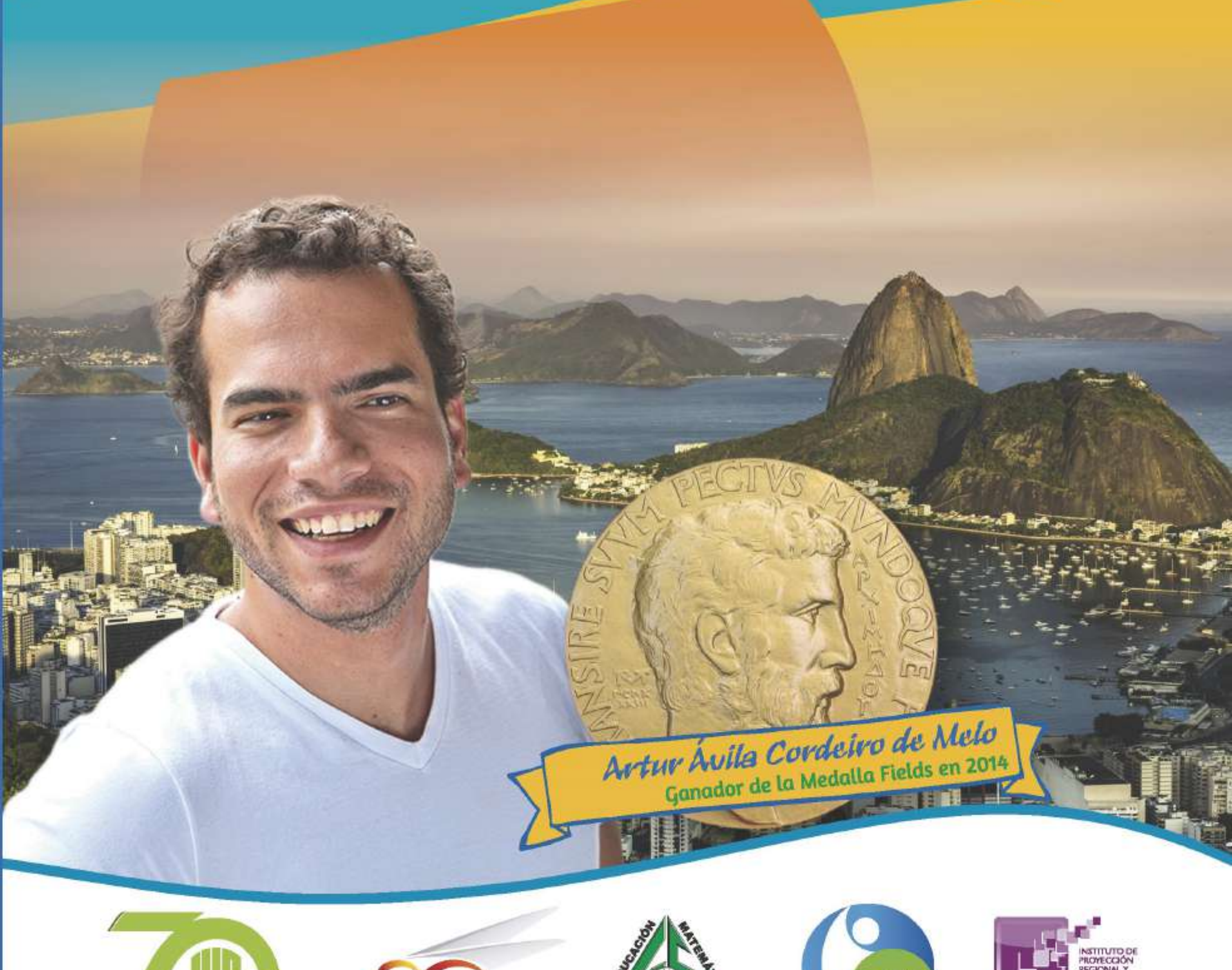
7as Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Primaria



70 años UIS
VIGILADA MINEDUCACIÓN

ORM
OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMÁTICAS

GRUPO EDUCACIÓN MATEMÁTICA UIS
EDUMAT

SEA
Sistema de apoyo a la excelencia académica

INSTITUTO DE PROYECCIÓN REGIONAL Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
IPRED
EDUCACIÓN INTERACTIVA Y ABIERTA AL LIDERAZGO

2018

Séptimas Olimpiadas Regionales de Matemáticas Primaria

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga

2018

Elaboración y edición

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas - 2018.

Director

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Coordinadora

Laura Milena Romero Parada

Monitores

Andrés Fabián Leal Archila

Cristhian Daniel Cáceres Garavito

Edwin David Valencia Oviedo

Esteban David Salcedo Niño

Gabriel Moncada Santos

Gerson Leonel Barajas Ávila

Jenifer Tatiana Puentes Correa

Jesús Fernando Carreño Díaz

Johan Sebastián Cortés Villamizar

José Camilo Rueda Niño

Juan Camilo Cala Barón

Silvia Juliana Ballesteros Gualdrón

Wilson David Archila Mojica

Yerly Vanesa Soler Porras

Yzel WIly Alay Gómez Espíndola

Presentación

Las Olimpiadas en Matemáticas son conocidas a nivel internacional por la influencia en la transformación del pensamiento matemático, y el crecimiento de las expectativas y el interés en aprender matemáticas por parte de los estudiantes. Generalmente, las situaciones problemáticas expuestas en las pruebas exponen al estudiante a temas que no se estudian en la escuela, y estos incluyen matemática que puede ser motivadora y sorprendente. Así las competencias no solamente prueban de manera directa el conocimiento o las destrezas matemáticas sino también la habilidad que tiene el estudiante de manejar situaciones más allá de experiencias reales.

Las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander para primaria buscan recrear el pensamiento matemático de tal forma que todos los niños atraídos por el deseo de enfrentar nuevos retos descubran caminos alternos y flexibilicen la exploración de ideas matemáticas de tal manera que su participación permita que tanto el estudiante como el docente puedan apreciar sus logros y juzgar su práctica desde una perspectiva nacional e internacional.

Con el objetivo de recopilar, compartir, difundir y divulgar los problemas trabajados en cada versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander para primaria se ha elaborado el presente material dirigido a estudiantes de básica primaria, docentes de matemáticas y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a través del enfoque de planteamiento y resolución de problemas.

