

Se sabe que los números entre 215 y 999 tienen 3 cifras, y los números que están entre 1000 y 2017 tienen 4 cifras, luego S tiene $3\times(393)+4\times(500+9) = 3215$ cifras. De modo que el dígito de la mitad del número S, es el cifra que está en la posición 1608.

Para saber qué número está en la posición 1608, se debe conocer cuál es el número impar entre 215 y 2017 que tiene uno de sus cifras en esa posición. Note que $3\times(393) = 1179$ es la cantidad de cifras de los números impares entre 215 y 999.

Luego la cifra que está en la mitad de S ocupa la posición $1608-1179 = 429$ después de haber escrito el número 999. Como $429 = 4\times 107+1$, entonces la primera cifra del número impar $2(500+108)-1 = 1215$ es la cifra que está en la mitad de S.

6. Consideremos la siguiente figura



Como ABC es un triángulo equilátero, las medianas y las mediatrices coinciden; por tanto $\overline{AD} \perp \overline{DC}$.
Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}.$$

Finalmente, como el punto F es el baricentro, entonces[2]

$$FD = \frac{1}{3}AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

[2]Dos tercios de la longitud de cada mediana están entre el vértice y el baricentro, mientras que el tercio restante está entre el baricentro y el punto medio del lado opuesto.

Capítulo 2

Nivel Medio

2.1. Prueba Clasificatoria

2.1.1. Prueba Clasificatoria: 26 de agosto

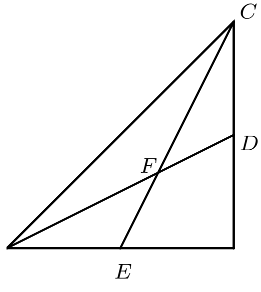
1. En una competencia de comer pizzas gana quién primero alcance o supere 33 puntos. Los puntos asignados por comer una pizza completa son:

- 10 puntos por una grande;
- 8 puntos por una mediana;
- 5 puntos por una pequeña.

Si el ganador comió igual cantidad de pizzas grandes que medianas, es correcto afirmar que él comió

(a) 1 pizza mediana.
(b) 5 pizzas.
(c) 2 pizzas grandes.
(d) 4 pizzas.

2. En la figura se muestra un triángulo rectángulo donde cada uno de sus catetos mide $1\,cm$. Si D y E son puntos medios de cada cateto, ¿cuál es el perímetro del triángulo CDF en centímetros?



(a) $\dfrac{3+2\sqrt{5}}{6}$ (b) $\dfrac{3+4\sqrt{5}}{6}$ (c) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (d) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$

3. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número $4^{5003} \times 25^{5000}$?

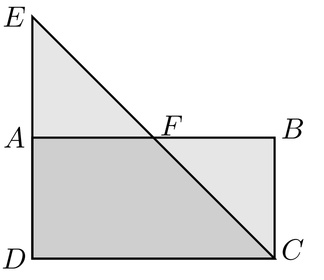
(a) 1 (b) 10 (c) 11 (d) 24

4. Las dimensiones de una caja de base rectangular son valores enteros. Si el largo es el triple del ancho y el ancho es un cuarto del alto, ¿cuál de las siguientes opciones puede ser el volumen de la caja?

(a) $48\ u^3$ (b) $96\ u^3$ (c) $120\ u^3$ (d) $144\ u^3$

5. En la figura, $ABCD$ es un rectángulo y CDE es un triángulo isósceles. Si $ABCD$ y CDE tienen igual área, y el área de $EFBCD$ es $10\ u^2$, ¿cuál es el valor de DC?

(a) $12\ u$
(b) $8\ u$
(c) $4\ u$
(d) $2\ u$



6. La delegación olímpica colombiana, conformada por más de 50 personas, decide hacer un paseo turístico por Río de Janeiro. Para esto cuentan con buses y busetas. Si usan solo buses, son necesarios 6 y no quedan asientos libres. Si usan solo busetas, son necesarias 11 y quedan 5 asientos libres. ¿Cuál es la menor cantidad de personas que puede conformar esta delegación?

(a) 54 (b) 60 (c) 66 (d) 72

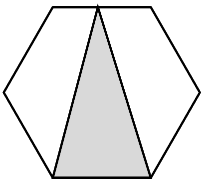
7. Dado el conjunto de números

$$N = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16\}.$$

¿Cuántos subconjuntos de dos elementos cumplen que al ser extraídos del conjunto original N, el promedio de los elementos restantes en N sea 9?

(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 6

8. ¿Qué fracción del área del hexágono regular está sombreada?



(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

9. ¿Cuántas parejas ordenadas (x, y) de números enteros distintos satisfacen que $\frac{x}{b} = \frac{c}{y}$ sea una proporción con media proporcional 10?

Nota: *Dada la proporción* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *si* $b = c = m$ *se dice que* m *es la* **media proporcional** *de la proporción*

(a) 4 (b) 5 (c) 8 (d) 16

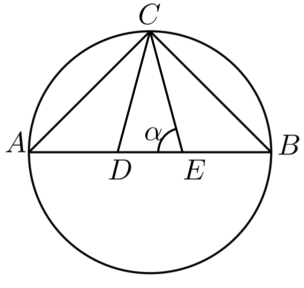
10. Sean a, b y c las raíces del polinomio

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10.$$

El resultado de la expresión $3abc$ es

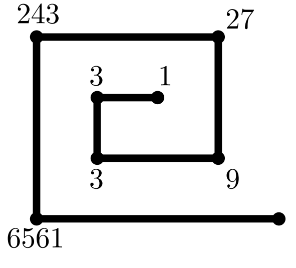
(a) 30 (b) -30 (c) 84 (d) -84

11. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia y C es el punto de intersección entre la mediatriz de $\overline{AB}$ y la circunferencia. Si $\overline{CD}$ y $\overline{CE}$ trisecan el ángulo ACB, ¿cuál es la medida del ángulo α?



(a) $30°$ (b) $60°$ (c) $75°$ (d) $105°$

12. Considere la siguiente figura que se construye de forma sucesiva.



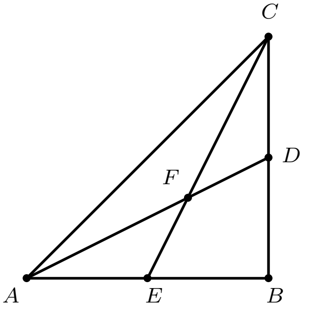
Continuando con la construcción de la figura, ¿qué número debe ir en la décima esquina?

(a) 3^{10} (b) 3^{13} (c) 3^{34} (d) 3^{55}

2.1.2. Solución

1. No es correcto afirmar que comió 1 pizza mediana, pues pudo comerse 7 pequeñas para ganar. El mismo argumento descarta que haya comido 2 pizzas grandes. Como el concursante ganó, debió comer mínimo 4 pizzas (2 grandes y 2 medianas), así que lo único que se puede afirmar es que el concursante comió 4 pizzas.

2. Considere la siguiente figura:



Note que el triángulo ABC además de ser rectángulo es isósceles en B, por lo tanto las medianas $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ son congruentes. Además, el punto F es el baricentro. De modo que $CF = 2FE$ y $FE = FD$.
Ahora, por el Teorema de Pitágoras se tiene que:

$$CE = \sqrt{CB^2 + EB^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ cm.$$

Finalmente, tenemos que el perímetro del triángulo CDF es

$$\begin{aligned} CF + FD + DC &= CF + FE + DC \\ &= CE + DC \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ cm. \end{aligned}$$

3. Note que

$$\begin{aligned} 4^{5003} \times 25^{5000} &= 4^3 \times 4^{5000} \times 25^{5000}, \\ &= 64 \times (4 \times 25)^{5000}, \\ &= 64 \times 10^{10000}. \end{aligned}$$

Por tanto, la suma de sus dígitos es $6 + 4 = 10$.

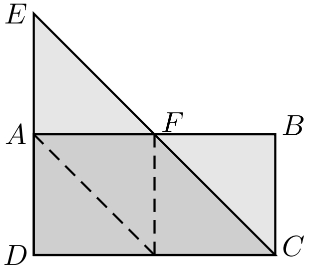
4. Sean a el ancho, b el largo y c la altura de la caja. Del enunciado tenemos que $b = 3a$ y $c = 4a$, así el volumen de la caja está dado por

$$V = a \times 3a \times 4a = 12a^3.$$

Se sigue que los posibles valores del volumen de la caja son:

$$\begin{aligned} 12 \times 1^3 &= 12\ u^3, \\ 12 \times 2^3 &= 96\ u^3, \\ 12 \times 3^3 &= 324\ u^3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

5. Considere la siguiente figura:



Dado que los polígonos $ABCD$ y CDE tienen igual área, entonces

$$AD \times DC = \frac{ED \times DC}{2}.$$

Luego $2AD = ED$, de modo que A es punto medio de $\overline{ED}$.

Observe que el polígono $EFBCD$ de área $10\ u^2$ se puede dividir en 5 triángulos congruentes con área $2\ u^2$, como se muestra en la figura (verifique que los triángulos son congruentes). Luego el área de $ABCD$ y CDE es $8\ u^2$.

Finalmente, teniendo en cuenta que CDE es un triángulo isósceles, se concluye que

$$\frac{DC^2}{2} = 8\ u^2,$$
$$DC = 4\ u.$$

6. Sean D el número de personas que conforma la delegación y x e y la cantidad de asientos que tiene cada bus y buseta, respectivamente. Entonces

$$D = 6x = 11y - 5,$$

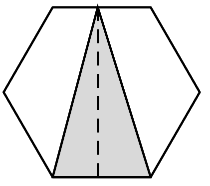
Restando 6 en ambos miembros de la segunda igualdad tenemos:

$$6x - 6 = 6(x-1) = 11\,(y-1)\,.$$

Por lo tanto 11 divide a $x-1$. Como se quiere hallar el menor valor que puede tomar D y esta cantidad es mayor de 50, x debe ser mayor o igual a 9. Probando con los números mayores o iguales a 9, se llega a que el menor valor de x que cumple las condiciones anteriores es $x = 12$ y así, se tiene que la menor cantidad de personas que pueden conformar la delegación es 72.

