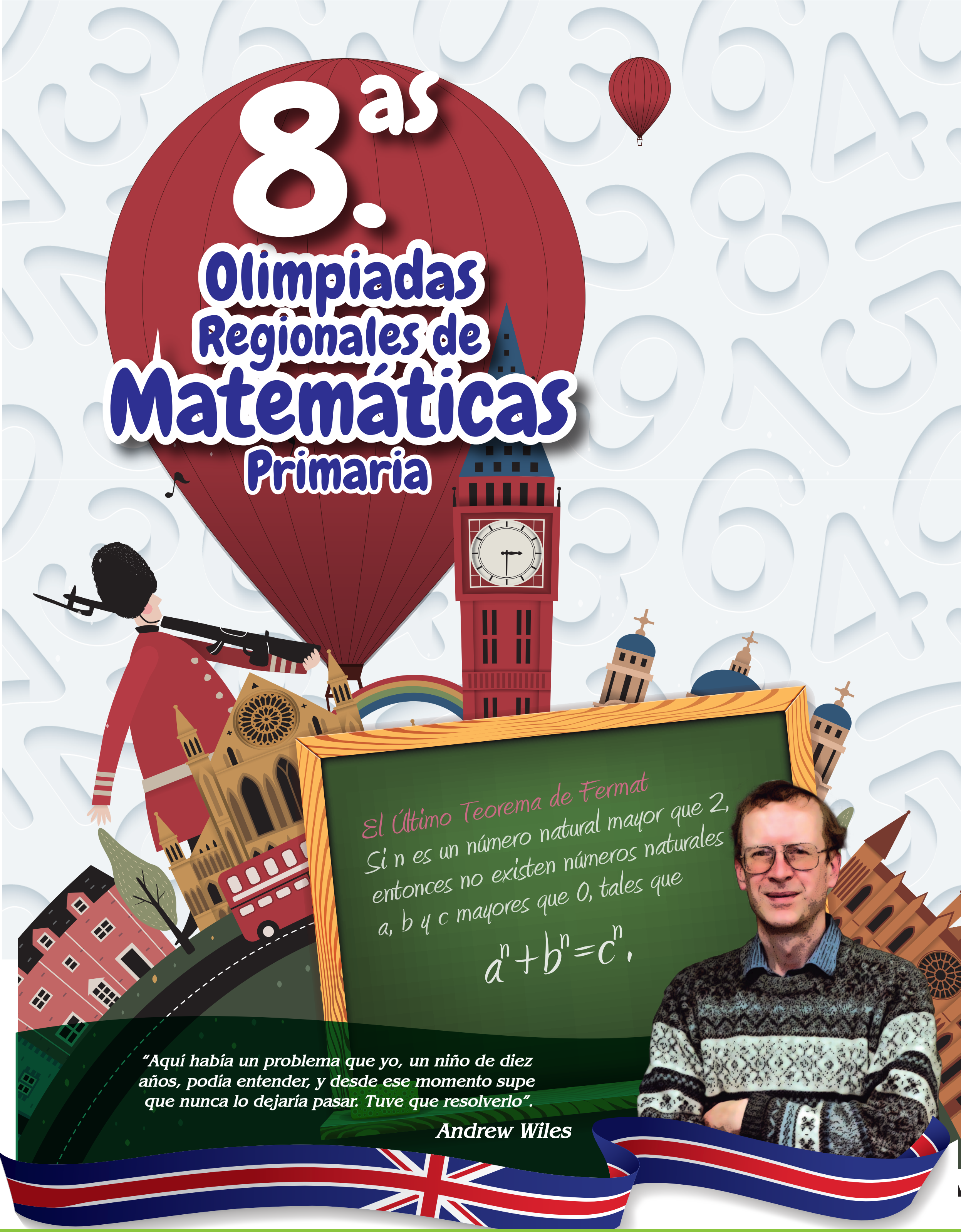


INFORMES
olimpiadas@matematicas.uis.edu.co
Tel.: 6450301, 6344000 Ext.: 2316, 2583, 2581
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

2019

Octavas Olimpiadas Regionales de Matemáticas Primaria

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga

2019

Elaboración y edición

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas - 2019.

Director

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Monitores

Cristhian Daniel Cáceres Garavito

Edson Jair Suárez Porras

Edwin David Valencia Oviedo

Gerson Leonel Barajas Ávila

Jenifer Tatiana Puentes Correa

Jesús Fernando Carreño Díaz

Johan Sebastián Cortés Villamizar

José Camilo Rueda Niño

Juan Camilo Cala Barón

Juan Camilo Camacho Parra

Leidy Marcela Angarita Celis

Mauricio Jafet Santos

Natalia Stefania Garzón Laguado

Nicolás Luna Chacón

Yzel Wlly Alay Gómez Espíndola

Introducción

> *“ (...) nuestra educación conformista y represiva parece concebida para que los niños se adapten por la fuerza a un país que no fue pensado para ellos, en lugar de poner el país al alcance de ellos para que lo transformen y engrandezcan. Semejante despropósito restringe la creatividad y la intuición congénitas, y contraría la imaginación, la clarividencia precoz y la sabiduría del corazón, hasta que los niños olviden lo que sin duda saben de nacimiento: que la realidad no termina donde dicen los textos, que su concepción del mundo es más acorde con la naturaleza que la de los adultos, y que la vida sería más larga y feliz si cada quien pudiera trabajar en lo que le gusta, y sólo en eso”*
>
> **Gabriel García Márquez** - Por un país al alcance de los niños.

La Universidad Industrial de Santander, como institución de educación superior del ámbito regional, forma ciudadanos como profesionales integrales, éticos, con sentido político e innovadores; apropia, utiliza, crea, transfiere y divulga el conocimiento por medio de la investigación, la innovación científica, tecnológica y social, la creación artística y la promoción de la cultura, buscando de este modo el fortalecimiento de una sociedad democrática, participativa, deliberativa y pluralista, con justicia y equidad social, comprometida con la preservación del medio ambiente y el buen vivir.

En el marco de esta misión institucional, la Escuela de Matemáticas ofrece a la sociedad santandereana y de la región de influencia de la Universidad, un escenario de alta calidad para el cultivo de las matemáticas, promoviendo entre los integrantes de la comunidad académica una actitud creativa y rigurosa, y construyendo un ambiente académico basado en la solidaridad, la empatía y el reconocimiento de los otros en su dignidad humana. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado, sino también por su participación activa y crucial en la formación de los estudiantes de otros programas de la Universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a los diversos retos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las habilidades matemáticas en el nororiente colombiano, la Escuela de Matemáticas ha diseñado y ejecutado desde el 2009, el proyecto Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (ORM-UIS), para secundaria y primaria, a través del fortalecimiento de las competencias matemáticas de los estudiantes y la capacitación simultánea de los profesores que orientan dichos procesos.

Las ORM-UIS abordan cinco (5) áreas, a saber: i) teoría de números; ii) combinatoria; iii) álgebra, iv) lógica, y v) geometría. Además, las ORM-UIS se desarrollan en cinco (5) fases, así:

- **Preparatoria:** En esta fase el proyecto realiza tres talleres gratuitos de capacitación, previos a la fase de clasificación y durante el período de inscripciones. Estos talleres se llevan a cabo en el campus principal de la UIS, Bucaramanga; las sedes regionales de la UIS (Barbosa, Barrancabermeja, Málaga y Socorro) y en la Universidad Francisco de Paula Santander, sede Ocaña, Norte de Santander.

- **Clasificatoria:** En esta etapa participan los estudiantes inscritos, quienes presentan la prueba en su institución educativa según el grado de escolaridad. La prueba consta de problemas de selección múltiple con única respuesta.

- **Selectiva:** En esta prueba participa el $10\,\%$ de los estudiantes inscritos que corresponda a los mejores puntajes de la prueba clasificatoria, quienes presentan la prueba en la sede regional correspondiente según el grado de escolaridad. La prueba consta de problemas de selección múltiple con única respuesta, y problemas tipo ensayo, en donde deben justificarse las respuestas.

- **Final:** A esta instancia sólo clasifican los estudiantes que obtengan en cada nivel los 20 mejores puntajes en la prueba selectiva. La prueba consta de problemas tipo ensayo. Además de la presentación de la prueba final y la ceremonia de clausura del certamen, los finalistas participan en actividades lúdicas organizadas por el Grupo de Investigación en Educación Matemática - EDUMAT.
- **Entrenamiento a estudiantes finalistas:** A estos estudiantes, se les ofrece una preparación especial con el ánimo que participen en otras competencias de matemáticas, a nivel nacional e internacional.

Por otra parte, las ORM-UIS se desarrollan en tres (3) niveles, según el grado de escolaridad de los participantes, tanto de la formación en básica primaria, como la media vocacional, del modo como se muestra en la siguiente tabla:

	Nivel Básico	Nivel Medio	Nivel Avanzado
Primaria	3	4	5
Secundaria	6 y 7	8 y 9	10 y 11

La cartilla que tiene en sus manos compendia los problemas matemáticos propuestos por el equipo de trabajo de las ORM-UIS en las distintas fases de la Octava versión del certamen, desarrollada durante el segundo semestre de 2019, dirigido a estudiantes de educación básica primaria. En esta oportunidad se contó con la participación de 78 colegios, para un total de 2877 estudiantes en competencia, provenientes de 30 municipios de los departamentos de Santander, Norte de Santander y Cesar.

En esta versión las ORM-UIS, como siempre lo hace con alguien en especial, destacó la trayectoria y el amor por las matemáticas del profesor británico Andrew Willes, ganador del Premio Abel en 2016, considerado el "Nobel de las Matemáticas", exactamente un referente, de carne y hueso, que nos invita a encontrar, detrás de un problema, la belleza de las matemáticas. Siendo un niño de apenas 10 años, por allá en 1963, leyendo un libro de matemáticas se encontró con un tesoro de nuestra ciencia, el famoso "último teorema de Fermat", y le dedicó 30 años de su vida a demostrarlo. Pierre de Fermat era raro, fue abogado y matemático, y planteó desde el siglo XVII varios teoremas, siendo una figura destacadísima de las matemáticas mundiales en su tiempo, junto a Descartes y Kepler. Dentro de los teoremas diseñados por Fermat, hubo uno que durante tres siglos retó a las mentalidades más ilustres de la ciencia, hasta que, en 1995, Andrew Wiles lo demostró, precisamente, "último teorema de Fermat". ¿Cuántas preguntas o problemas de las matemáticas están todavía pendientes de resolver y recrear? La niñez, además de una etapa maravillosa para aprender a amar y a ser amados, es también el momento crucial en el que planeamos nuestras más importantes aventuras, por eso, el equipo de las ORM-UIS los invita a incluir en sus sueños, a las matemáticas, y a dedicarle a ellas su vida, las cuales no solamente nos permiten ampliar los límites de nuestro conocimiento, sino, también, lograr ser mejores ciudadanos, y, por lo tanto, mejores seres humanos.