Introducción

La Universidad Industrial de Santander como institución de educación superior en el ámbito regional tiene como misión esencial educar mediante la generación y difusión de las ciencias, la tecnología, las humanidades y el arte como una clara vocación de servicio a la sociedad, posibilitando la formación integral del ser humano dentro de un espíritu creativo que permita el mejoramiento personal y el desarrollo de una sociedad democrática, tolerante y comprometida con los deberes civiles y los derechos humanos.

Siguiendo este orden de ideas, la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander tiene como misión ofrecer a la sociedad y a la comunidad universitaria posibilidades para el cultivo de las matemáticas, donde se promueva una actitud creativa, rigurosa y formal, construyendo un ambiente académico basado en la sana competencia y la solidaridad. Es por esta razón que, desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas se ha comprometido con la educación matemática en el entorno natural de la UIS, liderando en forma positiva la actividad matemática del nororiente del país, no solo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado sino también por su participación en la formación de los estudiantes de la universidad.

Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a las diversas dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje y desarrollo de las habilidades matemáticas en la región, la Escuela de Matemáticas ha definido un proyecto macro de fortalecimiento de las habilidades matemáticas de la comunidad estudiantil de la región, utilizando para este fin, diferentes actividades académicas entre las que se encuentran el proyecto de semilleros, la creación de diplomados y especializaciones para actualización y/o formación docente y el proyecto de Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (ORM-UIS) para primaria que busca contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación primaria en la región de incidencia de la UIS, a través del desarrollo de las habilidades matemáticas de los estudiantes y la capacitación docente.

Este proyecto es pieza clave para mejorar el nivel matemático de los estudiantes de la región, fortalecer la formación académica de los docentes de primaria y muy posiblemente aumentar el número de licenciados en matemáticas y matemáticos en la región, a partir del conocimiento y puesta en práctica de estrategias que mejoren la efectividad del proceso de planteamiento y resolución de problemas.

Las ORM-UIS para primaria tienen como ejes temáticos: teoría de números y combinatoria, álgebra y lógica, y geometría. Se realizan en cinco fases, a saber, Preparatoria, Clasificatoria, Selectiva, Final y Entrenamientos, en cada uno de los tres niveles de acuerdo al grado de escolaridad de los estudiantes. Los niveles son: Básico, para los estudiantes de grado tercero; Medio, para los estudiantes de grado cuarto, y Avanzado, para los estudiantes de grado quinto.

La Escuela de Matemáticas a través del grupo de Educación Matemática de la UIS, Edumat, reconoce la labor esencial del maestro en el proceso de formación de ciudadanos competentes; por ello brinda tanto a los docentes como a los estudiantes una forma de vincularse a este mundo y en esta oportunidad lo hace presentando esta cartilla.

Este documento consta de tres capítulos; en cada uno de estos se presentan los problemas correspondientes a la séptima versión del proyecto ORM-UIS para primaria en las fases Clasificatoria, Selectiva y Final con su respectiva solución y los nombres de los estudiantes con los mejores cinco puntajes en la prueba final, para cada uno de los tres niveles: Nivel Básico (Capítulo 1), Nivel Medio (Capítulo 2) y Nivel Avanzado (Capítulo 3).

Se espera que este material sea del agrado de estudiantes, docentes y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a través del enfoque de planteamiento y resolución de problemas y permita introducir, desarrollar y reflexionar algunas temáticas específicas de cada área en los diferentes sistemas como lo son el numérico-variacional, el geométrico-métrico y el aleatorio.

Índice general

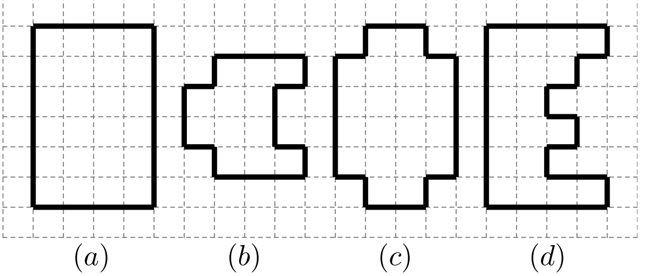
Capítulo 1

Nivel Básico

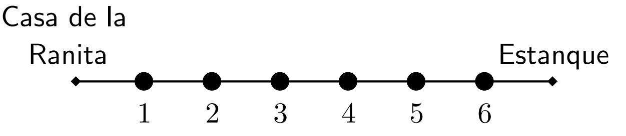
1.1. Prueba Clasificatoria

1.1.1. Prueba Clasificatoria: 12 de septiembre.

1. Ramsés quiere ponerle cerca de alambre a cuatro lotes de terreno como los que se muestran en la figura. ¿En cuál de los lotes gasta la mayor cantidad de alambre?

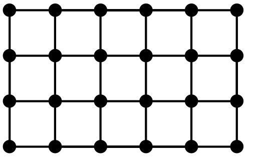


2. La siguiente figura muestra el camino de la casa de una ranita hasta el estanque. Cada punto enumerado representa una piedra en el camino. Si la ranita quiere ir desde su casa al estanque saltando solamente sobre dos piedras y sin devolverse, ¿de cuántas formas puede hacerlo?



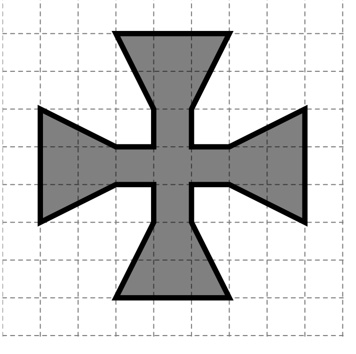
(a) 6 (b) 12 (c) 15 (d) 30

3. ¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular el número de puntos resaltados en la figura?



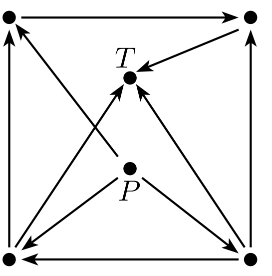
(a) 6×4 (b) 5×3 (c) $5 + 3$ (d) $6 + 4$

4. Encuentre el área de la figura sombreada en la siguiente cuadrícula. Tenga en cuenta que el lado de cada cuadradito mide $2\ cm$.