7. Observe que la suma de todos los 12 elementos del conjunto N es 104. Como se busca que el promedio sea 9, se necesita que los 10 elementos que quedan en N después de la extracción sumen 90. Por lo anterior, se deben seleccionar, dentro del conjunto, parejas de números que sumen 14. Luego los subconjuntos de dos elementos que se pueden extraer de N, para que el promedio de los elementos restantes en N sea 9 son: $\{3,11\}$, $\{4,10\}$, $\{5,9\}$ y $\{6,8\}$.

8. Considere la siguiente figura:



Note que la altura del triángulo sombreado respecto a la base que coincide con un lado del hexágono regular es el doble del apotema del hexágono. Sea a la medida del apotema del hexágono y P su perímetro. Entonces el área del triángulo sombreado A_T, está dada por

$$A_T = \frac{\frac{P}{6} \times 2a}{2} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{P \times a}{2}\right).$$

Pero, el área del héxagono regular A_H es precisamente $\dfrac{P \times a}{2}$. De modo que $A_T = \dfrac{1}{3} A_H$.

9. Dado que la media proporcional de $\dfrac{x}{b} = \dfrac{c}{y}$ es 10, se tiene que $b = c = 10$, luego $xy = 100$. Descomponiendo 100 en factores primos se obtiene que $100 = 2^2 \times 5^2$, luego las posibles parejas son:

$$\begin{array}{cccc}
(100, 1), & (25, 4), & (-100, -1), & (-25, -4), \\
(1, 100), & (4, 25), & (-1, -100), & (-4, -25), \\
(50, 2), & (20, 5), & (-50, -2), & (-20, -5), \\
(2, 50), & (5, 20), & (-2, -50), & (-5, -20).
\end{array}$$

Así, existen 16 parejas (x, y) que cumplen las condiciones del enunciado.

10. Como a, b y c son raíces de $p(x)$, por el Teorema Fundamental del Álgebra se tiene que:

$$\begin{aligned}
p(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10 &= (x - a)(x - b)(x - c) \\
&= (x^2 - bx - ax + ab)(x - c) \\
&= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc
\end{aligned}$$

Luego si $x = 0$ se obtiene que

$$(0)^3 + 2(0)^2 - 13(0) + 10 = 0^3 - (a + b + c)0^2 + (ab + bc + ac)0 - abc.$$

Por lo tanto, $abc = -10$ y $3abc = -30$.

11. Como C es un punto sobre la circunferencia y $\overline{AB}$ es diámetro de la misma, entonces el ángulo ACB es recto. Por otra parte, se conoce que $\overline{CD}$ y $\overline{CE}$ trisecan el ángulo ACB, lo cual implica que

$$\measuredangle ECB = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ.$$

Dado que C es el punto de intersección entre la mediatriz de $\overline{AB}$ y la circunferencia, se deduce que $\measuredangle ABC = \measuredangle CAB = 45^\circ$. Teniendo en cuenta que la suma de ángulos internos de un triángulo es 180° se tiene que

$$\begin{aligned} \measuredangle EBC + \measuredangle ECB + \measuredangle CEB &= 180^\circ \\ 45^\circ + 30^\circ + \measuredangle CEB &= 180^\circ \\ \measuredangle CEB &= 105^\circ. \end{aligned}$$

Como $\alpha + \measuredangle CEB = 180^\circ$, se concluye que $\alpha = 75^\circ$.

12. El problema en este caso es encontrar el décimo primer término de una sucesión de números, ya que la primera esquina que se forma está etiquetada con el segundo número de la sucesión. Si listamos los primeros números de la sucesión se observa que dicha lista viene dada por $3^0, 3^1, 3^1, 3^2, 3^3, 3^5, 3^8, \ldots,$ y encontramos una recurrencia en la sucesión, precisamente en los valores de los exponentes. Note que los números de los exponentes son números de la sucesión Fibonacci, es decir; para $n \geq 3$, el valor del $n-$ésimo término viene dado por la suma de los términos $n - 2$ y $n - 1$. Por tanto, el décimo primer término de la sucesión es 3^{55}.

2.2. Prueba Selectiva

2.2.1. Prueba Selectiva: 30 de septiembre

1. Sean a_n y b_n, dos progresiones aritméticas, tales que $a_1 = 3$, $b_1 = 5$ y $a_{17} + b_{17} = 136$. Si la diferencia de la progresión b_n es igual a la diferencia de la progresión a_n menos 2, el valor de b_{2017} es

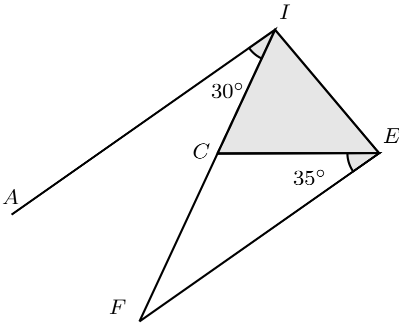
Nota: *Una* **progresión aritmética** *es una sucesión de números tal que cada término (salvo el primero a_1) es el término anterior más un número fijo d, llamado* **diferencia**. *De modo que el término general es de la forma $a_n = a_1 + (n-1) \times d$.*

(a) 2.152 (b) 6.053 (c) 10.083 (d) 16.136

2. Dados a y b enteros positivos primos relativos, el mayor entero positivo que no se puede escribir como $z \times a + y \times b$, con z e y enteros no negativos, puede ser calculado mediante $f(a, b) = a \times b - a - b$. La cantidad de enteros positivos que no pueden verse como $z \times 5 + y \times 7$, con z e y enteros no negativos, es

(a) 19 (b) 23 (c) 12 (d) 11

3. En la figura, $\overline{AI} \parallel \overline{FE}$. Si el triángulo CEI es isósceles en E, ¿cuánto mide el ángulo IEC?



(a) 50° (b) 60° (c) 35° (d) 65°

4. Sean Z y W números capicúa de 4 cifras, múltiplos de 3 y 5 respectivamente. Si $Z + W = 6336$, ¿cuál es el valor de $W - Z$?

Nota: *Un número es* **capicúa** *si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.*

(a) 3.894 (b) 4.004 (c) 3.674 (d) 4.334

5. La registradora de un bus tiene un defecto, se salta los dígitos 5 y 6 en cualquiera de las posiciones, por ejemplo, pasa del 4 al 7, y del 499 al 700. Si actualmente registra 7000 entradas, ¿cuántas personas ingresaron realmente al bus?

(a) 2.520 (b) 2.521 (c) 3.200 (d) 2.561

6. Se construye el triángulo ABC isósceles en B de manera que $AC = 5$ y el cuadrado de la resta de AB con AC es 9. ¿Cuál será el producto de las longitudes de los lados del triángulo CDF que es semejante al triángulo ABC, si la altura del triángulo CDF con respecto a $\overline{CF}$ es $\dfrac{3}{2}$ de la altura del triángulo ABC con respecto a $\overline{AC}$?

(a) 1080 (b) 320 (c) 1 (d) $\dfrac{3}{2}$

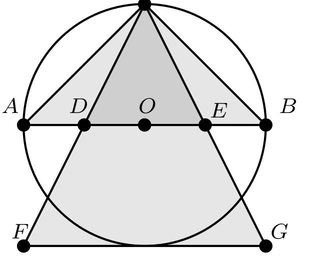
PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7. En el siguiente arreglo se muestran los productos de los números escritos en algunas filas y columnas. Teniendo en cuenta que, por ejemplo, cb representa el número con los dígitos c y b, ¿a qué edad murió el gran matemático Leonard Euler, si nació en el año $1a0a$ y murió en el año $1abc$, después de la fecha de su cumpleaños?

cb	b	
a	ca	259
266	296	

8. Daniela tiene k vestidos de diferentes marcas, 3 azules, 2 rojos, 2 negros y el resto blancos. Ella quiere organizarlos en su armario, de tal manera que los vestidos del mismo color queden juntos. Si en total puede organizarlos de 13824 formas distintas, ¿cuántos vestidos tiene Daniela?

9. En la siguiente figura $\overline{AB}$ es un diámetro del círculo; $\overline{FG}$ es tangente al círculo con respecto a la mediatriz de $\overline{AB}$ que contiene a C; D y E son los puntos medios de $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ respectivamente. Si F y G son los puntos de intersección de las rectas que contienen a $\overline{CD}$ y $\overline{CE}$ con $\overline{FG}$ respectivamente, ¿cuál es la razón entre el área del círculo y el triángulo CFG?



2.2.2. Solución

1. Sea d la diferencia de la progresión a_n. Entonces $b_n = b_1+(n-1)\times(d-2)$; de modo que la ecuación $a_{17} + b_{17} = 136$ equivale a

$$(a_1 + 16 \times d) + (b_1 + 16 \times (d - 2)) = 136.$$

Luego $d = \dfrac{160}{32} = 5$. Por tanto,

$$b_{2017} = 5 + (2017 - 1) \times (5 - 2) = 5 + 2016 \times 3 = 6053.$$

2. Según la información el mayor entero positivo que no se puede escribir como $z\times5+y\times7$; con z, y enteros no negativos es $f(5, 7) = 5\times7-5-7 = 23$, es decir, todo entero positivo mayor que 23 sí puede escribirse de esa forma. Adicionalmente, los números entre 1 y 23 que también pueden escribirse como $z \times 5 + y \times 7$; con z, y enteros no negativos, son

$$\begin{aligned}
5 &= 1 \times 5 + 0 \times 7, & 17 &= 2 \times 5 + 1 \times 7,\\
7 &= 0 \times 5 + 1 \times 7, & 19 &= 1 \times 5 + 2 \times 7,\\
10 &= 2 \times 5 + 0 \times 7, & 20 &= 4 \times 5 + 0 \times 7,\\
12 &= 1 \times 5 + 1 \times 7, & 21 &= 0 \times 5 + 3 \times 7,\\
14 &= 0 \times 5 + 2 \times 7, & 22 &= 3 \times 5 + 1 \times 7.\\
15 &= 3 \times 5 + 0 \times 7, & &
\end{aligned}$$

Luego los números $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 16, 18, 23$ no se pueden escribir como $z \times 5 + y \times 7$; con z, y enteros no negativos.