Este documento consta de tres (3) capítulos, cada uno correspondiente a un nivel de la competencia: nivel básico, nivel medio y nivel avanzado. En cada uno de ellos el lector encontrará los problemas y la correspondiente solución, de las distintas soluciones que puede tener cada uno. Por esa razón, el equipo de trabajo de las ORM-UIS recomienda e incentiva a quien desee enfrentar nuevamente estos problemas, a descubrir y proponer, métodos alternativos de solución que se destaquen por su sencillez, ingenio y belleza matemática.

La Escuela de Matemáticas, a través del Grupo de Investigación en Educación Matemática de la UIS (EDUMAT), reconoce la labor esencial del maestro en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las competencias matemáticas de los estudiantes, y por ello elabora esta cartilla para su utilización en el aula de clase, que incluye, también, la preparación y discusión creativa entre pares en los espacios de formación docente. Esperamos que los participantes de la educación básica primaria, los profesores, y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, disfrute tanto como nosotros lo hicimos, el hermoso y milenario ejercicio del pensamiento matemático.

Las ORM-UIS no son una mera competencia, implican una puesta en escena colectiva para que los niños, niñas y adolescentes desplieguen sus capacidades, fortalezcan sus habilidades y se reconozcan como sujetos capaces de enfrentar problemas y solucionarlos. Esto psicológicamente fomenta la autopercepción como sujetos con comprensión de su entorno, y esa es la exigencia que hace hoy la humanidad. Creemos firmemente que allí debemos dirigir todos nuestros esfuerzos, al fortalecimiento de ciudadanías que, gracias al pensamiento crítico que se desarrolla desde el ejercicio matemático, puedan enfrentarse a la diversidad de problemáticas que enfrenta la sociedad actual y que requieren de una mirada no solo crítica, sino, además, creativa para ser solucionadas.

El proyecto ORM-UIS agradece y destaca al grupo de estudiantes participantes de Santander, Norte de Santander y Cesar, que participaron de esta versión, y que han demostrado ser capaces de asumir el reto de pensar y sentir problemas sencillos y bellos de matemáticas, con pasión y con rigor.

Índice general

Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

1.1.1. Prueba Clasificatoria: 28 de agosto

1. El número de juguetes de Sofía excede en 1 al número de juguetes de Enrique, si Sofía le cede un juguete a Enrique, entonces

(a) Sofía y Enrique quedan con igual número de juguetes.

(b) Enrique queda con un juguete más que Sofía.

(c) Sofía queda con más juguetes que Enrique.

(d) Enrique queda con dos juguetes más que Sofía.

2. Los abuelos de Federico quieren cercar su jardín con 3 vueltas de alambre. Si el jardín tiene forma de rectángulo, uno de sus lados mide 5 metros y el otro mide el doble, ¿cuántos metros de alambre necesitan los abuelos de Federico para cercar su jardín?

(a) 90 (b) 15 (c) 30 (d) 45

3. Camilo tiene cuatro tarjetas como las que se muestran a continuación:

$$\boxed{\underline{2}}\quad\boxed{\underline{0}}\quad\boxed{\underline{1}}\quad\boxed{\underline{9}}$$

¿Cómo debe reorganizar Camilo sus tarjetas para obtener el menor número de cuatro cifras posible?

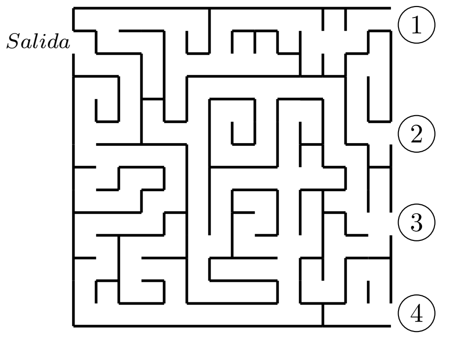
(*a*) $\boxed{\underline{0}}\ \boxed{\underline{1}}\ \boxed{\underline{2}}\ \boxed{\underline{9}}$ (*c*) $\boxed{\underline{9}}\ \boxed{\underline{2}}\ \boxed{\underline{1}}\ \boxed{\underline{0}}$

(*b*) $\boxed{\underline{1}}\ \boxed{\underline{2}}\ \boxed{\underline{9}}\ \boxed{\underline{0}}$ (*d*) $\boxed{\underline{1}}\ \boxed{\underline{0}}\ \boxed{\underline{2}}\ \boxed{\underline{9}}$

4. ¿De cuántas formas se pueden comprar dos panes diferentes en una panadería que vende 4 tipos de panes?

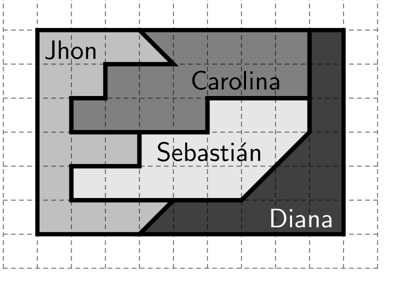
(*a*) 6 (*b*) 8 (*c*) 4 (*d*) 10

5. Enrique debe atravesar un laberinto como el que se muestra en la siguiente figura. El laberinto tiene cuatro entradas, enumeradas de ① a ④ y una salida. ¿Cuál entrada debe escoger Enrique, si desea salir del laberinto?



(*a*) ① (*b*) ② (*c*) ③ (*d*) ④

6. El padre de Jhon, Diana, Sebastián y Carolina; dividió su finca en cuatro lotes de terreno, uno para cada uno de sus hijos. La siguiente figura es un mapa de la finca, dibujado sobre una cuadrícula, que muestra el lote asignado a cada hijo.



¿A quién le correspondió el lote con más terreno?

(*a*) Jhon (*b*) Sebastián (*c*) Diana (*d*) Carolina

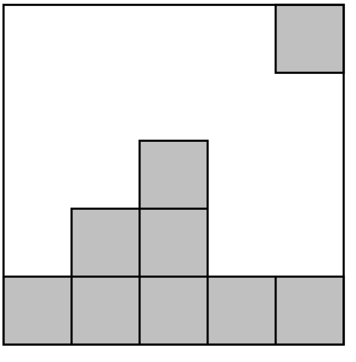
7. Andrés pidió un juguete para su cumpleaños y como ha cumplido con todos sus deberes, sus padres lo quieren complacer. El juguete cuesta $\$20.000$, pero los padres no cuentan con todo el dinero para comprarlo. Si apenas tienen $\$4.000$ y pueden ahorrar $\$800$ semanales, ¿en cuántas semanas habrán conseguido el dinero para comprar el juguete de su hijo?

(a) 25 (b) 20 (c) 10 (d) 5

8. Samuel le pregunta a Paula cuál es su edad, y ella le dice que es alguno de los siguientes números: 14, 16, 17, o 19. Además le dice que su edad coincide con la suma de las edades de sus hermanos que son menores de 10 años y que la edad de uno de sus hermanos es par y la del otro es impar. ¿Cuál es la edad de Paula?

(a) 14 (b) 16 (c) 17 (d) 19

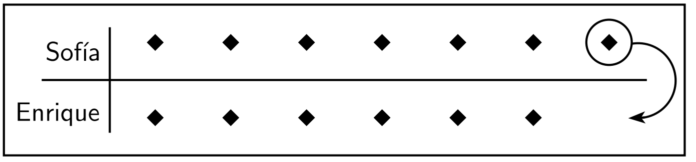
9. Sobre el piso de una piscina que tiene base cuadrada se han puesto algunas tabletas cuadradas de igual tamaño, como se muestra en la figura. ¿Cuántas tabletas hacen falta para cubrir completamente el piso de la piscina?

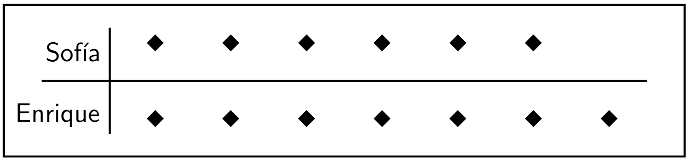


(a) 9 (b) 17 (c) 11 (d) 16

1.1.2. Solución

1. Si Sofía tiene un caramelo más que Enrique, entonces al restar un caramelo a Sofía, ambos quedan con la misma cantidad, pero si este caramelo que se le resta a Sofía, se le cede a Enrique, entonces Enrique queda con un caramelo más que Sofía, como se muestra en la siguiente ilustración:





2. Como el jardín de los abuelos de Federico es rectangular, uno de sus lados mide $5\,m$ y otro mide $10\,m$, entonces su perímetro es

$$5\,m + 5\,m + 10\,m + 10\,m = 30\,m.$$

De modo que para cercar el jardín con tres vueltas de alambre, se necesitan $3 \times 30 = 90$ metros de alambre.

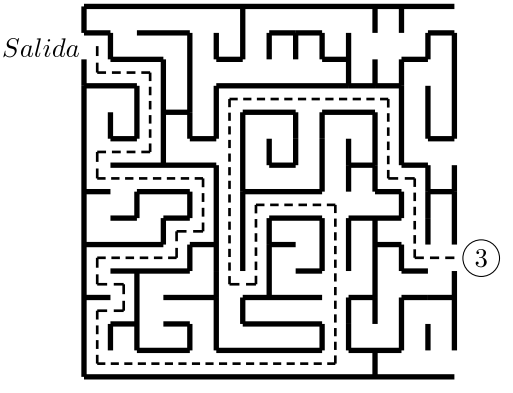
3. Para obtener el menor número de cuatro cifras posible con estas tarjetas, Camilo debe ubicar en la cifra de las unidades de mil el menor dígito posible, es decir, el 1. Note el 0 no puede ir en la cifra de las unidades de mil, ya que si inicia con 0, el número no sería de cuatro cifras. En seguida, debe ubicar en la posición de las centenas, la tarjeta, de las que le quedan, con el menor dígito posible, este es el 0. Luego, en la posición de las decenas debe ubicar el 2 y finalmente, para la posición de las unidades le queda la tarjeta con el dígito 9. Esto se ilustra a continuación:

$$\boxed{\underline{1}} \quad \boxed{\underline{0}} \quad \boxed{\underline{2}} \quad \boxed{\underline{9}}$$

4. En la siguiente tabla se muestran las 6 posibles opciones de comprar dos panes diferentes en la panadería que ofrece 4 tipos de panes:

	Opción 1	Opción 2	Opción 3	Opción 4	Opción 5	Opción 6
Tipo 1	1	1	1			
Tipo 2	1			1	1	
Tipo 3		1		1		1
Tipo 4			1		1	1

5. Si Enrique desea salir del laberinto, debe entrar por la puerta 3 como se muestra en la siguiente figura, ya que por las demás es imposible llegar a la salida.