(a) $44\,cm^2$ (b) $42\,cm^2$ (c) $84\,cm^2$ (d) $88\,cm^2$

5. El siguiente mapa muestra los caminos por los cuales puede desplazarse una persona que está en el punto P para llegar a un tesoro escondido en el punto T. ¿De cuántas formas puede llegar la persona al tesoro, desplazándose como le indican las flechas en el mapa?

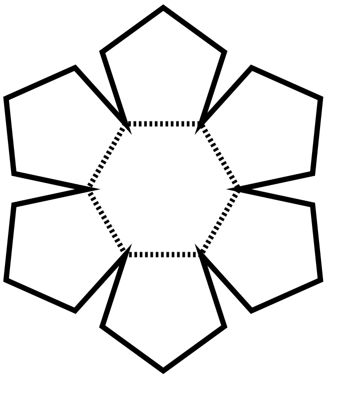


(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8

6. Arthur y Flavia juegan a escribir números en la pizarra, siempre Arthur después de Flavia. Flavia escribió el número 3 y luego Arthur escribió el 8. Si Flavia siempre le resta 2 al número que escribió Arthur y él suma 5 al número que escribió Flavia, ¿cuál es el noveno número escrito en la pizarra?

(a) 17 (b) 20 (c) 22 (d) 15

7. El centro de la flor que se muestra en la figura es un hexágono regular de perímetro $12\,cm$ y sus pétalos son pentágonos regulares. ¿Cuál es el perímetro de la flor?



(a) $24\,cm$ (b) $48\,cm$ (c) $30\,cm$ (d) $60\,cm$

8. En una bolsa hay cuatro balotas, enumeradas del 1 al 4. ¿Cuántos números pares de tres cifras se pueden formar extrayendo tres balotas de la bolsa?

(a) 12 (b) 16 (c) 24 (d) 32

9. Ana y Carlos discutían por quién se quedaría con el chocolate más rico que había en su caja de dulces. Ana propone lanzar una moneda y si sale cara ella gana, pero si sale sello Carlos pierde. Carlos no aceptó porque:

(a) tenía la misma posibilidad de perder que de ganar.

(b) en cualquiera de los casos Ana pierde.

(c) estaba seguro que iba a perder.

(d) estaba seguro que iba a ganar y quiere que Ana gane.

1.1.2. Solución

1. En la figura se observa que el perímetro del primer lote de terreno está formado por 20 lados de cuadrados de la cuadrícula; el perímetro del segundo, por 18 lados; el perímetro del tercero, por 20 lados y el perímetro del cuarto, por 26 lados. Por lo tanto, para el lote de la cuarta figura se necesita más alambre.

2. **Solución** 1. La ranita sabe que para contar las posibles formas de hacerlo puede proceder de la siguiente manera:

   a) Si se dispone a saltar a la primera piedra, entonces tiene 5 posibilidades para aterrizar su segundo salto que corresponden a las piedras 2, 3, 4, 5 y 6.

   b) Si su primer salto lo hace a la segunda piedra, entonces tiene 4 posibilidades para aterrizar su segundo salto que corresponden a las piedras 3, 4, 5 y 6. En este caso no puede saltar a la piedra 1 puesto que no se puede devolver.

   c) Si su primer salto lo hace a la tercera piedra, entonces tiene 3 posibilidades para aterrizar su segundo salto que corresponden a las piedras 4, 5 y 6.

   d) Si su primer salto lo hace a la cuarta piedra, entonces tiene 2 posibilidades para aterrizar su segundo salto que corresponden a las piedras 5 y 6.

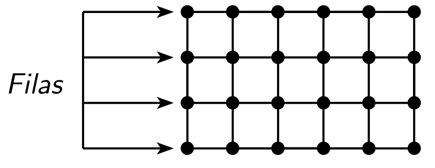
   e) Si su primer salto lo aterriza en la quinta piedra, entonces tiene 1 única posibilidad para aterrizar su segundo salto que corresponde a la piedra 6.

   Sumando todas las posibilidades, la ranita tiene en total 15 formas distintas de llegar al estanque desde su casa, en las condiciones que establece el enunciado.

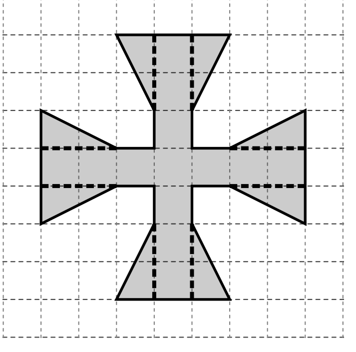
Solución 2. Este problema equivale a determinar cuántos números de dos cifras se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6; tales que la cifra de las unidades es mayor que la cifra de las decenas. Estos números son 15 en total, a saber: 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56.

3. Dado que en la figura hay 4 filas de puntos y en cada fila hay 6 puntos, se establece que la cantidad total de puntos es:

$$6 \times 4 = 24.$$



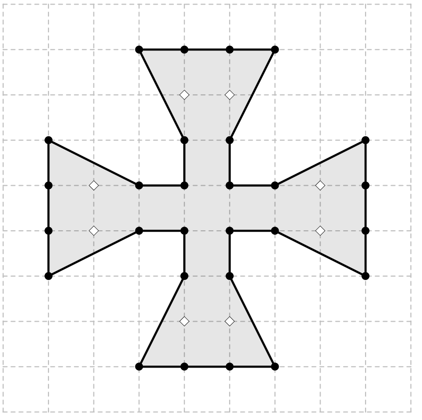
4. **Solución** 1. Se particiona la figura sombreada de la siguiente forma,



Como el lado de cada cuadrado de la cuadrícula mide $2\,cm$, en la partición aparecen 8 triángulos que tienen base $2\,cm$ y altura $4\,cm$, es decir de área $4\,cm^2$; el resto de figura está conformada por exactamente 13 cuadraditos, cada uno con área de $2 \times 2 = 4\,cm^2$. Así se concluye que el área de la figura sombreada es:

$$8 \times 4 + 13 \times 4 = 84\ cm^2.$$

Solución 2. Observe que el número de vértices de la cuadrícula que están sobre el contorno de la figura es 28 y el número de vértices de la cuadrícula que están en el interior de la figura es 8.