3. Dado que $\overline{AI} \parallel \overline{FE}$ y FI es una transversal que corta a las dos paralelas, se tiene que $\measuredangle IFE = 30°$. Además, como la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, entonces

$$\measuredangle FCE = 180° - \measuredangle CFE - \measuredangle FEC = 180° - 30° - 35° = 115°.$$

De manera que, $\measuredangle ICE = 180° - 115° = 65°$ y como el triánngulo IEC es isósceles en E, entonces $\measuredangle IEC = 180° - 2(65°) = 50°$.

4. Sabiendo que Z y W son números capicúa de 4 cifras entonces $Z = abba$ y $W = cddc$; donde a, b, c, d son dígitos. Considere el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{cccc} a & b & b & a\,+ \\ c & d & d & c \\ \hline 6 & 3 & 3 & 6 \end{array}$$

Como W es múltiplo de 5 se tiene que $c = 5$; además de la suma anterior, $a + c = 6$ y $b + d = 3$. Como $c = 5$ entonces $a = 1$. Ahora, dado que $b + d = 3$, entonces b puede ser $0, 1, 2$ o 3. Teniendo en cuenta que Z es múltiplo de 3, se deduce que $b = 2$ y por tanto $d = 1$. De esta manera, $Z = 1.221$ y $W = 5.115$, luego $W - Z = 3.894$.

5. Desde 1 a 9 se hacen 7 registros y de 10 al 19 se hacen 8 registros. Como no se cuentan los registros desde 50 a 69, entonces de 1 a 99 se hacen $7 \times 8 + 7 = 63$ registros. Siguiendo este razonamiento, del 1 al 1.000 se hacen $7 \times 64 + 63 = 511$ y de 1.000 a 4.999 se hacen $4 \times 512 = 2.048$. Por lo tanto, realmente ingresaron al bus 2.560 personas.

6. Se tiene que $AC = 5$ y $(AB - 5)^2 = 9$. Entonces $AB - 5 = 3$ o $AB - 5 = -3$, esto es, $AB = 8$ o $AB = 2$. Por la desigualdad triangular descarta que $AB = 2$, por tanto $AB = 8$. Ahora, sea h la altura del triángulo ABC con respecto a $\overline{AC}$, entonces la altura del triángulo CDF con respecto a $\overline{CF}$ es $\dfrac{3h}{2}$ y dado que el triángulo ABC es semejante al triángulo CDF, se tiene que

$$\frac{AB}{CD} = \frac{h}{\frac{3h}{2}} \Rightarrow \frac{8}{CD} = \frac{2}{3};$$

luego $CD = 12$. También,

$$\frac{5}{CF} = \frac{h}{\frac{3h}{2}};$$

así que $CF = \dfrac{15}{2}$. Finalmente, como el triángulo CDF es isósceles en D (¿por qué?), se cumple que $DF = CD = 12$. De modo que el producto de las longitudes de los lados del triángulo CDF es:

$$CD \times DF \times CF = 12 \times 12 \times \frac{15}{2} = 1.080.$$

7. Descomponiendo en factores primos, tenemos que $259 = 7 \times 37$, luego $a = 7$ y $c = 3$. Por otra parte, sabemos que $a \times cb = 266$ y como $a = 7$ entonces $cb = 38$, luego $b = 8$. De modo que, Euler nació en el año 1.707 y murió en 1.783 a sus $1.783 - 1.707 = 76$ años.

8. Sea k el número total de vestidos que tiene Daniela. De acuerdo al enunciado ella tiene 3 vestidos azules, 2 rojos, 2 negros y $k - 7$ blancos. Adicionalmente quiere organizarlos por colores, luego las maneras que tiene para hacerlo, utilizando el principio de multiplicación, están dadas por la siguiente expresión

$$4! \times 3! \times 2! \times 2! \times (k - 7)!,$$

donde el $4!$ representa las formas de ubicar los bloques de vestidos en el armario. Como se sabe que en total tiene 13.824 formas distintas de hacerlo, entonces

$$\begin{aligned} 4! \times 3! \times 2! \times 2! \times (k - 7)! &= 13.824 \\ (k - 7)! &= 24. \end{aligned}$$

Luego $k - 7 = 4$ y así $k = 11$.

9. Dado que $\overline{FG}$ es tangente al círculo con respecto a la mediatriz de $\overline{AB}$ que contiene a C, entonces la altura del triángulo CFG con respecto a $\overline{FG}$ es diámetro del círculo. Adicionalmente, de las condiciones del enunciado y la figura, se deduce que los triángulos CDE y CFG son semejantes y están a razón de 1 a 2 (¿por qué?), luego $\overline{FG}$ es congruente con el diámetro $\overline{AB}$ del círculo. De lo anterior, se concluye que la razón entre el área del círculo y el triángulo CFG es

$$\frac{\pi\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}{\dfrac{AB \times AB}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

2.3. Prueba Final

2.3.1. Resultados

CUADRO DE HONOR				
Nombre	**Colegio/Institución**	**Municipio**	**Posición**	**Mención**
Cristhian Alejandro González	Colegio Santa Isabel De Hungría	Floridablanca	1	Oro
Gabriel José Romero Reyes	Fundación Colegio UIS	Floridablanca	2	Plata
Alejandro Hernández Celis	Colegio Santa Isabel De Hungría	Floridablanca	3	Bronce
Juan Diego Castañeda Oviedo	Fundación Colegio UIS	Floridablanca	4	Diploma
Juliana Lucía Moreno Medina	Fundación Colegio UIS	Floridablanca	5	Diploma

2.3.2. Prueba Final: 29 de octubre

1. Sean a_1, a_2, a_3 y a_4 los primeros términos de una progresión aritmética, tales que a_1, a_2, $a_4 + 12$ forman una progresión geométrica. Si $a_1 = 6$ y a_2, a_3 y a_4 son positivos, ¿cuáles son todos los posibles valores para a_3?

Nota: *Una* **progresión aritmética** *es una sucesión de números, tales que cada término (salvo el primero a_1) es el término anterior más un número fijo d, llamado* **diferencia**. *De modo que el término general es de la forma $a_n = a_1 + (n-1) \times d$. Una* **progresión geométrica** *es una sucesión en la que cada término (salvo el primero a_1) se obtiene multiplicando al anterior una cantidad fija r, llamada* **razón**. *De modo que el término general es de la forma $a_n = a_1 \times r^{n-1}$.*

2. ¿Cuál es el residuo al dividir $1 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + 5^6 + 6^6$ entre 7?

3. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ segmentos que se intersectan en el punto E. Suponga que el circuncentro de ABC es el mismo de CDA. Demuestre que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dividen al cuadrilátero $ACBD$ en dos pares de triángulos semejantes entre sí.

4. ¿Cuántos números de seis cifras distintas terminan en 20 y la suma de cualesquiera dos cifras consecutivas es un número primo?

5. Sea $A = \{a \in \mathbb{R} : -1 < a < 1\}$ y considere sobre A la operación $\clubsuit$ dada por:

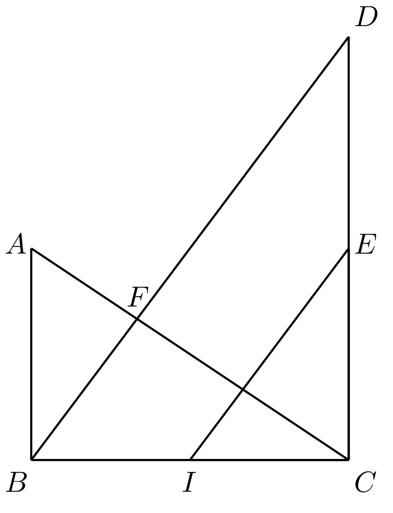
$$a \clubsuit b = \frac{a+b}{1+ab}.$$

Escriba verdadero (V) o falso (F) a las siguientes afirmaciones y justifique.

(a) $\clubsuit$ es conmutativa, 0 es el elemento identidad y $-a$ es el inverso de a bajo $\clubsuit$.

(b) $\clubsuit$ no es asociativa, 0 es el elemento identidad y $\dfrac{1}{a}$ es el inverso de a bajo $\clubsuit$.

6. En la siguiente figura, las alturas de los triángulos ABF y CDF respecto a sus bases paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ miden $2\ cm$ y $4\ cm$ respectivamente. Además, I y E son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente y el área del triángulo ICE es $6\ cm^2$. Halle el área del polígono $ABCDF$.



2.3.3. Solución

1. Sea d la diferencia de la progresión aritmética, entonces a_1, a_2, a_3 y a_4 se pueden expresar de la siguiente forma:

$$a_1 = 6,$$
$$a_2 = 6 + d,$$
$$a_3 = 6 + 2d,$$
$$a_4 = 6 + 3d.$$

Ahora, sea r la razón de la progresión geométrica, así que a_1, a_2 y $a_4 + 12$ se pueden expresar como sigue:

$$a_1 = 6,$$
$$a_2 = 6r,$$
$$a_4 + 12 = 6r^2.$$

De lo anterior se tiene el siguiente sistema

$$6r = 6 + d,$$
$$6r^2 = 18 + 3d.$$

Resolviendo el sistema se llega a que $r = 0$ o $r = 3$; pero $r \neq 0$, debido a que a_2, a_3 y a_4 son positivos, luego $r = 3$ y por lo tanto, $d = 12$, $a_2 = 18$, $a_3 = 30$ y $a_4 = 42$.

2. Para ver el residuo que deja 6^6 al dividirse por 7 tenga en cuenta el siguiente procedimiento:

$$6^2 = 7(5) + 1,$$
$$6^3 = 7(5 \times 6) + 6,$$
$$6^4 = 7(5 \times 6^2) + 6^2 = 7(5 \times 6^2) + 7(5) + 1 = 7(5 \times 6^2 + 5) + 1,$$
$$6^5 = 7(5 \times 6^3 + 5 \times 6) + 6,$$
$$6^6 = 7(5 \times 6^4 + 5 \times 6^2 + 5) + 1.$$

Entonces 6^6 deja residuo 1 al dividirse entre 7. Esto también puede concluirse usando la teoría de congruencias modulares. Con cualquiera de estas dos formas se puede determinar que 1, 2^6, 3^6, 4^6, 5^6 y 6^6 todos dejan residuo 1 al dividirse entre 7. De modo que, por el Algoritmo de la División se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= 7k_1 + 1, & 4^6 &= 7k_4 + 1,\\ 2^6 &= 7k_2 + 1, & 5^6 &= 7k_5 + 1,\\ 3^6 &= 7k_3 + 1, & 6^6 &= 7k_6 + 1; \end{aligned}$$

donde $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ son enteros. De aquí que

$$1 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + 5^6 + 6^6 = 7(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6) + 6.$$

Es decir, $1 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + 5^6 + 6^6$ deja residuo 6 al dividirse entre 7.