6. Observe que el área del lote de Jhon, equivale al área de 14 cuadraditos de la cuadrícula; el de Carolina, a 14 cuadraditos más medio; el de Sebastián, a 13 cuadraditos; y el de Diana, a 12 cuadraditos más medio. Por lo tanto, a Carolina le correspondió el lote con más terreno.

7. Como el juguete cuesta $\$20.000$ y apenas tienen $\$4.000$, aún les falta $\$16.000$, pero cada semana pueden ahorrar $\$800$, entonces en 20 semanas los padres de Andrés habrán conseguido todo el dinero para comprar el juguete de su hijo, ya que $20 \times 800 = 16.000$.

8. Teniendo en cuenta que la suma de un número par con uno impar siempre es impar, y que las edades de los dos hermanos de Paula son menores de 10 años, entonces la edad de Paula debe ser un número impar, menor o igual que 18. De los números que da Paula a Samuel, el único que cumple estas condiciones es el 17, así que esta debe ser su edad.

9. Dado que la base de la piscina es cuadrada y uno de sus lados se cubre con exactamente 5 tabletas cuadradas e iguales, entonces, toda la base se cubre con exactamente $5 \times 5 = 25$ tabletas. Pero ya se han puesto 9 tabletas, según indica la figura, así que hacen falta $25 - 9 = 16$ tabletas para cubrir completamente el piso.

1.2. Prueba Selectiva

1.2.1. Prueba Selectiva: 20 de septiembre

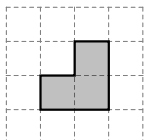
1. A una planta le nacen 2 hojitas cada día, pero se le caen 4 cada semana. ¿En cuántas semanas la planta tendrá 120 hojitas?

(a) 9 (b) 10 (c) 12 (d) 20

2. ¿Cuál es la suma de las cifras del mayor número natural de 3 cifras diferentes, tal que la suma de sus cifras es impar, pero el producto es un número par?

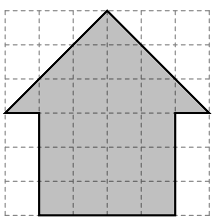
(a) 23 (b) 24 (c) 25 (d) 27

3. Diego juega a formar figuras con fichas como las que se muestran a continuación

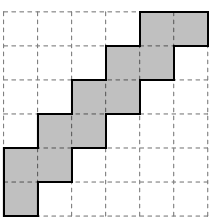


Si las fichas pueden rotarse pero no sobreponerse ni partirse, ¿cuál de las siguientes figuras puede formar Diego con sus fichas?

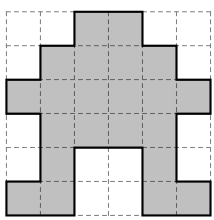
(a)



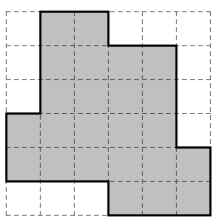
(b)



(c)



(d)

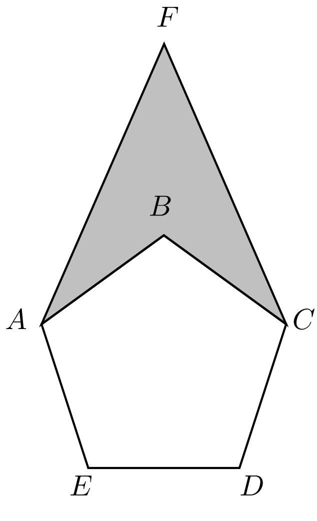


PROBLEMAS TIPO ENSAYO

4. La maestra de matemáticas escribió tres números naturales consecutivos en el tablero. Lucía sumó estos tres números y Samuel, los multiplcó. Si el resultado de Lucía fue 24, ¿cuál fue el resultado de Samuel?

5. Los cinco hijos de doña Paulina tienen diferentes edades. ¿De cuántas maneras se pueden formar tres de sus hijos en una fila de menor a mayor?

6. En la siguiente figura el segmento $\overline{AF}$ mide lo mismo que el segmento $\overline{FC}$, pero el doble del segmento $\overline{AB}$. Si el perímetro del región sombreada es $12\,cm$, ¿cuál es el perímetro del pentágono regular $ABCDE$?

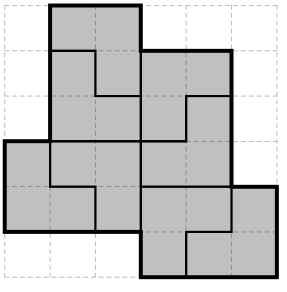


1.2.2. Solución

1. A la planta le nacen 2 hojitas cada día, entonces en una semana, que tiene 7 días, le nacen $7 \times 2 = 14$ hojitas; pero cada semana también se le caen 4, de modo que semanalmente la planta aumenta 10 hojitas en total. Así, para que la planta tenga 120 hojitas deben pasar 12 semanas, pues $12 \times 10 = 120$.

2. Como el número es de tres cifras, la suma de ellas es impar y el producto impar, entonces dos de las cifras deben ser pares y una impar. Para conseguir el mayor número con estas condiciones, seleccionamos el mayor dígito posible para la cifras de las centenas, es decir el 9, en seguida ubicamos el 8 en la cifra de las decenas, y finalmente, el 6 en la cifra de las unidades, formando así el número 986, cuya suma de sus cifras es $9 + 8 + 6 = 23$.

3. De las figuras que se muestran en las opciones, la única que puede formar Diego con sus fichas es la de la opción (d), por ejemplo, así:



Note que la opción (a) se descarta, pues en las esquinas del techo de la casita hay medios cuadraditos y las fichas no se pueden partir. Las figuras de las opciones (b) y (c) también se descartan, pues ellas cubren un área de 11 y 22 cuadraditos de la cuadrícula, respectivamente; pero cada una de las fichas cubre exactamente el área de 3 cuadraditos, así que todas las figuras que se formen con estas fichas deben cubir un área equivalente a la que cubre un múltiplo de 3 cudraditos de la cuadrícula.

4. Los tres números naturales que escribió la maestra son consecutivos, es decir "están juntos", y además la suma de ellos es 24. Entonces, haciendo $24 \div 3 = 8$, vemos que los números son: 7, 8, y 9. Por lo tanto, el resultado que obtiene Samuel es $7 \times 8 \times 9 = 504$.

5. Supongamos que los hijos de doña Paulina son ①, ②, ③, ④, ⑤ en el respectivo orden de menor a mayor. Entonces las posibles maneras de formar a tres de ellos en una fila, de menor a mayor, son 10 en total, a saber:

   - ① - ② - ③,
   - ① - ② - ④,
   - ① - ② - ⑤,
   - ① - ③ - ④,
   - ① - ③ - ⑤,
   - ① - ④ - ⑤,
   - ② - ③ - ④,
   - ② - ③ - ⑤,
   - ② - ④ - ⑤,
   - ③ - ④ - ⑤.

6. Como el pentágono $ABCDE$ es regular, entonces todos sus lados miden lo mismo, en particular $AB = BC$; además, $AF = FC$ y el perímetro de la región sombreada es $12\,cm$, luego $AF + AB = 6\,cm$. Pero $\overline{AF}$ mide el doble de $\overline{AB}$, entonces $AF = 4\,cm$ y $AB = 2\,cm$. Por lo tanto, el perímetro del pentágono regular es $5 \times 2\,cm = 10\,cm$.

1.3. Prueba Final

1.3.1. Resultados

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la octava versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Primaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 977 participantes del certamen en el nivel Básico, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

CUADRO DE HONOR

1^{er} Puesto, medalla de oro

Elbert Alejandro Dueñas Almeida

Colegio Jorge Ardila Duarte, Bucaramanga.

2^{o} Puesto, medalla de plata

Daniel Arturo Calvete Álvarez

Fundación Colegio UIS, Floridablanca.

3^{er} Puesto, medalla de bronce

Tomás Téllez Rueda

Colegio Bilingüe Divino Niño, Bucaramanga

4^{o} Puesto

José Miguel Caro López

Colegio Santa Isabel de Hungría, Floridablanca.

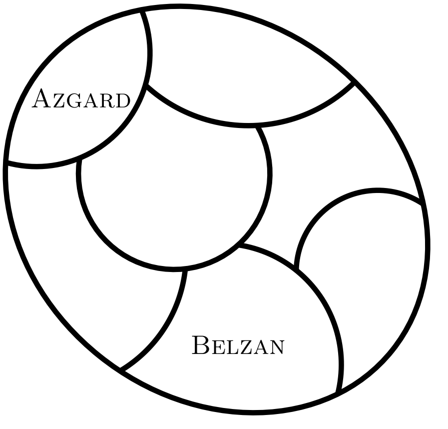
5^{o} Puesto

Santiago Martínez Beltrán

Colegio Jorge Ardila Duarte, Bucaramanga.

1.3.2. Prueba Final: 19 de octubre

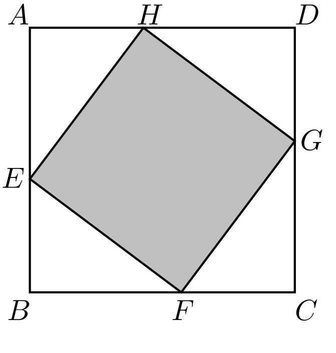
1. El país Narand tiene 7 departamentos: Azgard, Belzan, Caraujo, Dalaran, Emanapa, Fugoran y Guijal. Un profesor quería saber cómo estaban ubicados estos departamentos, así que los buscó en un mapa, pero este tenía borrados los nombres de algunos de ellos, como se muestra en la figura. Sin embargo, el profesor recordaba los siguientes datos de su clase de geografía:



- Caraujo tiene frontera con Belzan pero no con Azgard.
- Dalaran tiene frontera con Azgard y con Belzan.
- Guijal tiene frontera con menos departamentos que los que tiene Emanapa y que los que tiene Caraujo.
- Fugoran tiene frontera con más departamentos que los que tiene Belzan.

Por favor, ayude al profesor a completar el mapa con los nombres que faltan.