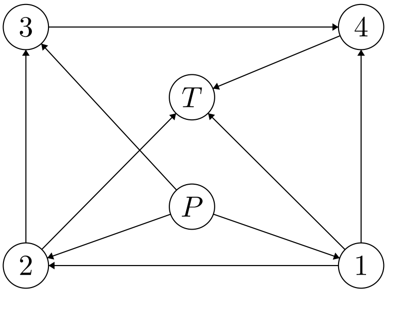


Así, por la fórmula de Pick, tenemos que el área de la figura sombreada sobre la cuadrícula equivale al área de

$$\frac{28}{2} + 8 - 1 = 21$$

cuadrados de la cuadrícula. Como el lado de cada cuadrado de la cuadrícula mide $2\,cm$, entonces su área es $4\,cm^2$. Por lo tanto el área de toda la figura es $21 \times 4 = 84\,cm^2$.

5. En la siguiente figura se han enumerado los puntos del mapa para facilitar el conteo de los caminos.



Observe que los caminos posibles para ir desde P hasta T siguiendo la dirección de las flechas son en total 7, a saber:

- $P \longrightarrow 1 \longrightarrow T$
- $P \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow T$

- $P \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow T$
- $P \longrightarrow 1 \longrightarrow 4 \longrightarrow T$
- $P \longrightarrow 2 \longrightarrow T$
- $P \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow T$
- $P \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow T$

6. Como incialmente Flavia escribe el 3 y Arthur escribe el 8, teniendo en cuenta las condiciones del enunciado se tiene que los números escritos en la pizarra son:

Pizarrón

Flavia	3	6	9	12	15	$\cdots$
Arthur	8	11	14	17	20	$\cdots$

Note que los números fueron escritos en el siguiente orden: 3, 8, 6, 11, 9, 14, 12, 17, 15, $20, \ldots$ Por lo tanto el noveno número escrito en la pizarra es 15.

7. Como el centro de la flor es un hexágono regular de perímetro $12\,cm$, entonces la medida de cada uno de sus lados es $12 \div 6 = 2\,cm$. Además, los pétalos de la flor son pentágonos regulares cuyos lados miden igual que los del hexágono, es decir $2\,cm$. Note que el contorno de la flor está formado por $4 \times 6 = 24$ de estos lados; por lo tanto el perímetro de la flor es

$$24 \times 2\,cm = 48\,cm.$$

8. Como el número debe ser par, entonces debe terminar en 2 o 4, es decir los números deben ser de la forma $a\,b\,2$ o $a\,b\,4$.

Caso 1: Números de la forma $a\,b\,2$. Como ya se extrajo el número 2 de la bolsa, para el dígito a hay 3 opciones y una vez se escoja el dígito a, para b quedan 2 opciones. Usando el principio multiplicativo se establece que en total hay $3 \times 2 = 6$ números en este caso.

Caso 2: Números de la forma $a\,b\,4$. Como ya se extrajo el número 4 de la bolsa, para a hay 3 opciones, luego para b quedan 2 opciones. De modo que en este caso también hay $3\times 2 = 6$ números.

En conclusión, hay 12 números pares de tres cifras que se pueden formar extrayendo tres de las balotas que hay en la bolsa.

9. Existen dos posibilidades en el trato propuesto por Ana:

- Si sale cara, Ana gana y Carlos **pierde**.
- Si sale sello, Carlos **pierde** y Ana gana.

Por tanto, Carlos no aceptó porque estaba seguro que iba a perder.

1.2. Prueba Selectiva

1.2.1. Prueba Selectiva: 5 de octubre

1. Hay cuatro perros en un patio, cada uno de ellos con diferente número de pulgas. El que menos tiene pulgas, tiene 32 y cada uno de los demás tiene el doble de pulgas que otro de ellos, ¿cuántas pulgas reúnen entre los cuatro perros?

(a) 512 (b) 480 (c) 256 (d) 128

2. En una caja hay tres maras amarillas, dos blancas y una azul. Si Sebastián extrae de la caja tres maras y ninguna de ellas es azul, podemos asegurar de las tres maras que sacó Sebastián que

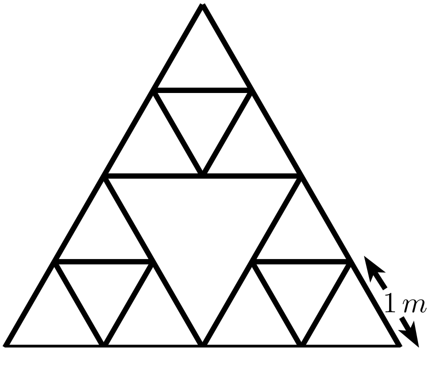
(a) todas son del mismo color.

(b) una es amarilla y dos son blancas.

(c) una es blanca y dos son amarillas.

(d) por lo menos una es amarilla.

3. Adrián quiere construir con varillas de hierro una escultura usando triángulos equiláteros de 1 metro de lado, como se muestra a continuación:



¿Cuántos metros de varilla necesita Adrián para construir la escultura?

(a) 12 (b) 18 (c) 27 (d) 36

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

4. Si dos empanadas y dos jugos cuestan $8.\dot{6}00$ pesos y dos jugos y una empanada cuestan 6.300 pesos, ¿cuánto cuesta una empanada?

5. La coneja Lola puede agrupar a sus hijos de 12 en 12 sin que sobre alguno y de 10 en 10, pero sobran 4. Si todos sus hijos duermen en 10 madrigueras, cada una con capacidad máxima para 10 conejitos, y 3 madrigueras no son suficientes para que todos duerman, ¿cuántos hijos tiene la coneja Lola?

6. La siguiente figura ha sido construida con dos fichas rectangulares iguales y dos fichas cuadradas de diferente tamaño. Si el perímetro de cada ficha rectangular es $10\,cm$, ¿cuál es el perímetro de toda la figura?

1.2.2. Solución

1. Se sabe que el perro que tiene menos pulgas tiene 32. Por la condición de que cada perro tiene el doble de pulgas que otro; podemos garantizar que hay un segundo perro con 64 pulgas, que hay otro tercer perro con 128 y un cuarto perro con 256. Así, entre los cuatro perros reúnen un total de 480 pulgas.