3. Solución 1: Como el circuncentro de ABC y CDA es el mismo, se tiene que el cuadrilátero $ACBD$ es cíclico[1]. Ahora, como los ángulos ABD y ACD subtienden al arco AD y los ángulos CDB y CAB subtienden al arco CB, se concluye que

$$\measuredangle ABD = \measuredangle ACD \quad \text{y} \quad \measuredangle CDB = \measuredangle CAB.$$

Además, $\measuredangle DEB = \measuredangle AEC$ ya que son opuestos por el vértice, luego por el criterio de los ángulos, los triángulos AEC y DEB son semejantes. Análogamente se deduce que los triángulos AED y CEB son semejantes, obteniéndo así las dos parejas de triángulos semejantes.

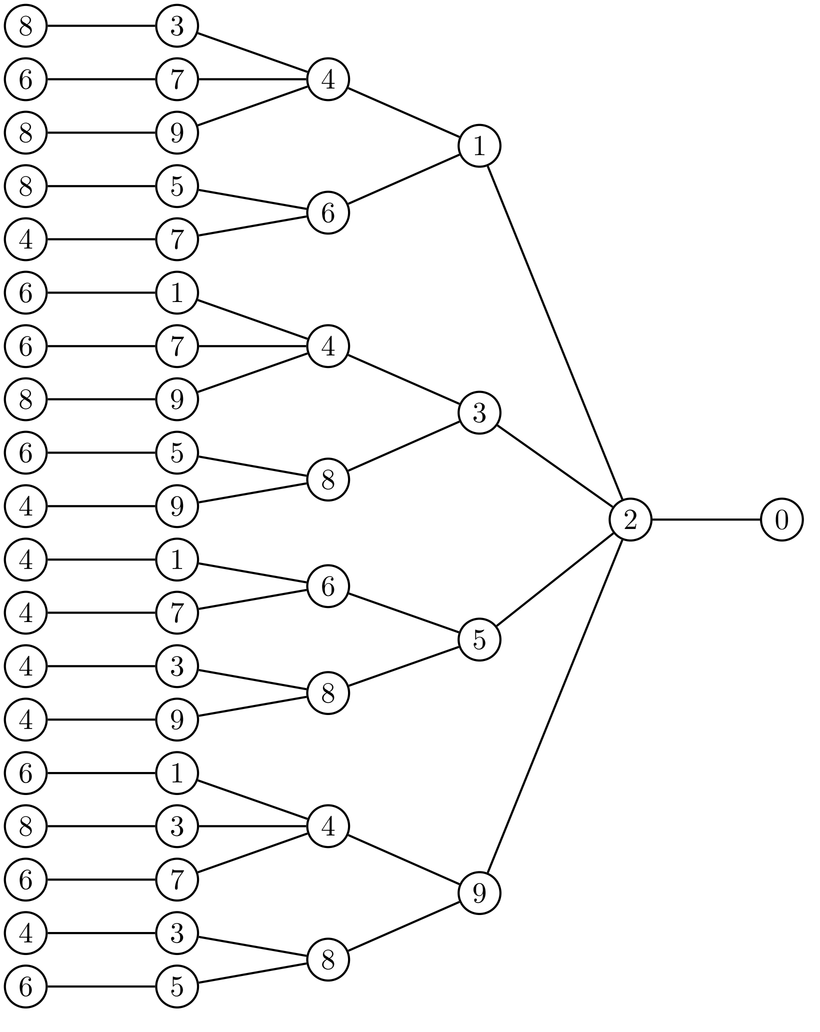
Solución 2: Dado que el circuncentro de ABC es el mismo de CDA se puede afirmar que los puntos A, B, C y D están sobre la misma circunferencia, luego $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas. Aplicando el resultado para la potencia del punto E, el cual interseca las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, se tiene que

$$AE \times EB = CE \times ED, \quad \text{entonces} \quad \frac{CE}{AE} = \frac{EB}{ED}.$$

[1] Un polígono es *cíclico* si existe una circunferencia que contenga a todos sus vértices

Esto quiere decir que los triángulos CEA y DEB tienen dos pares de lados proporcionales. Por otro lado, $\measuredangle CEA = \measuredangle BED$, por ser opuestos por el vértice. Por lo tanto, se concluye que los triángulos CEA y DEB son semejantes. De forma análoga se prueba que los triángulos DEA y CEB son semejantes.

4. El siguiente diagrama ilustra una forma de solucionar el problema.



Luego los números que cumplen las condiciones del enunciado son 19.

5. A continuación se revisa cada una de las propiedades mencionadas, para determinar el valor de verdad de las afirmaciones.

- Conmutatividad. Sean $a, b \in A$. Aplicando la operación $\clubsuit$ y teniendo en cuenta las propiedades algebraicas de $\mathbb{R}$, se obtiene que:
$$a \clubsuit b = \frac{a+b}{1+ab} = \frac{b+a}{1+ba} = b \clubsuit a,$$
luego $\clubsuit$ es conmutativa.

- 0 es el elemento identidad. Se debe verificar que $a \clubsuit 0 = 0 \clubsuit a = a$, para todo $a \in A$. Como $\clubsuit$ es conmumativa, solo basta mostrar que $a \clubsuit 0 = a$. Sea $a \in A$,
$$a \clubsuit 0 = \frac{a+0}{1+a \cdot 0} = a;$$
por lo tanto, es cierto que 0 es el elemento identidad.

- $-a$ es el inverso de a, es decir que, dado $a \in A$ se satisface que $a \clubsuit (-a) = 0$. Dado que
$$a \clubsuit (-a) = \frac{a+(-a)}{1+a\cdot(-a)} = 0;$$
por lo cual, es cierto que $-a$ es el inverso de a bajo la operación $\clubsuit$.

- Asociatividad. Sean $a, b, c \in A$, entonces
$$(a \clubsuit b) \clubsuit c = \left(\frac{a+b}{1+ab}\right) \clubsuit c = \frac{\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)+c}{1+\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)c} = \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc} \quad \text{y}$$
$$a \clubsuit (b \clubsuit c) = a \clubsuit \left(\frac{b+c}{1+bc}\right) = \frac{a+\left(\frac{b+c}{1+bc}\right)}{1+a\left(\frac{b+c}{1+bc}\right)} = \frac{a+abc+bc}{1+bc+abc}.$$
Note que $(a \clubsuit b) \clubsuit c = a \clubsuit (b \clubsuit c)$ solo si $b + c = bc$; por lo cual $\clubsuit$ no es asociativa. Ilustre con un caso particular que esta propiedad no se cumple.

- $\dfrac{1}{a}$ es el elemento inverso de a, esto quiere decir que, dado $a \in A$ se debe verificar que $a \clubsuit \dfrac{1}{a} = 0$, lo cual es imposible, puesto que $\dfrac{1}{a} \notin A$.

6. Observe que la suma del área del triángulo ABF con la del triángulo BCD corresponde al área que se desea encontrar.

Note que los triángulos ICE y BCD son semejantes con constante de proporcionalidad $k = \dfrac{1}{2}$; entonces

$$\text{Área del triángulo } ICE = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\text{Área del triángulo } BCD\right),$$

esto quiere decir que el área del triángulo BCD es $6 \times 4 = 24\ cm^2$.

Para calcular el área del triángulo ABF basta conocer la longitud de $\overline{AB}$, puesto que el área del triángulo ABF es $\frac{AB \times 2}{2}$. En efecto, note que la altura del triángulo BCD con respecto a $\overline{CD}$ es $6\ cm$ (¿por qué?), luego $CD = 8\ cm$. Además, se puede probar que los triángulos ABF y CDF también son semejantes, con constante de proporcionalidad $k = \dfrac{1}{2}$; luego $AB = 4\ cm$, lo cual implica que el área del triángulo ABF es $4\ cm^2$.

En conclusión, se tiene que el área del polígono $ABCDF$ es $28\ cm^2$.

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

3.1.1. Prueba Clasificatoria: 26 de agosto.

1. Se dice que n puntos están en **posición general** si $n > 2$ y cada tres de ellos no son colineales. Dados n puntos en posición general, **no** es correcto afirmar que

(a) Todos los n puntos son distintos.

(b) Las rectas que pasan por cada dos puntos son distintas.

(c) Hay exactamente $\dfrac{n(n-1)}{2}$ rectas que pasan por cada dos puntos.

(d) Entre las rectas que pasan por cada dos puntos, existe al menos un par que son paralelas.

2. Sea $P(x) = x(ax + b)$, con $a < 0$. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar $P(x)$?

(a) $\dfrac{-b}{2a}$ (b) $\dfrac{b^2}{4a^2}$ (c) $\dfrac{-b^2}{4a}$ (d) $\dfrac{b}{2a}$

3. ¿Cuántos conjuntos de enteros positivos $\{a, b, c\}$, satisfacen que $a+3b = 21$ y $5a + 6c = 150$?

(a) 3 (b) 6 (c) 20 (d) Infinitos

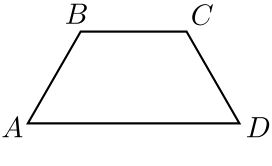
4. Sea $ABCD$ un trapecio, con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y P la intersección de sus diagonales. Si las áreas de los triángulos PAB y PCD son $36\ cm^2$ y $49\ cm^2$ respectivamente y las magnitudes de sus alturas (respecto a los segmentos paralelos) suman 13, halle el producto de las longitudes AB y CD.