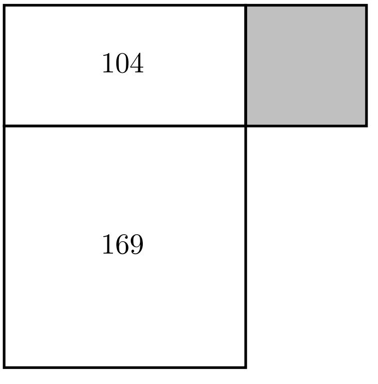
2. Halle el perímetro del cuadrilátero $EHGF$, sabiendo que $ABCD$ es un cuadrado de lado $7\,cm$, y que los segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ y $\overline{DH}$ miden $4\,cm$ cada uno.



3. Llamaremos manos a las 8 extremidades de un pulpo. ¿De cuántas formas se pueden dar las manos dos pulpos, si entre ellos no quedan manos libres y demás un pulpo no se da la mano a sí mismo?

4. Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado **II** depende de la respuesta del enunciado **I** y el enunciado **III**, de la respuesta del enunciado **II**. En la hoja de respuestas, escriba el procedimiento y la respuesta de cada enunciado en los recuadros correspondientes.

I. La siguiente figura está formada por tres rectángulos, dos de ellos cuadrados, cuyas dimensiones, en centímetros, son números naturales. Si el número que aparece en dos de las figuras representa el área, en centímetros cuadrados, de cada una de ellas, ¿cuál es el área del cuadrado sombreado?

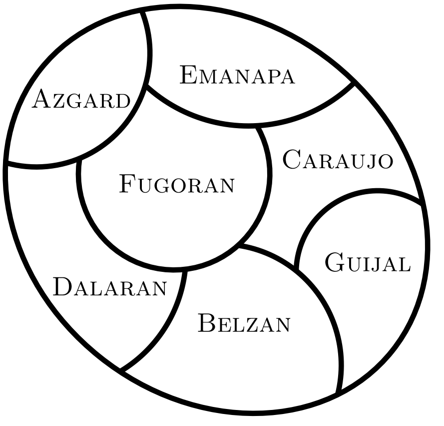


II. La suma de dos números primos es igual a una cuarta parte del número encontrado en el item anterior, y su diferencia excede en 1 a uno de ellos. ¿Cuáles son estos dos números?

III. La cantidad promedio, en años, que dura una botella de plástico en descomponerse, coincide con diez veces el producto de la pareja de números encontrada en el item **II**. Siendo así, ¿en qué año se espera que se descompongan las botellas fabricadas en el 2019?

1.3.3. Solución

1. Teniendo en cuenta las pistas dadas en el problema, se puede completar el mapa de la siguiente forma:



2. Como el lado del cuadrado $ABCD$ mide $7\,cm$, entonces su área es $49\,cm^2$. Además, $AE = DH = 4\,cm$, luego $AH = 3\,cm$ y así el área del triángulo EAH es
$$\frac{3\,cm \times 4\,cm}{2} = 6\,cm^2.$$
Note que cada uno de los triángulos EAH, HDG, GCF y FBE tiene la misma área, por lo tanto el área del cuadrado sombreado es
$$49\,cm^2 - \left(4 \times 6\,cm^2\right) = 25\,cm^2.$$
De modo que cada uno de los lados del cuadrado $EHGF$ mide $5\,cm$ y por lo tanto su perímetro es $4 \times 5\,cm = 20\,cm$.

3. Dejando fijas las manos del pulpo A, contaremos de cuántas formas podemos unirlas con las del pulpo B. Veamos: inicialmente, la mano 1 del pulpo A, la podemos unir con cualquiera de las 8 manos del pulpo B; ahora, la mano 2 del pulpo A, solo se puede unir con 7 de las manos del pulpo B, pues ya se unió una mano del pulpo B con la primera mano del pulpo A. Análogamente, tenemos que la mano 3 del pulpo A se

puede unir a 6 de las manos del pulpo B, y así sucesivamente hasta que la mano (8) del pulpo A se puede unir a solo 1 de las manos del pulpo B, precisamente, la última que queda libre.

Manos del pulpo A	Opciones
(1)	8
(2)	7
(3)	6
(4)	5
(5)	4
(6)	3
(7)	2
(8)	1

Con lo anterior, por el principio multiplicativo, tenemos que en total los dos pulpos se pueden dar las manos de $8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 40.320$ formas diferentes.

4. **I.** Note que $169 = 13\times13$ y $104 = 13\times8$, luego el lado del cuadrado sombreado mide $8\,cm$ y por lo tanto su área es $64\,cm^2$.

   II. La cuarta parte de 64 es 16. Además, las únicas parejas de primos que suman 16 son: $\{3, 13\}$ y $\{5, 11\}$, pero como la diferencia entre ellos debe exceder en 1 a uno de ellos, entonces la única pareja de primos que cumple todas las condiciones es 5 y 11.

   III. El producto de la pareja de números encontrada en el item anterior es $5 \times 11 = 55$, luego la cantidad promedio en años que dura una botella plástica en descomponerse es $10\times55 = 550$. Así, se espera que las botellas fabricadas en el 2019 se descompongan en el año $2019 + 550 = 2569$.

Capítulo 2

Nivel Medio

2.1. Prueba Clasificatoria

2.1.1. Prueba Clasificatoria: 28 de agosto

1. Cuatro hermanas: María, Viviana, Lina y Silvia nacieron en años diferentes: 2007, 2009, 2011 y 2013; no necesariamente en ese orden. Si se sabe que la menor no es María ni Silvia, y que María es 4 años menor que Lina, ¿en que año nació Viviana?

(a) 2007 (b) 2009 (c) 2011 (d) 2013

2. La tarea de Carolina consiste en bordear con lana tres figuras geométricas: un triángulo equilátero cuyo lado mide $3\,cm$, un cuadrado de lado $4\,cm$, y un pentágono regular con $5\,cm$ de lado. ¿Cuántos centímetros de lana necesita Carolina para realizar su tarea?

(a) 50 (b) 12 (c) 60 (d) 24

3. El libro de cuentos de Juan tiene 99 páginas enumeradas del 1 al 99. Si cada cuento inicia en una página múltiplo de 5, ¿cuál es el máximo número de cuentos que puede tener el libro?

(a) 20 (b) 19 (c) 18 (d) 21

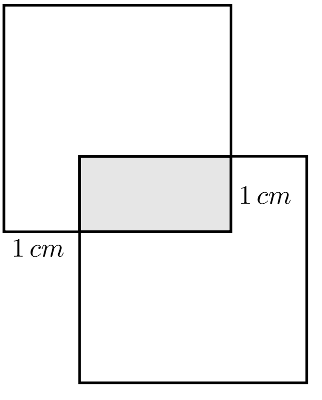
4. La edad de Daniel es el doble de la edad de Karen. ¿Cuál de los siguientes números NO puede ser la suma de las edades de Daniel y Karen?

(a) 15 (b) 12 (c) 20 (d) 18

5. En la cafetería de un colegio venden jugos de mango, fresa, uva y naranja. Si cada jugo se puede pedir en tres tamaños diferentes: grande, mediano o pequeño, ¿cuántas opciones tienen los estudiantes para pedir un jugo?

(a) 7 (b) 12 (c) 6 (d) 24

6. Dos hojas cuadradas iguales se sobreponen en un rectángulo como se muestra en la siguiente figura. Si el lado de cada hoja mide $3\,cm$, ¿cuál es el área del rectángulo sombreado?



(a) $2\,cm^2$ (b) $4\,cm^2$ (c) $3\,cm^2$ (d) $1\,cm^2$

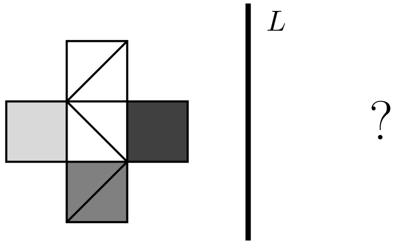
7. El número total de inscritos en una competencia de ciclismo es mayor que 100 pero menor que 1000, y el producto de sus cifras es 21; ¿cuál es la suma de sus cifras?

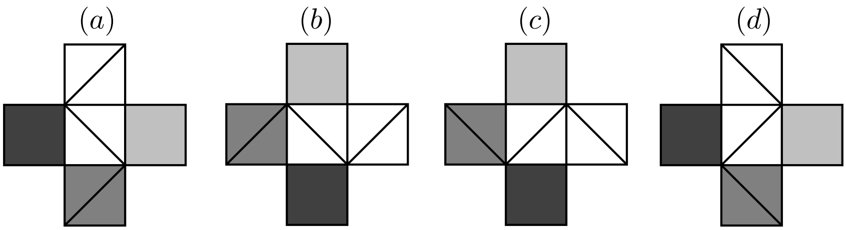
(a) 11 (b) 10 (c) 3 (d) 4

8. El número favorito de Alejandra es el menor número natural mayor que 0 que es divisible por 2, 3, 4, 5 y 6. ¿Cuál es este número?

(a) 30 (b) 120 (c) 60 (d) 720

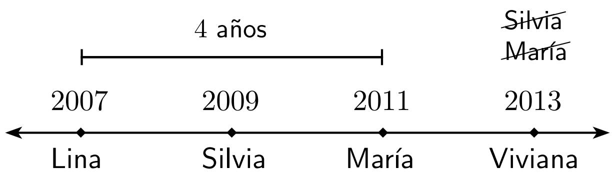
9. ¿Cuál es la reflexión de la siguiente figura, respecto a la recta L?





2.1.2. Solución

1. Como la menor de las cuatro hermanas no es María ni Silvia, entonces ellas no nacieron en el 2013. Además, María es 4 años menor que Lina, luego Lina nació en el 2017 y María en el 2011. Finalmente, se concluye que Silvia nació en el 2009, y por lo tanto Viviana nació en el 2013.



2. El perímetro de un triángulo equilátero cuyo lado mide $3\,cm$ es $3\times 3\,cm = 9\,cm$; el perímetro de un cuadrado con $4\,cm$ de lado es $4\times 4\,cm = 16\,cm$, y el perímetro de un pentágono regular con $5\,cm$ de lado es $5\times 5\,cm = 25\,cm$. Por lo tanto, Carolina necesita $9\,cm + 16\,cm + 25\,cm = 50\,cm$ de lana para realizar su tarea.

3. Solución 1. Se trata de contar cuántos múltiplos de 5 hay entre 1 y 99; estos son 19 en total, a saber: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95.

Solución 2. Note que los múltiplos de 5 aparecen cada cinco números naturales, así, dividiendo 99 entre 5 obtenemos 19 de cociente y 4 de residuo, lo cual establece que del 1 al 99, hay 19 múltiplos de 5 y sobran 4 números que corresponden desde el 95 hasta el 99. Por lo tanto, el máximo número de cuentos que puede tener el libro es 19.