2. Las posibles formas de sacar tres maras de la caja, excluyendo la mara azul, son las siguientes:

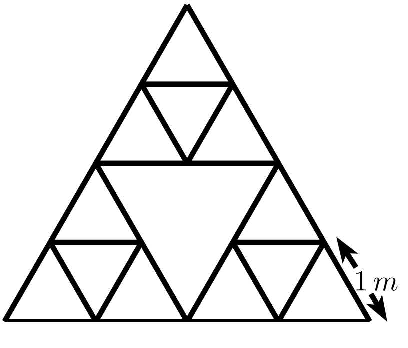
   Configuración 1: amarilla - amarilla - amarilla.

   Configuración 2: amarilla - amarilla - blanca.

   Configuración 3: amarilla - blanca - blanca.

   Las configuraciones 2 y 3 no permiten asegurar que todas las maras son del mismo color y configuración 1 no permite asegurar que una es amarilla y dos blancas, o que una es blanca y dos son amarillas. Sin embargo, en cualquiera de las tres configuraciones, es posible asegurar que hay por lo menos una mara amarilla.

3. El perímetro de cada triángulo equilátero de lado $1\,m$ es $3 \times 1 = 3\,m$. Note que la escultura está formada por 9 de estos triángulos equiláteros, por lo tanto se necesitan $9 \times 3\,m = 27\,m$ de varilla para construir la escultura.



4. Si dos empanadas y dos jugos cuestan 8.600 y una empanada y dos jugos cuestan 6.300, entonces la diferencia de precios corresponde al precio de una empanada. Por lo tanto, una empanada cuesta 2.300 pesos.

5. Como la coneja Lola puede agrupar a sus hijos de 12 en 12 sin que sobre alguno, esto implica que la cantidad de sus hijos es múltiplo de 12, es decir, la cantidad de conejitos puede ser:

$$12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, \ldots$$

Dado que al agruparlos de 10 en 10 sobran 4, tenemos que el número que representa la cantidad de los hijos de la coneja Lola es un múltiplo de 10 más 4, esto es, termina en 4. Además, como todos sus hijos duermen en 10 madrigueras, cada una con capacidad máxima para 10 conejitos, se puede decir que como máximo hay en total $10 \times 10 = 100$ conejitos. Así que la cantidad de hijos de la coneja Lola puede ser 24 u 84; pero 3 madrigueras no son suficientes para que todos duerman, por lo que debe haber más de $3 \times 10 = 30$ conejitos. En conclusión, la coneja Lola tiene 84 hijos.

6. Los dos cuadrados comparten lados con los rectángulos que son iguales. Note que el contorno de la figura total está conformado por: 4 lados iguales al lado más largo del rectángulo y 4 lados iguales al lado más corto del rectángulo. Entonces, el perímetro de la figura es igual a dos veces el perímetro de un rectángulo, esto es $2 \times 10\ cm = 20\ cm$.

1.3. Prueba Final

1.3.1. Resultados

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la séptima versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Primaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 532 participantes del certamen en el nivel Básico, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

CUADRO DE HONOR

1^{er} Puesto, medalla de oro

YANNI GABRIELA SANTAMARÍA CASTILLO

Colegio Cooperativo, Barbosa.

2^{o} Puesto, medalla de plata

SOFÍA GONZÁLEZ NOSSA

Colegio Reggio Amelia, Bucaramanga.

3^{er} Puesto, medalla de bronce

JUAN DIEGO TAPIAS HERNÁNDEZ

Colegio Bilingüe Divino Niño, Bucaramanga.

4^{o} Puesto

OSCAR SANTIAGO ACEVEDO MANRIQUE

Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.

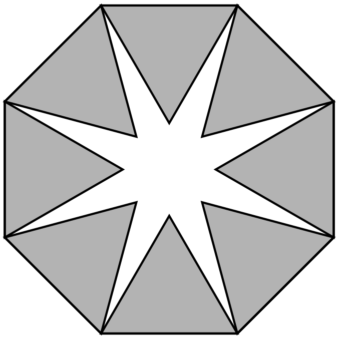
5^{o} Puesto

UDAY RAMÍREZ HINCAPIÉ

Colegio Santo Domingo Savio, Güepsa.

1.3.2. Prueba Final: 3 de noviembre

1. Sobre cada lado de un octágono regular se construyen triángulos equiláteros sombreados, como se muestra en la figura. Si el perímetro del octágono es $16\,cm$, ¿cuál es el perímetro de la estrella que se forma en su interior?



2. La profesora de matemáticas le pide a Carlitos representar en el ábaco el siguiente número romano:

CDXXXV

(a) ¿Cuántos aros necesita Carlitos para representar este número en el ábaco?

(b) ¿Cuál es el residuo de dividir este número entre 3?

3. Un panadero tiene un pedido de 200 donas para la feria del pueblo. El proceso de hacer las donas se divide en tres actividades, como sigue:

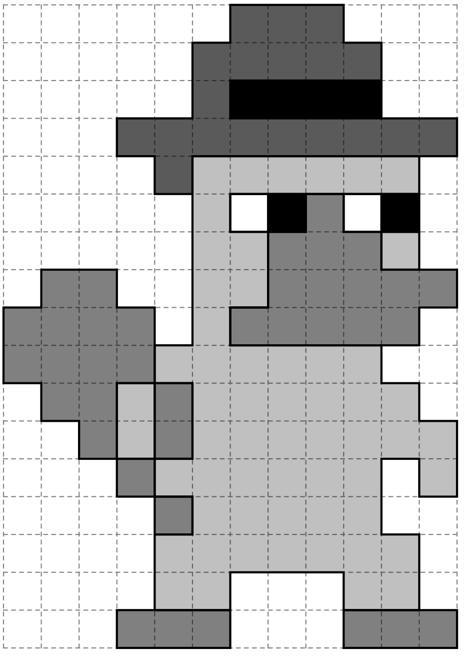
Actividad	**Tiempo**	**Cantidad**
Preparación de la masa	15 min	50
Horneado	10 min	20
Relleno	1 min	2

Si el panadero hace una sola actividad a la vez, ¿cuánto tiempo necesita el panadero para terminar su pedido?

4. Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado **II** depende de la respuesta del enunciado **I** y el enunciado **III**, de la respuesta del enunciado **II**. En la hoja de respuestas, escriba el procedimiento y la respuesta de cada enunciado en los recuadros correspondientes.

   I. Emiliano tiene cuatro afiches de sus caricaturas favoritas para decorar su habitación. Si su habitación tiene cuatro paredes y quiere pegar un afiche en el centro de cada pared, de cuántas formas puede Camilo decorar su habitación?

   II. La siguiente figura muestra el afiche de Perry el ornitorrinco, la caricatura favorita de Emiliano. Si la longitud del lado más corto del afiche, en centímetros, coincide con el número de la respuesta del ítem anterior, ¿cuál es el perímetro del dibujo de Perry?



   III. La edad de Emiliano coincide con la suma de las cifras del número de la respuesta del ítem anterior, ¿cuál es la edad de Emiliano?

1.3.3. Solución

1. Como los triángulos sombreados son equiláteros y sus lados miden lo mismo que los lados del octágono regular, se puede ver que el perímetro de la estrella que se forma en el interior del octágono es dos veces el perímetro del octágono. Dado que el perímetro del octágono es $16\,cm$, entonces el perímetro de la estrella es $32\,cm$.

2. Note que

$$\underbrace{CD}_{400}\underbrace{XXX}_{30}\underbrace{V}_{5}$$

Como el sistema de numeración romano es aditivo, entonces el número romano $CDXXXV$ corresponde a 435 en números arábigos. De modo que para su representación en el ábaco son necesarios 5 aros para las unidades, 3 aros para las decenas y 4 aros para las centenas; en total 12 aros. Además, el número 435 es múltiplo de 3 ya que la suma de sus cifras es 12 que es un múltiplo de 3. Por tanto, deja residuo 0 al dividirse por 3.

3. El pedido que debe entregar el panadero es de 200 donas. Si en 15 minutos prepara la masa para 50 donas, entonces en 60 minutos prepara la masa para 200 donas, esto porque es cuatro veces lo que prepara en 15 minutos. Del mismo modo, se tiene que para hornear las 200 donas necesita 100 minutos, y para hacer el relleno de 200 donas necesita 100 minutos. Luego el tiempo necesario para tener listo el pedido es $60 + 100 + 100 = 260$ minutos.

4. **I.** Para determinar el número de formas diferentes para decorar usaremos el principio de multiplicidad. Dado que Emiliano tiene 4 afiches, se tiene que

$$\underbrace{4 \text{ opciones}}_{Pared\ 1} \times \underbrace{3 \text{ opciones}}_{Pared\ 2} \times \underbrace{2 \text{ opciones}}_{Pared\ 3} \times \underbrace{1 \text{ opción}}_{Pared\ 4}.$$

Luego el número de formas en que puede decorar su habitación es $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

II. Por el ítem anterior concluimos que la longitud del lado más corto del afiche es $24\,cm$. Como este lado está formado a su vez por 12 lados de cuadrados de la cuadrícula, se deduce que la longitud del lado de cada cuadrado de la cuadrícula es $2\,cm$. Ahora, el contorno de Perry está formado por 84 de estos lados, por tanto el perímetro de la figura de Perry es $2 \times 84 = 168\,cm$.

III. Finalmente, la edad de Emiliano es $1 + 6 + 8 = 15$ años.

Capítulo 2

Nivel Medio

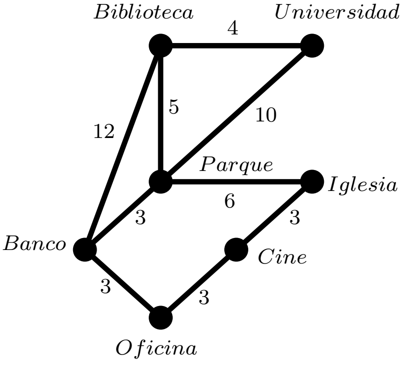
2.1. Prueba Clasificatoria

2.1.1. Prueba Clasificatoria: 12 de septiembre.

1. ¿Cuál es la suma de los primeros cinco números primos?

(a) 26 (b) 18 (c) 28 (d) 25

2. En el siguiente mapa los puntos representan algunos lugares cercanos a la oficina de Pablo y los segmentos representan los posibles caminos que los conectan; además el número en cada segmento indica el tiempo en minutos que tarda Pablo en ir de un lugar al otro por tal camino. ¿Cuál es el menor tiempo que puede tardar Pablo para ir de su oficina a la Universidad?

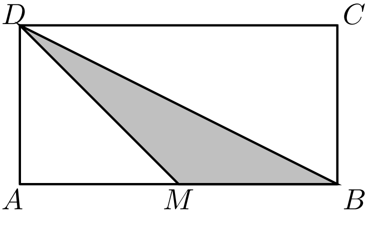


(a) 11 minutos (b) 22 minutos (c) 15 minutos (d) 16 minutos

3. Juan estaba leyendo su libro de matemáticas y notó que el producto de los números de las páginas donde estaba abierto era 132. ¿Cuál es la suma de estos números?

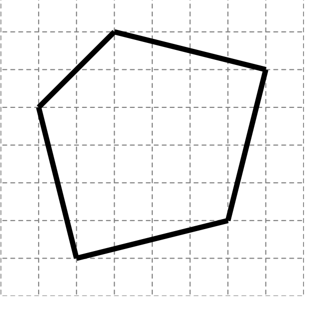
(a) 23 (b) 28 (c) 37 (d) 47

4. En la siguiente figura el rectángulo $ABCD$ tiene $22\,cm$ de perímetro. Si el lado $\overline{AB}$ mide $8\,cm$ y M es el punto medio de $\overline{AB}$, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?



(a) $6\,cm^2$ (b) $8\,cm^2$ (c) $12\,cm^2$ (d) $24\,cm^2$

5. Si el área de la siguiente figura es $100\,cm^2$, ¿cuál es el área de cada cuadrado de la cuadrícula?



(a) $2\,cm^2$ (b) $1\,cm^2$ (c) $5\,cm^2$ (d) $4\,cm^2$

6. En una fábrica de dulces hacen un chocolate sencillo por minuto y un chocolate con relleno cada 2 minutos. ¿Cuántos chocolates habrán hecho al cabo de una hora?