(a) 168 (b) 672 (c) 42 (d) 1764

5. Para definir la medalla de oro en la prueba de tiro con arco de los juegos olímpicos se realizan dos jornadas de puntuación. En la primera jornada, un deportista chino obtuvo $5x + 2$ puntos y un italiano $6y - 1$ puntos, para un total de 68 puntos en la jornada. Para el siguiente día de competencia por la medalla, el deportista italiano obtuvo un total de $4(x + 2)$ puntos y por su parte, el chino $8y + 3$. Si en las dos jornadas se obtuvieron un total de 155 puntos por parte de los dos deportistas, el ganador olímpico fue

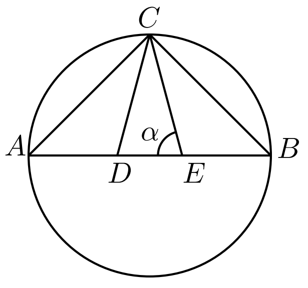
(a) China con 70 puntos.
(b) Italia con 69 puntos.
(c) China con 86 puntos.
(d) Italia con 87 puntos.

6. En el siguiente trapecio isósceles $AB = BC = CD = 1\ cm$ y $AD = 2\ cm$. ¿Cuál es la menor cantidad de puntos que se debe ubicar en el trapecio, para garantizar que un par de estos puntos están a una distancia menor a $1\ cm$?



(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

7. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia y C es el punto de intersección entre la mediatriz de $\overline{AB}$ y la circunferencia. Si $\overline{CD}$ y $\overline{CE}$ trisecan el ángulo ACB, ¿cuál es la medida del ángulo α?



(a) $30°$
(b) $60°$
(c) $75°$
(d) $105°$

8. ¿En qué línea de la siguiente "demostración" se genera el error?

$$\begin{aligned} (-3)^2 &= 3^2 \\ \sqrt{(-3)^2} &= \sqrt{9} \\ \sqrt{-3}\times\sqrt{-3} &= 3 \\ \sqrt{3}i\times\sqrt{3}i &= 3 \\ -3 &= 3. \end{aligned}$$

(a) Línea 1.
(b) Línea 2.
(c) Línea 3.
(d) Línea 4.

9. El **factorial** de un entero positivo n, se define como el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n y se representa por $n!$, es decir,

$$n! = 1\times 2\times 3\times\ldots\times(n-1)\times n.$$

Si k es un número que satisface

$$2!\times 3!\times 4!\times 5!\times k = 7!\times 8!,$$

es correcto afirmar que:

(a) el residuo al dividir k entre $6!$ es 0.
(b) k tiene exactamente 3 divisores primos.
(c) el número de divisores de k es 4.
(d) k tiene 48 divisores.

10. Si a un triángulo isósceles se le traza la altura correspondiente al lado incongruente, **no** es correcto afirmar que:

(a) el triángulo queda dividido en dos triángulos congruentes.
(b) la altura trazada es mediatriz del lado incongruente.
(c) el triángulo queda dividido en dos triángulos isósceles.
(d) la altura trazada es bisectriz y mediana del triángulo.

11. La delegación olímpica colombiana, conformada por más de 50 personas, decide hacer un paseo turístico por Río de Janeiro. Para esto cuentan con buses y busetas. Si usan solo buses, son necesarios 6 y no quedan asientos libres. Si usan solo busetas, son necesarias 11 y quedan 5 asientos libres. ¿Cuál es la menor cantidad de personas que puede conformar esta delegación?

(a) 54 (b) 60 (c) 66 (d) 72

12. En los Juegos Olímpicos de Río 2016, un conjunto de 11 atletas ha llegado a disputar la semifinal de los 400 m planos. En la competencia se entrega un total de 3 medallas y 8 diplomas olímpicos. Si los medallistas también ganan diploma y todos llegaron en tiempos diferentes, ¿de cuántas maneras se puede premiar a los atletas?

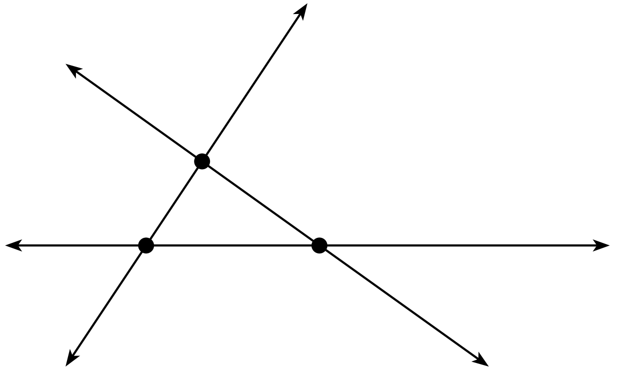
Nota: *Cada diploma indica la posición de llegada.*

(a) $11!$ (b) 165 (c) $165 \times 11!$ (d) $165 \times 8!$

3.1.2. Solución

1. Suponga que n puntos están en posición general y al menos dos de ellos son iguales; entonces tomando otro punto se tendrían tres puntos colineales, lo cual es imposible; así que se puede afirmar que los n puntos son distintos. También se puede afirmar que las rectas que pasan por cada dos puntos son distintas, dado que si al menos dos de estas rectas son iguales, se tendría que existen al menos tres puntos colineales. Por otro lado, teniendo en cuenta lo anterior, se concluye que el número de rectas que pasan por cada dos puntos está dado por la expresión $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Finalmente, note que si tres puntos están en posición general, al trazar todas las rectas que pasan por cada dos puntos, no hay un par de rectas que sean paralelas; para ilustrar esta afirmación considere la siguiente figura.



2. Como $P(x) = ax^2 + bx$, con $a < 0$; se obtiene que el máximo valor de $P(x)$ se alcanza en el vértice de esta parábola (que abre hacia abajo) cuyas coordenadas son: $\left(\dfrac{-b}{2a}, P\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$. Así,

$$P\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{b^2}{2a}\left(\frac{1}{2} - 1\right).$$

Luego el mayor valor que toma $P(x)$ es $P\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = -\dfrac{b^2}{4a}$.

3. Solución 1: Como $a+3b=21$, entonces $b=\dfrac{21-a}{3}$. Dado que b es un entero positivo y que 3 divide a 21, se concluye que $a=3k$, con k entero tal que $1\leq k<7$. Realizando un proceso similar con la segunda ecuación se establece que $c=5q$, con q un entero tal que $1\leq q<5$. Reemplazando $a=3k$ y $c=5q$ se tiene que

$$\begin{aligned} 5a+6c&=150,\\ 5(3k)+6(5q)&=150,\\ k+2q&=10. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Así, la siguiente tabla muestra los posibles valores de a, b y c teniendo en cuenta los posibles valores de k y q en la ecuación (3.1).

q	k	a	b	c
2	6	18	1	10
3	4	12	3	15
4	2	6	5	20

Por lo tanto, hay 3 conjuntos que satisfacen las dos condiciones.

Solución 2: Si $a+3b=21$ y $5a+6c=150$, entonces

$$b=\frac{21-a}{3}, \tag{3.2}$$

$$c=\frac{150-5a}{6}. \tag{3.3}$$

Para que b sea entero positivo, de (3.2) se puede concluir que $a<21$ y que a es múltiplo de 3. De forma análoga, de (3.3) se puede deducir que $a<30$ y que a debe ser par. Por tanto, $a=6$, $a=12$ o $a=18$.

Si $a=6$, entonces $b=5$ y $c=20$; si $a=12$, entonces $b=3$ y $c=15$ y si $a=18$, entonces $b=1$ y $c=10$. Se concluye entonces que hay tres conjuntos de enteros positivos que satisfacen las condiciones.

4. Sean e y f las longitudes de las alturas que contienen a P de los triángulos PAB y PCD respectivamente. Observe que $\measuredangle CPD = \measuredangle APB$ ya que estos ángulos son opuestos por el vértice y $\measuredangle PCD = \measuredangle PAB$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas. Esto lleva a concluir que los triángulos PAB y PCD son semejantes. Sea $r = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{e}{f}$, luego $e = r \times f$.

Por otra parte, $\dfrac{AB}{CD} \times \dfrac{e}{f} = r^2 = \dfrac{36}{49}$, de donde se obtiene que $r = \dfrac{6}{7}$, entonces

$$e + f = (r \times f) + f = \left(\frac{6}{7} \times f\right) + f = \left(\frac{13}{7} \times f\right) = 13.$$

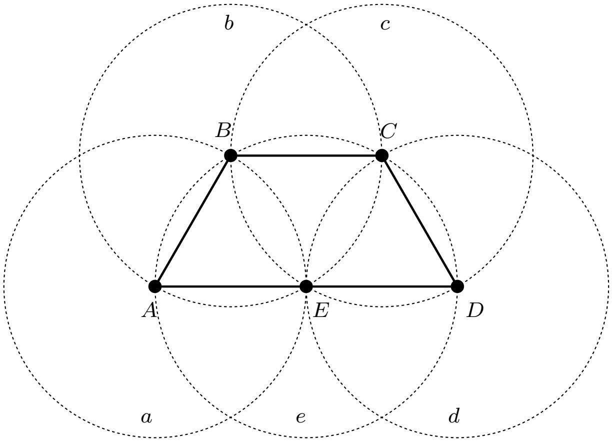
De modo que $f = 7$ y $e = 6$; por lo tanto, $AB = \dfrac{72}{6} = 12$ y $CD = \dfrac{98}{7} = 14$. Así, $AB \times CD = 168$.

5. De acuerdo al enunciado del problema los dos deportistas obtuvieron 68 puntos y 87 puntos en el primer y el segundo día respectivamente. De este modo, obtenemos dos ecuaciones $(5x + 2) + (6y - 1) = 68$ y $(8y + 3) + 4(x + 2) = 87$, lo que lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x + 6y & = & 67 \\ 4x + 8y & = & 76 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema se obtiene que $x = 5$ e $y = 7$. Se concluye entonces que el deportista chino acumuló un total de 86 puntos, mientras que el italiano acumuló un total de 69.

6. Se usará el principio de las casillas para resolver el problema. Al considerar el peor de los casos posibles, se pueden ubicar 5 puntos en el trapecio tal que la distancia entre dos puntos sea mayor o igual a 1 cm, como se muestra en la siguiente figura, donde A, B, C, D son los vértices del trapecio; E es el punto medio del segmento $\overline{AD}$ y las circunferencias a, b, c, d y e, con centros en A, B, C, D y E respectivamente, tienen radio 1 cm.