4. Como la edad de Daniel es el doble de la edad de Karen, al sumar estas edades obtenemos 3 veces la edad de Karen, por lo tanto esta suma debe ser un múltiplo de 3, y de las opciones de respuesta, 20 es el único número que NO es múltiplo de 3.

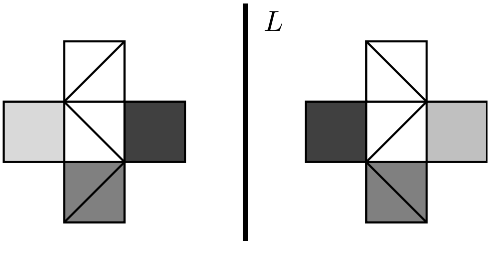
5. Cada uno de los 4 sabores de jugo se puede pedir en 3 tamaños diferentes, por lo tanto hay $4\times 3 = 12$ formas diferentes de pedir un jugo.

6. Observe que un lado del rectángulo sombreado mide $1\,cm$ y otro mide $3\,cm - 1\,cm = 2\,cm$, por lo tanto su área es $2\,cm \times 1\,cm = 2\ cm^2$.

7. Note que el número de inscritos a la competencia tiene tres cifras y además 21 se puede expresar como producto de tres dígitos de una única forma (salvo el orden de los factores): $21 = 1 \times 3 \times 7$. Por lo tanto, las cifras del número de inscritos son 1, 3 y 7, en algún orden. Así, la suma de las cifras de este número es $1 + 3 + 7 = 11$.

8. El número favorito de Alejandra es el mínimo común múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6, es decir el 60.

9. La reflexión de la figura dada respecto a la recta L, es la que se muestra a continuación:



2.2. Prueba Selectiva

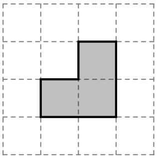
2.2.1. Prueba Selectiva: 20 de septiembre

1. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7} \times \frac{7}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10}$$

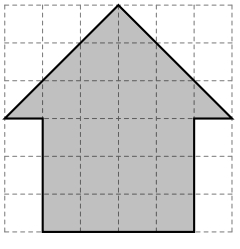
(a) 10 $\quad(b)$ $\frac{1}{10}$ $\quad(c)$ $\frac{9}{2}$ $\quad(d)$ $\frac{9}{10}$

2. Diego juega a formar figuras con fichas como las que se muestran a continuación

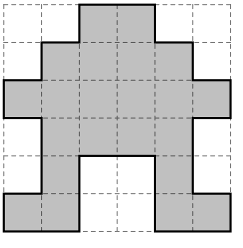


Si las fichas pueden rotarse pero no sobreponerse ni partirse, ¿cuál de las siguientes figuras puede formar Diego con sus fichas?

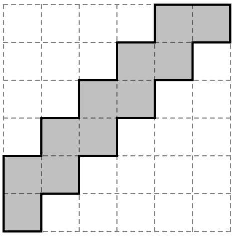
(a)



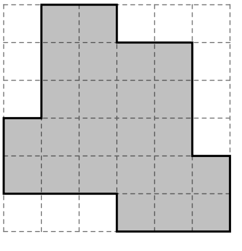
(c)



(b)



(d)



3. Camilo escribe los números primos menores que 30, cada uno en una tarjeta y Sara, hace lo mismo con los múltiplos de 3 mayores que 0 y menores o iguales que 30. Es correcto afirmar que

   (a) Camilo tiene más tajetas que Sara.

   (b) Sara tiene más tajetas que Camilo.

   (c) Sara y Camilo tienen el mismo número de tarjetas.

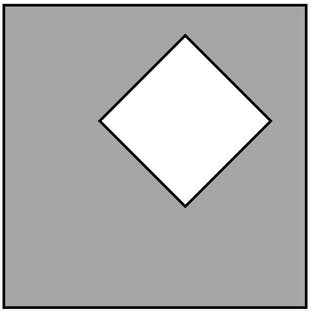
   (d) Sara y Camilo tienen más de una tarjeta en común.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

4. En un campeonato de fútbol cada equipo obtiene 3 puntos cada vez que gana un partido, 1 punto cada vez que empata y, 0 puntos cada vez que pierde. Al final del campeonato, el equipo ORM-UIS obtuvo un total de 32 puntos. Si se sabe que perdió 2 partidos y el número de partidos que ganó es igual al número de partidos que empató, ¿cuántos partidos jugó el equipo ORM-UIS?

5. La colección de soldaditos de plomo de David tiene entre 50 y 100 soldaditos. En el desancaso, jugando con sus compañeros, David los forma en filas de 5 y no sobran soldaditos, luego su mejor amigo los forma en filas de 7 y le sobran 3. ¿Cuántos soldaditos tiene David?

6. En la siguiente figura se muestran dos cuadrados. Si un lado del cuadrado más grande mide $5\,cm$ y el área sombreada es $21\,cm^2$, ¿cuál es el perímetro del cuadrado pequeño?

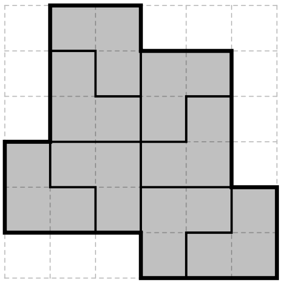


2.2.2. Solución

1. Simplificando la expresión, obtenemos

$$\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{6}} \times \frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{\cancel{8}} \times \frac{\cancel{8}}{\cancel{9}} \times \frac{\cancel{9}}{10} = \frac{1}{10}.$$

2. De las figuras que se muestran en las opciones, la única que puede formar Diego con sus fichas es la de la opción (d), por ejemplo, así:



Note que la opción (a) se descarta, pues en las esquinas del techo de la casita hay medios cuadraditos y las fichas no se pueden partir. Las figuras de las opciones (b) y (c) también se descartan, pues ellas cubren un área de 11 y 22 cuadraditos de la cuadrícula, respectivamente; pero cada una de las fichas cubre exactamente el área de 3 cuadraditos, así que todas las figuras que se formen con estas fichas deben cubir un área equivalente a la que cubre un múltiplo de 3 cudraditos de la cuadrícula.

3. Las tarjetas de Camilo y Sara tienen los siguientes números:

Camilo	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
Sara	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

Por lo tanto, ambos tienen el mismo número de tarjetas.

4. Cada vez que el equipo ORM-UIS gana un partido y empata otro, suma 4 puntos. Note que el equipo obtuvo en total $8 \times 4 = 32$ puntos, por lo tanto el número de partidos ganados fue 8 y el número de partidos empatados también fue 8. Como además perdió 2 partidos, entonces el equipo jugó $8 + 8 + 2 = 18$ partidos en total.

5. Como David forma los soldaditos en filas de 5 y no sobran soldaditos, entonces la cantidad de soldaditos es un múltiplo de 5 entre 50 y 100, los cuales son: 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95 y 100. Además, su mejor amigo los forma en filas de 7 y le sobran 3, luego el número de soldaditos excede en 3 a un múltiplo de 7. Por lo tanto, David tiene 80 soldaditos de plomo, pues este es el único número de la lista anterior que cumple la última condición: $77 + 3 = 80$.

6. Dado que el lado del cuadrado más grande mide $5\,cm$, su área es $25\,cm^2$. Además, el área sombreada es $21\,cm^2$, de modo que el área del cuadrado pequeño es $25\,cm^2 - 21\,cm^2 = 4\,cm^2$. Así, cada lado de este cuadrado mide $2\,cm$ y por lo tanto su perímetro es $8\,cm$.

2.3. Prueba Final

2.3.1. Resultados

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la octava versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Primaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 791 participantes del certamen en el nivel Medio, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

CUADRO DE HONOR

1er Puesto, medalla de oro

BELLOROSSME NHAJAIS MOGOLLÓN PADILLA

Colegio Integrado Caro y Cuervo, Bucaramanga

2^{o} Puesto, medalla de plata

MIGUEL ÁNGEL GÓMEZ TOLOZA

Gimnasio Pedagógico Comfenalco, Bucaramanga

3er Puesto, medalla de bronce

JUAN DIEGO CASTRO PICÓN

Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga

4^{o} Puesto

SEBASTIÁN AMAYA TABARQUINO

Colegio Jorge Ardila Duarte, Bucaramanga.

5^{o} Puesto

MARÍA LUCÍA RUEDA FERNÁNDEZ

Fundación Colegio UIS, Floridablanca.

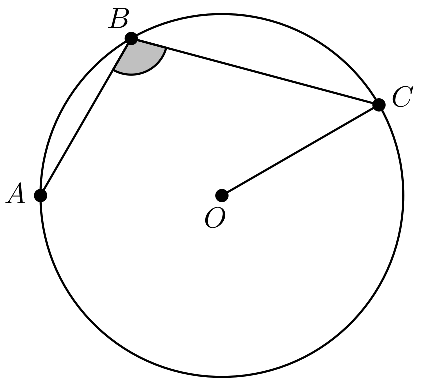
2.3.2. Prueba Final: 19 de octubre

1. Edson completó el siguiente tablero de 7×7 casillas, con números dígitos del 1 al 7, de tal forma que no se repetían números en cada fila, ni columna, ni diagonal punteada en el tablero. Luego borró algunos números y otros los reemplazó con letras como se muestra al lado. Encuentre el valor numérico de la siguiente operación

1			R			
	E					7
		7	2			
4		1	3			
				S		
			5		T	
A	2		6	1		5

$$R \times E \times S \times T \times A$$

2. Hallar la medida del ángulo sombreado en la siguiente figura, sabiendo que O es el centro del círculo, $AB = OC$ y el ángulo BCO mide 45.



3. Paula compró una cantidad de dulces, que es el mayor número, menor que 50, que tiene exactamente 4 divisores naturales, y la suma de sus cifras es un número primo. Si cada día come un caramelo menos que el día anterior, ¿para cuántos días le alcanzan sus caramelos? ¿Cuántos caramelos debe comer cada día?

4. Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado **II** depende de la respuesta del enunciado **I** y el enunciado **III**, de la respuesta del enunciado **II**. En la hoja de respuestas, escriba el procedimiento y la respuesta de cada enunciado en los recuadros correspondientes.

   I. ¿Cuántos números capicúa de cuatro cifras son múltiplos de 15?

   NOTA: *Un número es* **capicúa** *si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.*

   II. Con sus tres vértices sobre una circunferencia, cuyo radio mide, en centímetros, el número hallado en el item anterior, se dibuja un triángulo de tal forma que uno de sus lados es diámetro de la circunferencia y su área es la mayor posible. ¿Cuál es el área de este triángulo?