(a) 120 (b) 90 (c) 60 (d) 30

7. ¿De cuántas formas se pueden tomar de la mano tres niños para formar una ronda?

(a) 3 (b) 5 (c) 2 (d) 6

8. Se juntan, sin sobreponerse, 12 fichas cuadradas cada una con perímetro $12\,cm$, para formar una placa rectangular sin huecos, tal que uno de sus lados mide 12 cm. ¿Cuál es el perímetro de la placa?

(a) $21\,cm$ (b) $26\,cm$ (c) $36\,cm$ (d) $42\,cm$

9. Tres animales van a subir una escalera que tiene 61 escalones numerados del 1 al 61. Los animales inician en el primer escalón y suben de la siguiente manera: la rana sube dejando un escalón de por medio, el conejo sube dejando dos escalones de por medio y el canguro sube dejando tres escalones de por medio. ¿Cuál es la suma de los números de los escalones que pisaron en común los tres animales?

(a) 186 (b) 180 (c) 72 (d) 76

2.1.2. Solución

1. Un número primo es un número natural mayor que 1 que tiene únicamente dos divisores distintos: él mismo y el 1. De modo que los primeros cinco números primos son: 2, 3, 5, 7 y 11. Así que su suma es

$$2 + 3 + 5 + 7 + 11 = 28.$$

2. Considere la siguiente tabla, en la que se registran las rutas que puede tomar Pablo para ir desde su Oficina O a la Universidad U y el tiempo empleado en cada una de ellas:

Ruta	**Tiempo**
O → Cine → Iglesia → Parque → U	22 min
O → Cine → Iglesia → Parque → Biblioteca → U	21 min
O → Banco → Biblioteca → U	19 min
O → Banco → Parque → U	16 min
O → Banco → Parque → Biblioteca → U	15 min

Por lo tanto, el menor tiempo que puede tardar Pablo para ir de su oficina a la Universidad es de 15 minutos.

3. Las siguientes son todas las formas de escribir 132 como producto de dos números naturales:

- 1×132
- 3×44
- 6×22
- 2×66
- 4×33
- 11×12

Pero como se trata de los números de dos páginas consecutivas, la única opción que funciona es la última. Entonces, las páginas tienen los números 11 y 12, y la suma de estos números es $11 + 12 = 23$.

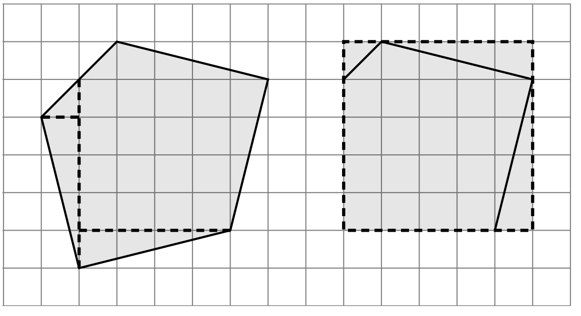
4. Como $ABCD$ es un rectángulo, entonces $AB = DC$ y $AD = BC$. Teniendo en cuenta que $AB = 8\,cm$ y que el perímetro del rectángulo es $22\,cm$, entonces $AD + BC + 8 + 8 = 22\,cm$, lo cual nos indica que

$AD + BC = 6\,cm$, de aquí que $AD = BC = 3\,cm$. Además, como M es el punto medio de $\overline{AB}$, se tiene que $AM = MB = 4\,cm$.

Por último, observe que $\overline{AD}$ es la altura del triángulo sombreado respecto a la base $\overline{MB}$, por lo tanto su área es:

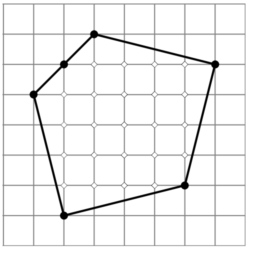
$$\frac{MB \times AD}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6\,cm^2.$$

5. **Solución** 1. Cortando adecuadamente la figura del problema se puede completar un cuadrado, como se muestra en la siguiente figura:



Note que el área de las dos figuras es equivalente. Además la figura de la derecha está formada por exactamente 25 cuadrados de la cuadrícula dada y como el área de la figura de la izquierda es $100\,cm^2$, entonces el área de cada cuadrado de la cuadrícula es $100 \div 25 = 4\,cm^2$.

Solución 2. Observe que el número de vértices de la cuadrícula que están sobre el contorno de la figura es 6 y el número de vértices de la cuadrícula que están en el interior de la figura es 23.



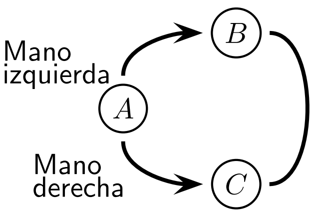
Así, por la fórmula de Pick, tenemos que el área de la figura trazada sobre la cuadrícula equivale al área de

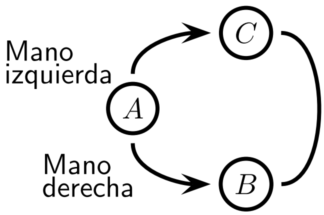
$$\frac{6}{2} + 23 - 1 = 25$$

cuadrados de la cuadrícula. Sabiendo que el área de toda la figura es $100\,cm^2$, concluimos que el área de cada cuadrado es $100 \div 25 = 4\,cm^2$.

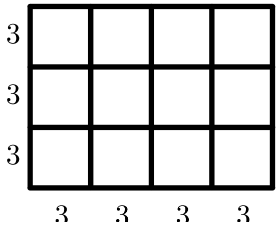
6. Una hora tiene 60 minutos. Como en la fábrica hacen un chocolate sencillo cada minuto y un chocolate relleno cada dos minutos, entonces en una hora hacen 60 chocolates sencillos y 30 chocolates rellenos, es decir en una hora hacen $60 + 30 = 90$ chocolates en total.