Observe que si se hace una distribución de los 5 puntos, diferente a la mostrada, es necesario que al menos dos puntos se encuentren al interior de la misma circunferencia; lo que implica que dos de los puntos están a menos de $1\ cm$ de distancia. Esto prueba que la distribución mostrada es el peor de los casos. Cualquier distribución de 6 o más puntos cumple con que dos de los puntos están en el interior de las circunferencias mostradas.
Usando el principio de las casillas, tomando las 5 circunferencias como casillas, se concluye que 6 es la menor cantidad de puntos que se deben ubicar en el trapecio para garantizar que un par de ellos están a menos de $1\ cm$ de distancia.

7. Observe que el triángulo ACB es rectángulo por estar inscrito en una semicircunferencia. Luego $\measuredangle ACB = 90°$ y por tanto $\measuredangle DCE = 30°$. Además, por propiedad de la mediatriz, se deduce que $AC = CB$, entonces $\measuredangle CAB = \measuredangle CBA = 45°$. Por lo tanto,

$$\alpha = 180° - \measuredangle CEB = 75°.$$

8. El error en la demostración está en la línea 3 ya que la propiedad de la radicación: $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$, se puede aplicar siempre y cuando los radicandos de las raíces sean positivos, esto es $x, y > 0$; pero en este caso $-3 < 0$.

9. Observe que $8!$ y $7!$ se pueden reescribir de la siguiente manera

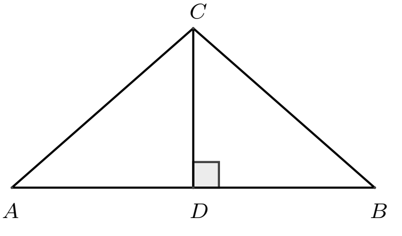
$$8! = 5! \times 6 \times 7 \times 8 \quad y \quad 7! = 5! \times 6 \times 7.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 2! \times 3! \times 4! \times 5! \times k &= 7! \times 8!, \\ 2! \times 3! \times 4! \times 5! \times k &= (4! \times 5 \times 6 \times 7) \times (5! \times 6 \times 7 \times 8), \\ 2 \times (2 \times 3) \times k &= 5 \times 6 \times 7 \times 6 \times 7 \times 8, \\ k &= 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto k tiene $(3+1)(1+1)(1+1)(2+1) = 48$ divisores.[1]

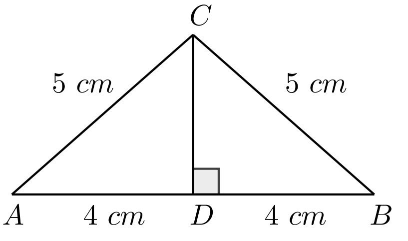
10. Considere el siguiente triángulo isósceles como referencia, donde $\overline{AB}$ es el lado incongruente.



Observe que los triángulos ACD y BCD son congruentes, pues $\measuredangle CAD = \measuredangle CBD$, $\measuredangle ADC = \measuredangle BDC = 90°$, $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$ y comparten el lado $\overline{CD}$, es decir, dos ángulos y el lado común a ellos son respectivamente congruentes. Por tal razón $AD = BD$, luego D divide a $\overline{AB}$ en dos segmentos iguales. Por lo anterior se puede afirmar que $\overline{CD}$ es mediatriz de $\overline{AB}$, bisectriz del ángulo ACB y mediana del triángulo ABC.

[1] Recuerde que si $n = p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times \cdots \times p_k^{n_k}$, donde los p_i son números primos distintos y los n_i números enteros positivos, entonces la cantidad de divisores de n está dada por $(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_k+1)$.

Ahora considere el siguiente triángulo:



La figura permite ver que el triángulo ABC es isósceles, pero los triángulos CAD y DBC claramente no lo son.

11. Sean D el número de personas que conforma la delegación y x e y la cantidad de asientos que tiene cada bus y buseta, respectivamente. Entonces

$$D = 6x = 11y - 5,$$

Restando 6 en ambos miembros de la segunda igualdad tenemos:

$$6x - 6 = 6(x - 1) = 11\,(y - 1)\,.$$

Por lo tanto 11 divide a $x - 1$. Como se quiere hallar el menor valor que puede tomar D y esta cantidad es mayor de 50, x debe ser mayor o igual a 9. Probando con los números mayores o iguales a 9, se llega a que el menor valor de x que cumple las condiciones anteriores es $x = 12$ y así, se tiene que la menor cantidad de personas que pueden conformar la delegación es 72.

12. Del conjunto de los 11 atletas finalistas se pueden escoger 8 ganadores de $\binom{11}{8} = 165$ formas, y en cada una de estas formas los 8 atletas se pueden organizar de $8!$ formas. Aplicando el principio multiplicativo se concluye que los atletas se pueden premiar de $165 \times 8!$ formas.

3.2. Prueba Selectiva

3.2.1. Prueba Selectiva: 30 de septiembre

1. Sean $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$ y $\sqrt[6]{n}$ términos consecutivos de una progresión geométrica. El siguiente término de la progresión es:

Nota: *Una* **progresión geométrica** *es una sucesión en la que cada término (salvo el primero a_1) se obtiene multiplicando al anterior una cantidad fija r, llamada* **razón***. De modo que el término general es de la forma $a_n = a_1 \times r^{n-1}$.*

(a) 1 (b) n (c) $\sqrt[9]{n}$ (d) $\sqrt[11]{n}$

2. Sea A un conjunto con n elementos. Si B es un subconjunto de A con k elementos, ¿cuántos subconjuntos de A intersectan a B?

(a) $2^n - 2^k$ (b) 2^{2n-k} (c) 2^{n-k} (d) $2^n - 2^{n-k}$

3. Si en un triángulo un lado y su altura correspondiente son respectivamente congruentes a un lado y su altura correspondiente de otro triángulo, **NO** es correcto afirmar que:

(a) si los triángulos tienen igual perímetro, son congruentes.
(b) los triángulos tienen igual área.
(c) si los triángulos son semejantes, son congruentes.
(d) si los triángulos son rectángulos, son congruentes.

4. Sea $f(x)$ una función polinomial tal que $f(2) = 0$, $f(0) = 3$ y $f(-1) = -1$. El residuo al dividir $f(x)$ entre $x(x-2)(x+1)$ es

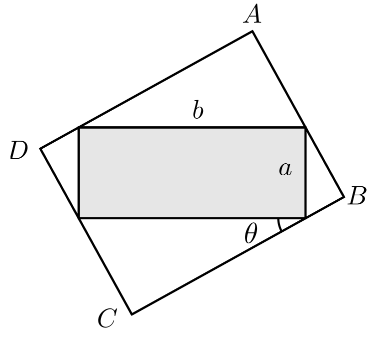
(a) $-\dfrac{11}{6}x^2 + \dfrac{13}{6}x + 3$ (c) $\dfrac{11}{6}x^2 + \dfrac{13}{6}x - 3$

(b) $-2x^2 + x$ (d) $-x^2 + 2x$

5. Daniela tiene k vestidos de diferentes marcas, 3 azules, 2 rojos, 2 negros y el resto blancos. Ella quiere organizarlos en su armario, de tal manera que los vestidos del mismo color queden juntos. Si en total puede organizarlos de 13824 formas distintas, ¿cuántos vestidos tiene Daniela?

(a) 8 (b) 9 (c) 11 (d) 24

6. En la figura el rectángulo de ancho a y largo b está inscrito en el rectángulo $ABCD$.



Si $\theta = 45°$, **NO** es correcto afirmar que

(a) el área de $ABCD$ es $\dfrac{(a+b)^2}{2}$.

(b) $ABCD$ es un cuadrado.

(c) el perímetro de $ABCD$ es $\sqrt{2}(a+b)$.

(d) la razón entre el perímetro del rectángulo $ABCD$ y el rectángulo sombreado es $\sqrt{2}$.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7. Diego crea la sucesión $700, 708, 716, 724, \ldots$ a la que agrega un nuevo término cada medio minuto. Camila crea la sucesión $1500, 1496, 1492, 1488, \ldots$ a la que agrega un nuevo término cada 15 segundos. Si inician las sucesiones al mismo tiempo, ¿en qué instante Diego escribe por primera vez un número que es mayor al doble del que escribe Camila?

8. Dada una n-tupla **a** con componentes enteras positivas, se puede calcular $S(\mathbf{a})$ y $P(\mathbf{a})$ que son la suma y el producto de sus componentes, respectivamente. Por ejemplo, para la 5-tupla $\mathbf{a} = (6, 2, 11, 3, 100)$ se tiene que $S(\mathbf{a}) = 122$ y $P(\mathbf{a}) = 39600$ ¿Cuántas n-tuplas **a** cumplen que la razón entre $P(\mathbf{a})$ y $S(\mathbf{a})$ es $\dfrac{2(n-1)!}{n+1}$?

9. Sean AND un triángulo rectángulo, recto en D tal que $AD = \dfrac{72}{5}\ cm$ y $AN = 24\ cm$; M en $\overline{AN}$ tal que $AM = 2MN$; L en $\overline{DN}$ tal que $LM = 6\ cm$ y $\mathcal{C}_2$ una circunferencia tangente a $\overline{AN}$ en M, con radio LM. Si P es el punto de reflexión de M con respecto a $\overline{ND}$, ¿cuál es el área del cuadrilátero $MLPD$?

3.2.2. Solución

1. Como $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$ y $\sqrt[6]{n}$ son términos consecutivos de una progresión geométrica, se tiene que existe un número real r tal que $r\sqrt{n} = \sqrt[3]{n}$ y $r\sqrt[3]{n} = \sqrt[6]{n}$. Por lo tanto,

$$r = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{2}}} = n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = n^{-\frac{1}{6}}.$$

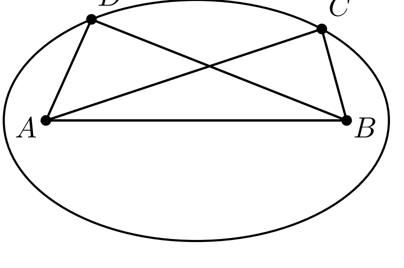
Así, el término siguiente es

$$r\sqrt[6]{n} = n^{-\frac{1}{6}}\sqrt[6]{n} = n^{-\frac{1}{6}}n^{\frac{1}{6}} = n^{-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}} = n^0 = 1.$$

2. El número de subconjuntos de A es 2^n. Sea C el subconjunto de todos los elementos de A que no pertenecen a B, dicho conjunto tiene $n-k$ elementos, de ahí que C tiene 2^{n-k} subconjuntos. Luego el número de subconjuntos de A que intersectan a B es el número de subconjuntos de A menos el número de subconjuntos de C, es decir $2^n - 2^{n-k}$ subconjuntos.