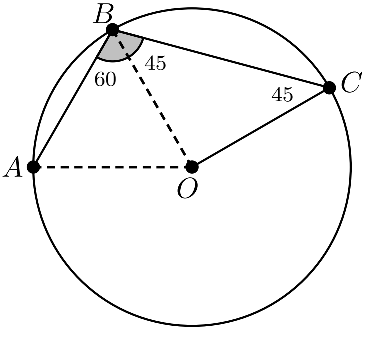
   III. ¿En qué año del siglo XX Andrew Wiles demostró el Último Teorema de Fermat, si este coincide con el triple del quintuple de un número de tres cifras cuyo producto es el número de la respuesta del item anterior?

2.3.3. Solución

1. Observando la diagonal principal se ve que E, S y T son los números 2, 4 y 6, en algún orden. Por otra parte, teniendo en cuenta las demás condiciones del enunciado se deduce que $A = 7$ y $R = 7$, por lo que el valor numérico de la operación $R \times E \times S \times T \times A$, está dado por $2 \times 4 \times 6 \times 7 \times 7 = 2352$.

   Nota: El problema solo pide el valor númerico de $R \times E \times S \times T \times A$, luego no es necesario completar todo el tablero ni hallar el valor específico de cada letra.

2. Trazando los radios $\overline{OB}$ y $\overline{OA}$, como se muestra en la figura, se observa que el triángulo ABO es equilátero, por lo tanto el ángulo ABO mide 60; y también que el triángulo BOC es isósceles en O, luego $\measuredangle OBC = \measuredangle BCO = 45$.



   Así, tenemos que $\measuredangle ABC = \measuredangle ABO + \measuredangle OBC = 60 + 45 = 105$.

3. En la siguiente tabla se muestran los números menores que 50 cuya suma de sus cifras es un número primo.

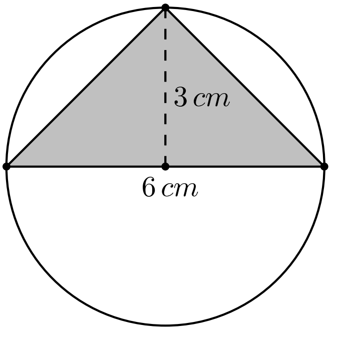
Suma de las cifras	Números
13	49.
11	29, 38, 47.
7	16, 25, 34, 43.
5	5, 14, 41, 23, 32.
3	3, 30, 12, 21.
2	2, 20, 11.

Note que los números encerrados dentro de un círculo son los únicos, en la tabla, que tienen exactamente 4 divisores y de ellos el mayor es 38. Este es el número de caramelos que compró Paula.

Por otro lado, sabemos que cada día ella come un caramelo menos que el día anterior, así que se deben buscar números consecutivos que sumen 38, los cuales resultan ser: 8, 9, 10 y 11. Por lo tanto, los caramelos le alcanzan para 4 días y debe comerlos del siguiente modo: 11 el primer día, 10 el segundo, 9 el tercero y 8 el cuarto.

4. **I.** Los mútiplos de 15 son múltiplos de 3 y de 5 simultáneamente, luego la suma de las cifras de estos números deben ser múltiplo de 3 y terminar en 0 o en 5. Pero como son capicúas, la cifra inicial coincide con la cifra final, por lo tanto solo pueden terminar en 5. De esta manera, los números que cumplen estas condiciones son 3 en total, a saber: 5115, 5445 y 5775.

II. Si el radio de la circunferencia es $3\,cm$, su diámetro es $6\,cm$. Tomando el lado del triángulo que es diámetro de la circunferencia como base, tenemos que la altura, debe medir $3\,cm$ para obtener la mayor área posible, como se muestra en la figura.



Así, el área de dicho triángulo es $\dfrac{6\,cm \times 3\,cm}{2} = 9\,cm^2$.

III. Los números de tres cifras cuyo producto es 9 son: 911, 191, 119, 331, 313, y 133. De ellos, el único que cumple que el triple de su quíntuple es un año del siglo XX es el 133. Luego, el año en que Andrew Wiles demostró el Último Teorema de Fermat fue $3 \times 5 \times 133 = 1995$.

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

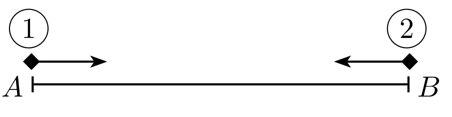
3.1.1. Prueba Clasificatoria: 28 de agosto

1. Dentro de cada figura del siguiente arreglo se escribe un número natural diferente del 1 al 9 de tal forma que al efectuar la operación el resultado sea el mayor posible. ¿Cuál es este resultado?

$$\frac{\bigcirc - \triangle}{\heartsuit} \times \square$$

(a) 54 (b) 56 (c) 81 (d) 32

2. Dos hormigas recorren un camino recto de longitud 100 centímetros y puntos extremos A y B. Si la hormiga ① ha recorrido $\frac{1}{5}$ del camino desde A en dirección hacia B, mientras que la hormiga ② ha recorrido $\frac{2}{5}$ del camino, desde B en dirección hacia A; ¿cuál es la distancia que las separa?



(a) $40\,cm$ (b) $60\,cm$ (c) $30\,cm$ (d) $70\,cm$

3. En una urna hay 10 balotas enumeradas del 1 al 10. ¿Cuántas balotas, como mínimo, debe extraer una persona con los ojos cerrados para asegurar que una de las balotas extraídas tiene un número primo?

(a) 5 (b) 4 (c) 7 (d) 6

4. Gabriela tiene 5 anillos de diferentes colores. ¿De cuántas formas puede lucir los anillos en su mano derecha, si en cada uno de sus 5 dedos se pone un anillo?

(a) 120 (b) 15 (c) 25 (d) 125

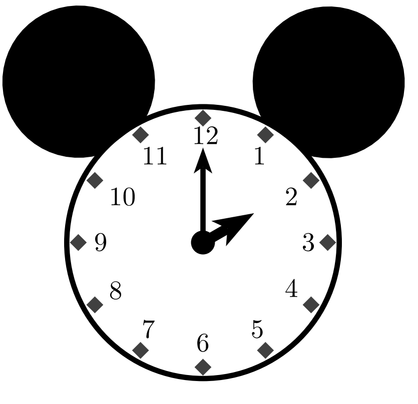
5. Cuatro estudiantes responden Verdadero (V) o Falso (F) en un examen de 5 preguntas como se muestra en la siguiente tabla

	Felipe	Nicolás	Ana	Lucía
Pregunta 1	V	F	V	V
Pregunta 2	F	F	F	V
Pregunta 3	F	V	F	F
Pregunta 4	V	F	F	V
Pregunta 5	F	V	V	F

Si uno de los estudiantes contestó bien todas las preguntas, otro contestó bien solo dos y otro falló en todas sus respuestas, ¿cuántas preguntas contestó bien Felipe?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

6. Ana tiene un reloj en su habitación como el que se muestra en la figura. ¿En cuál de las siguientes horas las manecillas del reloj forman un ángulo recto?



(a) 12 : 00
(b) 9 : 30
(c) 6 : 00
(d) 3 : 00

7. En una caja hay tantas bolsas como caramelos hay en cada una de las bolsas. Si el total de caramelos que hay en la caja es 64, ¿cuántas bolsas hay en la caja?

(a) 10 (b) 8 (c) 64 (d) 32

8. Elian representó el número de la clave de su celular en el ábaco con 21 aritos. De la clave del celular de Elian podemos asegurar que

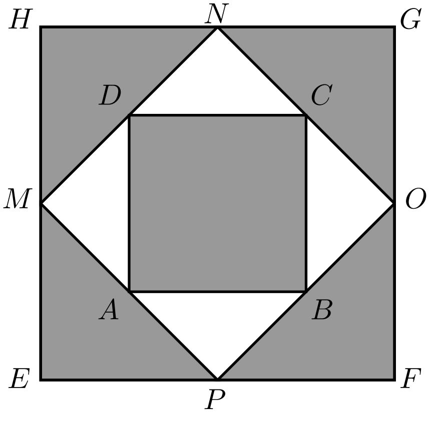
(a) es múltiplo de 7.

(b) es mayor que 400.

(c) es divisible entre 3.

(d) tiene más de tres dígitos.

9. Calcular el área sombreada en la siguiente figura, sabiendo que el lado del cuadrado $EFGH$ mide $8\,cm$, el lado del cuadrado $ABCD$ mide $4\,cm$, y M, N, O, y P son los puntos medios de los lados del cuadrado $EFGH$.



(a) $48\,cm^2$ (b) $64\,cm^2$ (c) $16\,cm^2$ (d) $40\,cm^2$

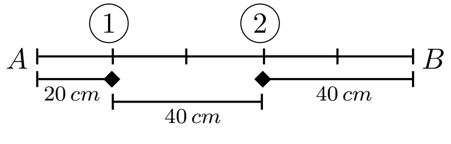
3.1.2. Solución

1. Si $\heartsuit = 1$, $\bigcirc = 9$, $\triangle = 2$ y $\square = 8$, se obtiene el mayor valor posible en el resultado de la operación indicada, a saber:

$$\frac{\bigcirc - \triangle}{\heartsuit} \times \square = \frac{9-2}{1} \times 8 = 56.$$

2. Solución 1. La hormiga (1) ha recorrido $\frac{1}{5}$ del camino desde el punto A, en la dirección de B, esto equivale a $\frac{100\,cm}{5} = 20\,cm$, pues la longitud total del camino es $100\,cm$. Por otra parte, la hormiga (2) ha recorrido $\frac{2}{5}$ del camino, desde el extremo B, en la dirección de A, lo que equivale a $\frac{100\,cm}{5} \times 2 = 40\,cm$. Así, la distancia que separa a las hormigas es $100\,cm - 20\,cm - 40\,cm = 40\,cm$.

Solución 2. Dividiendo el segmento $\overline{AB}$ en 5 partes iguales, tenemos que la hormiga (1) ha recorrido una de esas partes de izquierda a derecha, mientras que la hormiga (2) ha recorrido dos de esas partes de derecha a izquierda. Por lo tanto, la distancia que las separa equivale a dos de las cinco partes del segmento, que miden $\frac{100\,cm}{5} \times 2 = 40\,cm$, como se muestra en la figura.



3. Se puede ver que del 1 al 10 hay 6 números que no son primos, de manera que para estar seguros de haber extraído una balota con un número primo, debemos extraer, como mínimo, 7 balotas.

Note que si se extraen 6 o menos balotas, no se puede asegurar que al menos una tenga un número primo, pues puede ocurrir que todas estas balotas correspondan a un número compuesto.

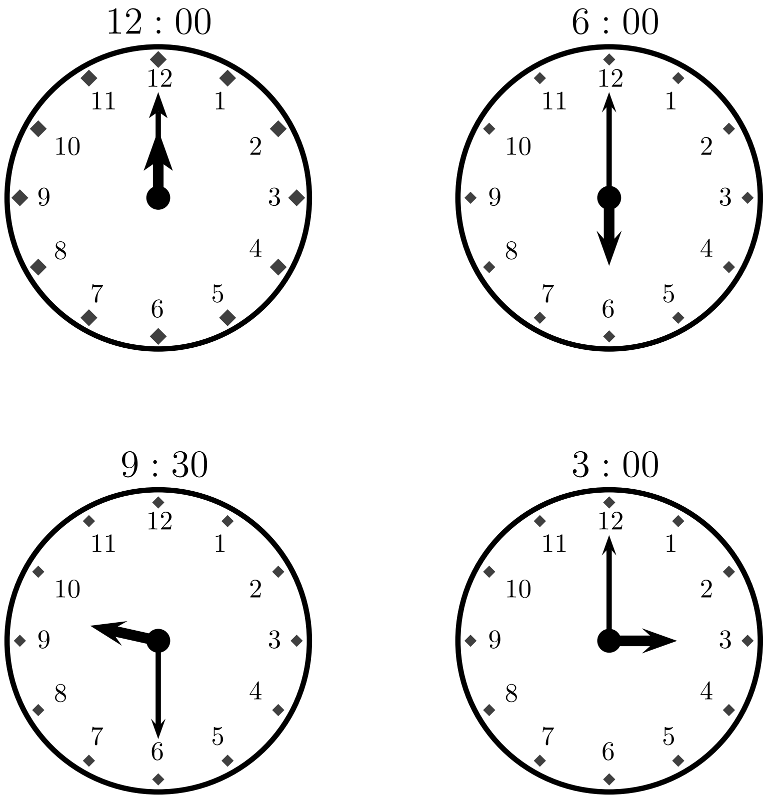
4. Se trata de contar de cuántas formas se pueden ordenar 5 objetos (anillos) en una fila con 5 posiciones (dedos). Note que para la primera posición (el dedo pulgar) tenemos 5 opciones, y por cada una de estas opciones tenemos 4 opciones para elegir el objeto de la segunda posición (dedo índice), pues ya hay uno en la primera posición, es decir, van 5×4 opciones. Ahora, para cada una de estas opciones tenemos 3 formas de elegir el tercer objeto, esto es $5\times4\times3$, y para cada una de estas opciones tenemos 2 formas de elegir al cuarto objeto, $5\times4\times3\times2$; finalmente para elegir el quinto objeto, tenemos solo una opción (el que quedó), para un total de $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ formas.

Lo anterior es el principio multiplicativo, que se resume en:

$$\underbrace{5\ opc.}_{\text{pulgar}} \times \underbrace{4\ opc.}_{\text{índice}} \times \underbrace{3\ opc.}_{\text{anular}} \times \underbrace{2\ opc.}_{\text{corazón}} \times \underbrace{1\ opc.}_{\text{meñique}} = \underbrace{120.}_{\text{formas}}$$

5. Se sabe que uno de los estudiantes contestó todas las preguntas bien y otro falló en todas, y se observa que Nicolás y Lucía son los únicos que tienen todas las respuestas distintas entre ellos, luego uno de ellos contestó todo bien y el otro todo mal. Ahora, como otro estudiante contestó bien solo dos respuestas, comparamos las respuesas de Felipe y Ana, con las de Nicolás y Lucía notando que las respuestas de Felipe coinciden en 4 respuestas con Lucía y en 1 con las de Nicolás, mientras que las respuestas de Ana coinciden en 2 con las de Lucía, y en 3 con las de Nicolás. De lo anterior se concluye que Lucía es quien tiene todas las respuestas correctas, y así Felipe contestó bien 4 preguntas.

6. En las siguientes figuras se ilustra el reloj con cada una de las horas que proponen las opciones de respuesta.



Esto permite concluir que las manecillas del reloj forman un ángulo recto a las $3:00$.

7. El total de caramelos que hay en una caja se obtiene multiplicando el número de bolsas por el número de caramelos en cada bolsa. Pero el número de bolsas es igual al número de caramelos en cada bolsa, de modo que debemos buscar un número que multiplicado por sí mismo resulte 64. Dicho número es el 8.

8. Note que el número de aritos que se usan para representar un número en el ábaco coincide con la suma de sus cifras, de modo que si Elián usó 21 aritos para representar el número de la clave de su celular, entonces este número es divisible entre 3, pues la suma de sus cifras es 21, que es múltiplo de 3. Las demás opciones se pueden descartar con casos particulares.

9. En la figura se obseva que el área sombreada corresponde al área del cuadrado $ABCD$ más el área de cuatro triángulos, cada uno con igual área. Ahora, como el lado del cuadrado $ABCD$ mide $4\,cm$, su área es $16\,cm^2$. Además, $HM = HN = 4\,cm$, y de esto se sigue que el área del triángulo MHN es $\dfrac{4\,cm \times 4\,cm}{2} = 8\,cm^2$. Así, el área sombreada está dada por

$$16\,cm^2 + 4 \times (8\,cm^2) = 48\,cm^2.$$

3.2. Prueba Selectiva

3.2.1. Prueba Selectiva: 20 de septiembre

1. ¿Cuántos números capicúa de tres cifras son divisibles por 3 y 5?

NOTA: *Un número es* **capicúa** *si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.*

(a) 3 (b) 6 (c) 10 (d) 20

2. María ahorró $\$1.600$ durante la semana y Camilo, $\$3.000$. Si María gastó $\frac{3}{4}$ de su dinero el fin de semana y Camilo, $\frac{2}{5}$ del suyo; es correcto afirmar que

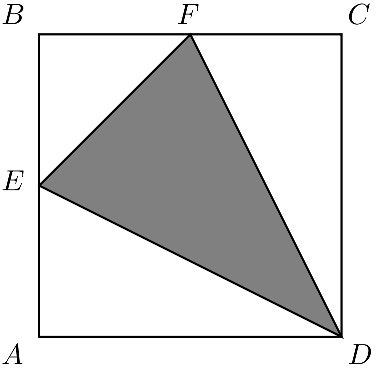
(a) María gastó más dinero que Camilo.

(b) Camilo gastó más dinero que María.

(c) ambos gastaron la misma cantidad de dinero.

(d) ambos quedaron con la misma cantidad de dinero.

3. En la siguiente figura se representa un cuadrado $ABCD$ que tiene $8\,cm$ de lado. Si E y F son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, ¿cuál es el área del triángulo EFD?



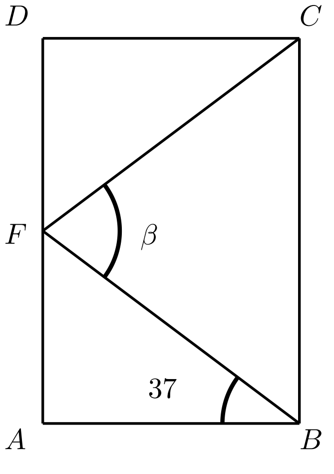
(a) $32\,cm^2$ (b) $24\,cm^2$ (c) $16\,cm^2$ (d) $8\,cm^2$

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

4. Un científico estuvo dentro de una cueva en una expedición que duró 1.000 horas. Si la expedición inició un lunes a las $6{:}00$ de la mañana, ¿qué día de la semana y a qué hora terminó?

5. En la fiesta de cumpleaños de Leonardo se observó que 60 personas usaban gafas, y 18 personas tenían brackets. Además el número de personas que usan gafas y llevan brackets es el máximo común divisor entre 60 y 18, mientras que las personas que no usaban gafas ni tenían braquets era el mínimo común múltiplo entre 60 y 18. ¿Cuántas personas habían en la fiesta de Leonardo?

6. En la siguiente figura $ABCD$ es un rectángulo y el triángulo CFB es isósceles, con $FC = FB$. Si el ángulo FBA mide 37, ¿cuánto mide el ángulo β marcado en la figura?



3.2.2. Solución

1. Los múltiplos de 5 terminan en 0 o en 5 y los números capicúa tienen iguales su primera y última cifra, de modo que la primera y última cifra de los números de interés debe ser 5. Para determinar la cifra central, note que la suma de las cifras de los números divisibles por 3 es un múltiplo de 3, así las únicas opciones son: 2, 5 y 8. Por lo tanto, hay 3 números capicúa de tres cifras múltiplos de 3 y de 5, a saber: 525, 555 y 585.

2. Note que $\frac{3}{4}$ de 1600 equivale a

$$\frac{1600}{4} \times 3 = 1200,$$

luego María gastó $\$1.200$ y quedó con $\$400$. Además, $\frac{2}{5}$ de 3000 corresponde a

$$\frac{3000}{5} \times 2 = 1200,$$

de modo que Camilo gastó $\$1.200$ y quedó con $\$1.800$. En conclusión, ambos gastaron la misma cantidad de dinero.

3. Note que el área sombreada corresponde al área del cuadrado $ABCD$ menos el área de cada uno de los triángulos ADE, EBF y FCD.

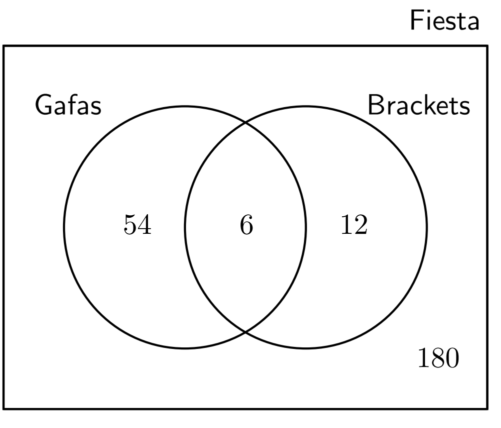
   El área del cuadrado $ABCD$ es $8\,cm \times 8\,cm = 64\,cm^2$, además como E y F son los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BF}$ respectivamente, entonces $EA = EB = BF = 4\,cm$. Así, las áreas de los triángulos ADE, EBF y FCD son, respectivamente, $\frac{8\,cm \times 4\,cm}{2} = 16\,cm^2$, $\frac{4\,cm \times 4\,cm}{2} = 8\,cm^2$, y $\frac{8\,cm \times 4\,cm}{2} = 16\,cm^2$. Por lo tanto, el área del triángulo EFD es

$$64\,cm^2 - 16\,cm^2 - 8\,cm^2 - 16\,cm^2 = 24\,cm^2.$$

4. Al dividir 1000 entre 24 obtenemos 41 de cociente y 16 de residuo, esto indica que la expedición duró 41 días y 16 horas. Además, al dividir 41 entre 7 obtenemos 5 de cociente y 6 de residuo, lo que significa que la

expedición duró 5 semanas, 6 días y 16 horas. Así, como la expedición inició un lunes, entonces terminó un domingo, 16 horas después de las $6:00$ a.m., es decir, a las $10:00$ p.m.