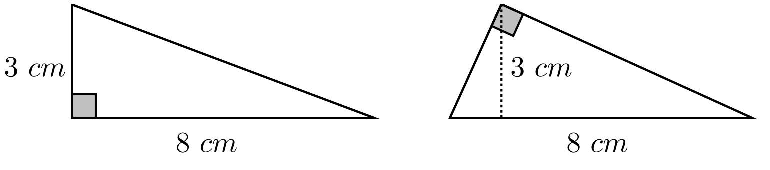
3. Claramente, de las condiciones del enunciado, es correcto afirmar que los dos triángulos tienen igual área. Ahora, suponga que los triángulos son semejantes, es decir, todos los ángulos de un triángulo son congruentes a los correspondientes ángulos del otro triángulo, luego por el criterio ángulo-lado-ángulo se tiene que los dos triángulos son congruentes.

Por otra parte, considere la siguiente elipse, con focos A, B, y C, D puntos sobre la elipse.



Por propiedad de la elipse, los triángulos ACB y ADB tienen igual perímetro. Ahora, si las alturas de los triángulos ACB y ADB con respecto $\overline{AB}$ miden lo mismo, se tiene que los triángulos ACB y ADB son congruentes, ¡verifíquelo! Por lo anterior, si dos triángulos cumplen la condición del enunciado y tienen igual perímetro, entonces son congruentes.

Para finalizar, considere el siguiente ejemplo, en el que se muestran dos triángulos rectángulos que cumplen la condición del enunciado, pero no son congruentes ¡verifíquelo!



4. Por el algoritmo de la división para polinomios se tiene que existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que:

$$f(x) = [x(x-2)(x+1)]\, q(x) + r(x),$$

donde $0 \leq \text{grad}(r(x))$[2] < 3 o $r(x) = 0$; así $r(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. De esta manera $f(x) = x(x-2)(x+1)q(x) + (ax^2 + bx + c)$. Haciendo uso de las hipótesis del problema se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 &= f(2) = a(2)^2 + b(2) + c = 4a + 2b + c, \\ 3 &= f(0) = c, \\ -1 &= f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c = a - b + c. \end{aligned}$$

Donde resulta el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 4a + 2b &= -3, \\ a - b &= -4; \end{aligned}$$

cuya solución es $a = -\dfrac{11}{6}$ y $b = \dfrac{13}{6}$. Finalmente, $r(x) = -\dfrac{11}{6}x^2 + \dfrac{13}{6}x - 3$.

[2]**Nota:** grad$(r(x))$ hace referencia al grado del polinomio $r(x)$.

5. Sea k el número total de vestidos que tiene Daniela. De acuerdo al enunciado ella tiene 3 vestidos azules, 2 rojos, 2 negros y $k-7$ blancos. Adicionalmente quiere organizarlos por colores, luego las maneras que tiene para hacerlo, utilizando el principio de multiplicación, están dadas por la siguiente expresión

$$4! \times 3! \times 2! \times 2! \times (k-7)!,$$

donde el $4!$ representa las formas de ubicar los bloques de vestidos en el armario. Como se sabe que en total tiene 13824 formas distintas de hacerlo, entonces

$$\begin{aligned} 4! \times 3! \times 2! \times 2! \times (k-7)! &= 13.824 \\ (k-7)! &= 24. \end{aligned}$$

Luego $k-7=4$ y así $k=11$.

6. Dado que $\theta = 45°$, se deduce que los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y $\overline{DA}$ miden $\dfrac{\sqrt{2}(a+b)}{2}$. Por tanto, el rectángulo $ABCD$ tiene todos sus lados iguales, es decir, es un cuadrado, de área $\dfrac{(a+b)^2}{2}$ y perímetro $2\sqrt{2}(a+b)$, así que la razón entre el perímetro del cuadrado $ABCD$ y el rectángulo sombreado es

$$\frac{2\sqrt{2}(a+b)}{2(a+b)} = \sqrt{2}.$$

De modo que no es correcto afirmar que el perímetro de $ABCD$ es $\sqrt{2}(a+b)$.

7. De acuerdo a las secuencias mostradas cada minuto Diego suma 16 al número anterior, mientras que Camila resta 16 al número anterior de su secuencia. Para obtener el minuto en el cual Diego escribe un número mayor que el doble del que Camila escribe se ha de solucionar la siguiente desigualdad, considerando a m como el número de minutos que transcurren:

$$\begin{aligned} 700 + 16m &> 2(1500 - 16m) \\ 700 + 16m &> 3000 - 32m \\ m &> 47,9. \end{aligned}$$

Así, en el minuto 48 Diego escribe un número mayor al doble del que Camila escribe.

8. Considerando una $n{-}tupla$ donde sus componentes son $\mathbf{a} = (1, 2, \ldots, n)$, se obtiene que

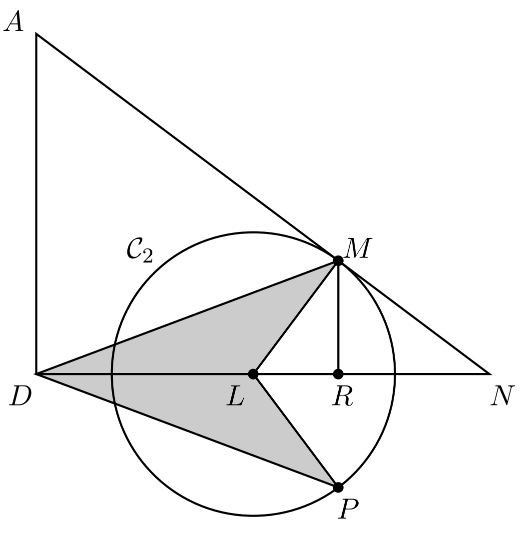
$$P(\mathbf{a}) = n! \quad \text{y} \quad S(\mathbf{a}) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Al realizar el cociente

$$\frac{P(\mathbf{a})}{S(\mathbf{a})} = \frac{n!}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n!}{n(n+1)} = \frac{2(n-1)!}{n+1}.$$

Por lo tanto, las $n - tuplas$ que cumplen la propiedad son $n!$. Se deja como ejercicio al lector mostrar que no existe otro tipo de $n - tuplas$ que cumplan la condición.

9. Considere la siguiente figura:



Observe que el área del cuadrilátero $MLPD$ (área sombreada en la figura) corresponde al doble del área del triángulo DML (¿por qué?). Sea $\overline{MR}$ la altura del triángulo DLM respecto a la base $\overline{DL}$. Entonces los triángulos

ADN y MRN son semejantes, luego $\dfrac{AD}{MR} = \dfrac{AN}{MN} = \dfrac{24}{8} = 3$, Así

$$MR = \frac{AD}{3} = \frac{\frac{72}{5}}{3} = \frac{72}{15}\ cm.$$

Por otra parte, del Teorema de Pitágoras tenemos que $DN = \dfrac{96}{5}\ cm$ y $LN = 10\ cm$, de modo que $DL = \dfrac{46}{5}\ cm$. Por lo tanto, el área del cuadrilátero $MLPD$ está dada por

$$2 \times \frac{DL \times MR}{2} = \frac{46}{5} \times \frac{72}{15} = \frac{1.104}{25}\ cm^2.$$

3.3. Prueba Final

3.3.1. Resultados

CUADRO DE HONOR				
Nombre	**Colegio/Institución**	**Municipio**	**Posición**	**Mención**
Camilo Eduardo Arias Osorio	Fundación Colegio UIS	Floridablanca	1	Oro
Juan David Gómez Castellanos	Fundación Colegio UIS	Floridablanca	2	Plata
Jose Carlos Mantilla Rivero	Colegio San Pedro Claver	Bucaramanga	3	Bronce
Sergio Alejandro Acelas	José Elías Puyana	Bucaramanga	4	Diploma
Carlos Alberto Vasquez Serrano	Colegio San Jose de la Salle	Bucaramanga	5	Diploma

3.3.2. Prueba Final: 29 de octubre

1. Para cada entero n, entre 1 y 2016; denotamos por A_n al conjunto de todos los enteros desde n hasta 2016, esto es:

$$A_n = \{n, n+1, \ldots, 2016\}.$$

¿Cuál es el menor entero n para el cual no existe una partición de A_n con más de un subconjunto, tal que en cada subconjunto de la partición, haya al menos un número que es la suma de dos números en el subconjunto?

Nota: *Una* **partición** *de un conjunto A, es una familia de subconjuntos no vacíos de A, disyuntos dos a dos, cuya unión es A.*

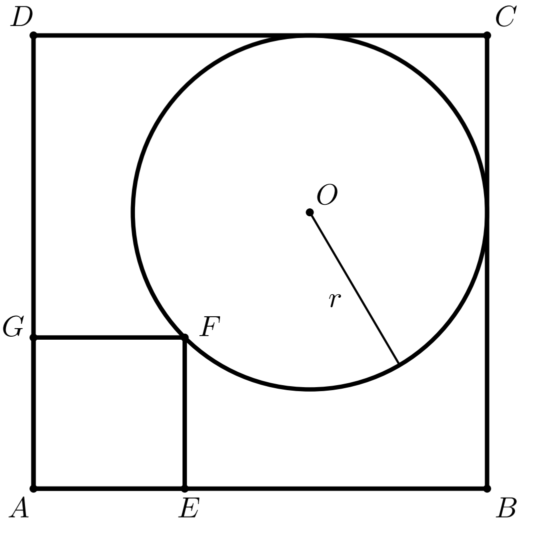
2. El problema de Erdös–Pósa. Dada una colección de $n+1$ enteros positivos distintos menores o iguales que $2n$, pruebe que siempre es posible encontrar dos enteros primos relativos de la colección (dos enteros son llamados primos relativos si su máximo común divisor es 1). Diga por qué esta afirmación puede no ser válida si la colección consiste únicamente de n enteros.