5. El máximo común divisor entre 60 y 18, es 6, este es el número de personas que usan gafas y llevan brackets, luego $60-6=54$ personas usan gafas pero no tienen brackets y $18-6=12$ personas tienen brackets pero no usan gafas. Además, el mínimo común múltiplo entre 60 y 18, es 180, que es el número de personas que no usan grafas ni llevan brackets. Por lo tanto, el número total de personas que había en la fiesta de Leonardo es $54+12+6+180=252$.



6. Dado que $ABCD$ es un rectángulo, entonces $\measuredangle ABC = 90$, y como $\measuredangle FBA = 37$, se tiene que $\measuredangle AFB = 53$, pues la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180. Por otro lado, como el triángulo BFC es isósceles, con $FC = FB$, entonces $\measuredangle FCB = \measuredangle CBF = 90 - 37 = 53$, luego $\measuredangle DCF = 37$ y así, $\measuredangle CFD = 53$. Finalmente, note que

$$\beta = 180 - \measuredangle AFB - \measuredangle DCF = 180 - 53 - 53 = 74.$$

3.3. Prueba Final

3.3.1. Resultados

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la octava versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Primaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 1109 participantes del certamen en el nivel Avanzado, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

CUADRO DE HONOR

1^{er} Puesto, medalla de oro

Santiago Peña Valencia

Gimnasio San Diego, Floridablanca.

2^{o} Puesto, medalla de plata

Juan David Hernández Buitrago

Colegio Liceo Patria, Bucaramanga.

3^{er} Puesto, medalla de bronce

Zarah Sofya Céspedes Rojas

Colegio Liceo Patria, Bucaramanga.

4^{o} Puesto

Sara Isabel Plata Ballesteros

Colegio Jorge Ardila Duarte, Bucaramanga.

5^{o} Puesto

Juan Sebastián Buitrago Moncada

Colegio Campestre Celestín Freinet, Piedecuesta.

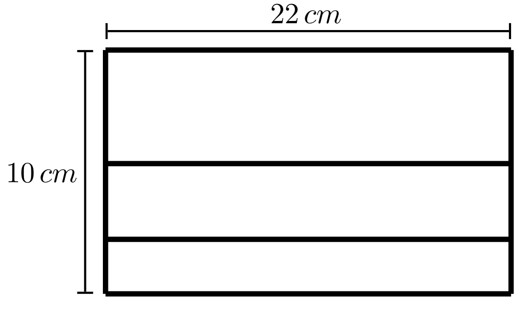
3.3.2. Prueba Final: 19 de octubre

1. Nicolás tiene como tarea construir un triángulo con las siguientes características: su perímetro debe ser un tercio del que tiene un hexágono regular con $4\,cm$ de lado, y la longitud de cada uno de sus lados debe ser un número natural de centímetros. ¿Cuántos triángulos puede construir Nicólas con estas características?

2. Se desea elaborar la bandera de un país, con un rectángulo de $10\,cm \times 22\,cm$, como se muestra en la figura; de tal forma que tenga tres franjas horizontales de diferentes colores, con las siguientes características:

   - el área de la franja superior debe ser mayor que el área de la franja del medio, y el área de la franja del medio debe ser mayor que el área de la franja inferior.
   - las dimensiones, en centímetros, de cada franja deben ser números naturales.
   - solo se pueden usar los colores: amarillo, azul y rojo.

   ¿De cuántas formas se puede diseñar la bandera con estas características?



3. Las casas de Óscar, Sofía, Laura, Tomás y Lucía están ubicadas, en ese orden, a lo largo de una calle recta. Encuentre la distancia entre las casas de Óscar y Lucía, sabiendo que: cuando Sofía visita a Lucía recorre $26\,m$ más de lo que recorre Laura cuando visita a Tomás, además Lucía vive $32\,m$ más alejada de Óscar que de Tomás, y cuando Óscar visita a Sofía y Laura visita a Lucía recorren $18\,m$ en total.

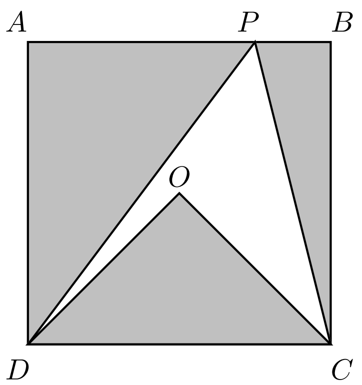
4. Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado **II** depende de la respuesta del enunciado **I** y el enunciado **III**, de la respuesta del enunciado **II**. En la hoja de respuestas, escriba el procedimiento y la respuesta de cada enunciado en los recuadros correspondientes.

   I. Valeria asegura que todos sus libros son de matemáticas menos dos, todos son de biología menos dos y todos son de español menos dos. Si Valeria tiene razón, ¿cuántos libros tiene?

   II. Complete el siguiente SUDOKU formado por 36 casillas, en cada una de las cuales se debe escribir un número, del 1 al 6, de tal manera que no se repitan números dentro de una misma fila, columna o caja de 2×3 casillas. Tenga en cuenta que en la casilla sombreada debe escribir el número encontrado en el item anterior.

		5			
				3	1
4		6		5	
	2		6		3
6	5				

   III. En la siguiente figura, O es el centro del cuadrado $ABCD$ y P es un punto sobre el segmento $\overline{AB}$. Si la longitud, en centímetros, del lado del cuadrado es el producto de los divisores primos de la suma de los números que están en la casilla superior izquierda de cada caja de 2×3 del sudoku resuelto anteriormente, ¿cuál es el área de la región sobreada?



3.3.3. Solución

1. El perímetro de un hexágono regular con $4\,cm$ de lado es de $6 \times 4\,cm = 24\,cm$, entonces el perímetro del triángulo debe ser $\dfrac{24\,cm}{3} = 8\,cm$. Como la longitud, en centímetros, de cada lado del triángulo debe ser un número natural, se deben buscar tres números naturales que sumen 8; las posibles triplas son: $\{1,1,6\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,2,4\}$ y $\{2,3,3\}$.

   Pero de las anteriores triplas, la única cuyos números pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo es $\{2,3,3\}$, pues en las demás la suma de dos de los números es menor o igual que el tercero, lo que es imposible para las longitudes de los lados de un triángulo.

2. Las formas de escribir a 10 como suma de tres números naturales diferentes son:

   - $10 = 1 + 2 + 7$,
   - $10 = 1 + 3 + 6$,
   - $10 = 1 + 4 + 5$,
   - $10 = 2 + 3 + 5$.

   De esta manera, hay 4 opciones para elegir el tamaño de las franjas de la bandera.

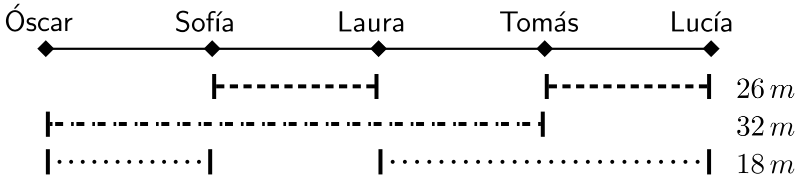
   Por otra parte, para cada una de las opciones hay 6 formas de elegir el orden de los colores:

   - amarillo - azul - rojo.
   - amarillo - rojo - azul.
   - azul - amarillo - rojo.
   - azul - rojo - amarillo.
   - rojo - amarillo - azul.
   - rojo - azul - amarillo.

   Por lo tanto hay $6 \times 4 = 24$ formas diferentes de diseñar la bandera.

3. Cuando Sofía visita a Lucía recorre $26\,m$ más de lo que recorre Laura cuando visita a Tomás, de donde se concluye que la distacia de la casa de Sofía a la de Laura más la distancia de la casa de Tomás a la de Lucía es $26\,m$. También, Lucía vive $32\,m$ más alejada de Óscar que de Tomás, luego la distancia de la casa de Tomás a la de Óscar es $32\,m$.

Finalmente, cuando Óscar visita a Sofía y Laura visita a Lucía recorren en total $18\,m$, de ahí que la distancia de la casa de Óscar a la de Sofía más la distancia de la casa de Laura a la de Lucía es $18\,m$; como se muestra en la siguiente gráfica.



Observe que la suma $26\,m + 32\,m + 18\,m = 76\,m$, coindice con el doble de la distancia de la casa de Óscar a la casa de Lucía, por lo tanto, esta distancia es $38\,m$.

4. **I.** Sofía tiene 3 libros.

   II. Teniendo en cuenta las condiciones, se completa el sudoku así:

3	1	5	4	2	6
2	6	4	5	3	1
4	3	6	1	5	2
5	2	1	6	4	3
6	5	3	2	1	4
1	4	2	**3**	6	5

   III. La suma de los números que están en la casilla superior izquierda de cada caja 2×3 del sudoku resuelto es $3+4+6+4+1+2 = 20$ y el producto de los divisores primos de 20 es $2 \times 5 = 10$, esta es la longitud de $\overline{AB}$.

   Note que el área de la región sombreada coincide con el área del cuadrado $ABCD$, menos el área del triángulo DPC, más el área del triángulo DOC, esto es:

$$(10 \times 10) - \left(\frac{10 \times 10}{2}\right) + \left(\frac{10 \times 5}{2}\right) = 100 + 50 + 25 = 75\,cm^2.$$

Bibliografía

[1] Brochero F. y Restrepo J. *Un recorrido por la Teoría de Números.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[2] Gómez J., Valdez R. y Vázquez R. *Principio de las Casillas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2011.

[3] Hemmerling E. *Geometría Elemental.* Bakersfield College. Limusa, México, 2009.

[4] Jiménez L., Gordillo J. y Rubiano G. *Teoría de números para principiantes.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.

[5] Madroñero J y Contreras I. *Un recorrido por el Álgebra.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[6] Soberón P. *Combinatoria para olimpiadas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2010.

[7] Restrepo P. *Un recorrido por la Combinatoria I.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

Vicerrectoría Administrativa
Vicerrectoría de Investigación y Extensión

Vicerrectoría Académica

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"