3. Sea $ABCD$ un rectángulo. Demuestre que si existen P y Q puntos sobre los lados $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente tales que $\measuredangle CPB = \measuredangle BPQ$ y $\measuredangle PQB = \measuredangle BQA$, entonces $ABCD$ es un cuadrado.

4. Demuestre que para la función $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \csc(x)$ no existe valor real x tal que $0 < f(x) < 2$.

5. Encuentre todas las parejas de primos p, q tales que $p+q$ y $p+9q$ son cuadrados perfectos.

6. En la siguiente $ABCD$ y $AEFG$ son cuadrados de lado l y $\dfrac{l}{3}$ respectivamente. Si la circunferencia tiene centro en O, pasa por F y es tangente a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, halle el valor de r.



3.3.3. Solución

1. Sea n un entero menor o igual que 1006 y considere los siguientes subconjuntos de A_n :

$$P_1 = \{n, n+2, 2n+2\} \quad \text{y} \quad P_2 = A_n - \{n, n+2, 2n+2\}\,.$$

Note que estos conjuntos forman una partición de A_n. Además, en P_2 están los números $n+1$, $n+3$ y $2n+4$ (ya que $n \leq 1006$), los cuales verifican que $(n+1)+(n+3) = 2n+4$ y en P_1 tenemos que $n+(n+2) = 2n+2$. Por lo tanto, para todo entero entre 1 y 1006 existe una partición de A_n que cumple las condiciones del enunciado.

Por otra parte, observe que las únicas maneras de obtener un número menor o igual que 2016 como suma de dos números mayores o iguales que 1007 son:

$$\begin{aligned} 1007 + 1008 &= 2015, \\ 1007 + 1009 &= 2016. \end{aligned}$$

Esto muestra que para $n \geq 1007$, no existe una partición que cumpla las condiciones del enunciado (¿por qué?)

2. Sea S el conjunto de los números enteros positivos menores o iguales que $2n$, es decir, $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$. Vamos a probar que si han sido escogidos $n+1$ elementos de S, entonces dos de ellos deben ser consecutivos. Con esto, habremos solucionado el problema ya que dos enteros consecutivos son siempre primos relativos (¿por qué?). Para tal fin usaremos el Principio de las Casillas.

Denote por $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$ los $n+1$ elementos escogidos del conjunto S ordenados de menor a mayor. Consideremos las n casillas

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}.$$

Queremos ver que dos de los a_i's están ambos en una misma casilla. En el mejor de los casos nos encontraremos que dentro los primeros n elementos se encuentra dicho par de elementos consecutivos, basta inspeccionarlos e ir descartándolos. Dicho de otro modo, que para algún subíndice j menor o igual que n, la casilla $\{a_j, a_{j+1}\}$ es alguna de las casillas descritas arriba. En el peor de los casos, los n primeros a_i's se encuentran cada uno en la casilla número i, respectivamente (observe que la casilla número i corresponde a los números $\{2i-1, 2i\}$) y el último de la lista que es a_{n+1} debe estar, por el principio de las casillas, compartiendo casilla con alguno de los n primeros a_i's. Esto es, que para algún subíndice k menor o igual que n se verifica que a_k y a_{n+1} son consecutivos.

Ahora bien, el hecho que esta afirmación pueda no ser válida si en lugar de $n+1$ elementos escogemos simplemente n, radica en que podemos considerar la colección de números pares

$$\{2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots, 2n\},$$

la cual consta de n elementos pero el 2 es un divisor común de cada elemento allí.

3. Como $ABCD$ es un rectángulo, basta probar que dos de sus lados adyacentes son congruentes. Sean $\alpha = \measuredangle CPB = \measuredangle BPQ$ y $\beta = \measuredangle PQB = \measuredangle BQA$. Aplicando el Teorema del seno a los triángulos PCB y BQA se obtiene respectivamente que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{BC} = \frac{\operatorname{sen} 90^\circ}{PB} \quad \text{y} \quad \frac{\operatorname{sen}\beta}{AB} = \frac{\operatorname{sen} 90^\circ}{QB},$$

de ahí que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{BC} = \frac{1}{PB} \quad \text{y} \quad \frac{\operatorname{sen}\beta}{AB} = \frac{1}{QB}.$$

Ahora, aplicando nuevamente el Teorema del seno al triángulo BQP se obtiene que

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{PB} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{QB}.$$

Luego de las igualdades anteriores se tiene que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{BC} = \frac{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha}{AB};$$

entonces $AB = BC$; por lo tanto, $ABCD$ es un cuadrado.

4. Se procederá por contradicción. Suponga que existe un valor x tal que $0 < f(x) < 2$. Note que

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) + \csc(x) = \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{sen}^2(x) + 1}{\operatorname{sen}(x)}.$$

Entonces,

$$0 < \frac{\operatorname{sen}^2(x) + 1}{\operatorname{sen}(x)} < 2. \tag{3.4}$$

Caso 1: Si $\operatorname{sen}(x) > 0$, la desiguadad (3.4) da

$$\begin{aligned} 0 <& \operatorname{sen}^2(x) + 1 < 2\operatorname{sen}(x), \\ -2\operatorname{sen}(x) <& \operatorname{sen}^2(x) - 2\operatorname{sen}(x) + 1 < 0, \\ -2\operatorname{sen}(x) <& (\operatorname{sen}(x) - 1)^2 < 0. \end{aligned}$$

Pero esto es absurdo, ya que $(\operatorname{sen}(x) - 1)^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Caso 2: Si $\operatorname{sen}(x) < 0$, la desiguadad (3.4) implica que $0 > \operatorname{sen}^2(x) + 1$ lo que también es absurdo.

Por tanto, no existe un valor x tal que $0 < f(x) < 2$.

5. Suponga que

$$p + q = b^2, \tag{3.5}$$

$$p + 9q = a^2, \tag{3.6}$$

con a y b enteros positivos. Entonces

$$8q = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b). \tag{3.7}$$

Por el Lema de Euclides[3], 2 divide a $(a-b)$ o a $(a+b)$; pero

- si 2 divide a $a+b=(a-b)+2b$, entonces 2 divide a $a-b$;
- si 2 divide a $a-b=(a+b)-2b$, entonces 2 también divide a $a+b$.

De lo anterior se tiene que $a-b$ y $a+b$ son pares.
Suponiendo que $q=2$, la expresión (3.7) resulta válida solo si $a=5$ y $b=3$, en tal caso las ecuaciones (3.5) y (3.6) dan que $p=7$ y $q=2$, ¡verifíquelo! Si $q\neq 2$, entonces q es impar y teniendo en cuenta que $a-b$ y $a+b$ son pares, por la expresión (3.7), basta considerar los siguientes casos:

Caso 1: Si $a-b=4$ y $a+b=2q$, entonces $a=b+4$ y de la expresión (3.6) se tiene que $q=b+2$. Además, de (3.5) se obtiene

$$p+q=p+b+2=b^2,$$
$$p=b^2-b-2=(b+1)(b-2).$$

Como p es primo, $b\in\{-2,0,1,3\}$ y en tales casos $p=-2$ o $p=4$, lo cual es absurdo.

Caso 2: Si $a-b=2$ y $a+b=4q$, entonces $a=b+2$ y por (3.6), $b=2q-1$; de donde se concluye que a y b son impares. Así, de (3.5) se deduce que p y q tienen diferente paridad. Luego, uno de ellos debe ser 2. El caso $q=2$ ya fue analizado. Suponga que $p=2$, dado que $b=2q-1$, entonces por (3.5),

$$2+q=(2q-1)^2=4q^2-4q+1,$$
$$0=4q^2-5q-1, \tag{3.8}$$

pero la ecuación (3.8) no tiene soluciones enteras.

Por lo tanto, para este caso tampoco hay soluciones.

Caso 3: Si $a-b=4q$ y $a+b=2$. De forma análoga al **Caso 2** se prueba que en estas condiciones tampoco hay soluciones.

[3] Si p es un número primo y m, n son enteros positivos tales que p divide a mn, entonces p divide a m o p divide a n.

Caso 4: Si $a - b = 2q$ y $a + b = 4$. Considere la siguiente tabla:

a	b	$a-b$	q
4	0	4	2
3	1	2	1
2	2	0	0
1	3	-2	-1
0	4	-4	-2

Se deduce que para este caso tampoco hay soluciones ¡convénzase!

De los casos estudiados, se concluye que solo la pareja 7, 2 satisface las condiciones del problema.

6. Sean H y K los puntos de tangencia de la circunferencia con los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, e I la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{HO}$ y $\overleftrightarrow{GF}$. Note que los triángulos CHO y FIO son semejantes (¿por qué?). De modo que

$$\frac{OC}{OH} = \frac{OF}{OI}.$$

Además, $OH = OF = r$, $OI = \dfrac{2l}{3} - r$ y por el Teorema de Pitágoras, $OC = \sqrt{2}r$, ya que $CHOK$ es un cuadrado. Luego,

$$\frac{\sqrt{2}r}{r} = \frac{r}{\frac{2l}{3} - r}.$$

Por lo tanto $r = \dfrac{2l\sqrt{2}}{3 + 3\sqrt{2}}$.

Bibliografía

[1] BROCHERO Fabio y RESTREPO Juan Ignacio. Un recorrido por la Teoría de Números. Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[2] JAIME Flor Elva. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Primaria 1990-1994. Universidad Antonio Nariño, 1995.

[3] MADROÑERO Javier y CONTRERAS Ivan Guillermo. Un recorrido por el Álgebra. Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[4] RESTREPO Pascual. Un recorrido por la Combinatoria I. Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

[5] ZULUAGA, Carlos. VIII Semana de la Licenciatura en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 2001.

Vicerrectoría Administrativa
Vicerrectoría de Investigación y Extensión

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

Diseño e Impresión: DIVISIÓN DE PUBLICACIONES UIS - TEL. 6344000, ext. 2196