7. Llamemos A, B y C a los tres niños. Fijando el niño A tenemos que las posibilidades para formar la ronda con los tres niños son 2 : que B tome la mano izquierda de A y C, la derecha; o que B tome la mano derecha de A y C, la izquierda; como se ilustra en las siguientes figuras:





8. Note que si cada cuadrado tiene $12\,cm$ de perímetro, entonces cada uno de sus lados mide $3\,cm$. Por lo tanto, para que uno de los lados de la placa mida $12\,cm$ es necesario juntar 4 cuadrados en fila y los demás sobre ellos como se ilustra en la figura, para formar la placa rectangular según las condiciones del enunciado



Por lo tanto, el perímetro de la placa es: $12 + 9 + 12 + 9 = 42\,cm$.

9. Las secuencias de abajo muestran los escalones pisados por cada animal hasta llegar al escalón 61. Los números encerrados corresponden a los escalones que fueron pisados en común

$$\textbf{Rana: } 1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 9 \to 11 \to 13 \to 15 \to 17 \to 19 \to 21 \to 23 \to 25 \to 27 \to 29 \to 31 \to 33 \to 35 \to 37 \to 39 \to 41 \to 43 \to 45 \to 47 \to 49 \to 51 \to 53 \to 55 \to 57 \to 59 \to 61$$

$$\textbf{Conejo: } 1 \to 4 \to 7 \to 10 \to 13 \to 16 \to 19 \to 22 \to 25 \to 28 \to 31 \to 34 \to 37 \to 40 \to 43 \to 46 \to 49 \to 52 \to 55 \to 58 \to 61$$

$$\textbf{Canguro: } 1 \to 5 \to 9 \to 13 \to 17 \to 21 \to 25 \to 29 \to 33 \to 37 \to 41 \to 45 \to 49 \to 53 \to 57 \to 61$$

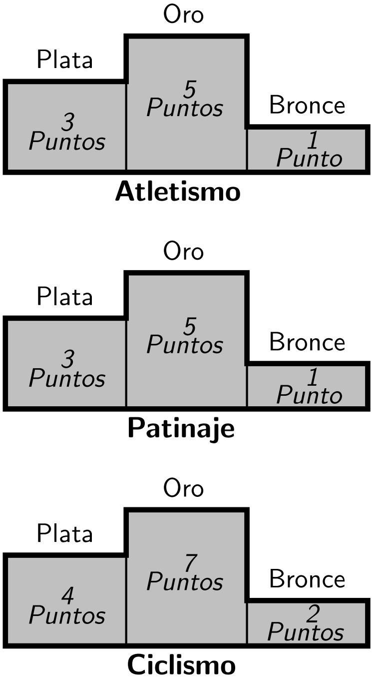
Así, la suma de los números de los escalones que pisaron en común los tres animales es:

$$1 + 13 + 25 + 37 + 49 + 61 = 186.$$

2.2. Prueba Selectiva

2.2.1. Prueba Selectiva: 5 de octubre

1. Jairo, Lucía y Carlos compiten entre sí, en tres pruebas deportivas: atletismo, patinaje y ciclismo. El puntaje con respecto al puesto de cada prueba se muestra a continuación:



Sabiendo que en las pruebas no hay empates y que el campeón es quien sume más puntos en las tres pruebas, podemos asegurar que Jairo es el campeón si

(a) Jairo gana medalla de oro en dos pruebas.

(b) Jairo gana la medalla de oro en Ciclismo y la de plata en patinaje y atletismo.

(c) Carlos gana medalla de oro en todas las pruebas.

(d) ni Carlos ni Lucía ganan medalla de oro en Ciclismo y patinaje.

2. Dentro de una bolsa se encuentran unos papelitos enumerados del 1 al 20. Juan saca de esta bolsa dos papeles cada uno con su respectivo número y le pide a su primo que adivine el resultado de multiplicar estos dos números; para ello le da unas pistas:

- *uno de los números es múltiplo de* 5 *y el otro es múltiplo de* 6.
- *la suma de los números es un múltiplo de* 11.
- *el máximo común divisor de los números es* 3.

¿Cuál es el producto de los dos números escritos en los papelitos extraídos por Juan?

(a) 30

(b) 120

(c) 180

(d) 270

3. Tomás salió de su casa a las $6{:}00\,a.m.$ Si el minutero de su reloj se desplazó 60 grados durante el trayecto de su casa al colegio, ¿a qué hora llegó Tomás al colegio?

(a) $6{:}10\,a.m.$

(b) $7{:}00\,a.m.$

(c) $6{:}01\,a.m.$

(d) $7{:}10\,a.m.$

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

4. Escribimos 9 números naturales consecutivos y la suma de los primeros tres es 36. ¿Cuál es el resultado de la suma de los tres últimos?

5. Andrés sabe que la clave de desbloqueo del celular de su amigo Federico es un número de tres cifras múltiplo de 15, tal que sus cifras son impares. ¿Cuántos intentos son suficientes para que Andrés pueda desbloquear el celular de Federico?

6. De cuatro tablas cuadradas de madera, con perímetro $8\,m$, se cortan cuatro piezas como se muestra en la Figura 1, para formar el marco de un espejo como el que se muestra en la Figura 2. Si en la Figura 1. M y N son los puntos medios $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, ¿cuál es área que cubre el espejo con el marco sobre la pared?

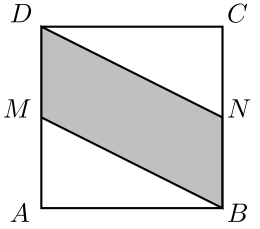


Figura 1.

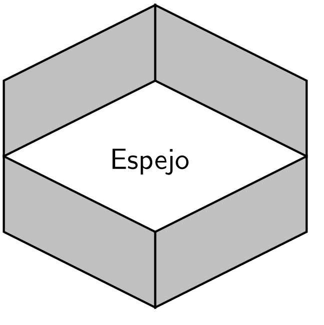


Figura 2.

2.2.2. Solución

1. A continuación se analiza cada una de las opciones de respuesta.

(a) No es suficiente que *Jairo gane medalla de oro en dos pruebas* para llegar a ser campeón, ya que si Jairo gana medalla de oro en atletismo y en patinaje, y en ciclismo gana medalla de bronce, haría un total de 11 puntos. Por otro lado, si Lucía gana medalla de plata en atletismo y en patinaje, y obtiene una medalla de oro en ciclismo haría un total de 13 puntos, superando el puntaje de Jairo.

(b) Tampoco es suficiente que *Jairo gane la medalla de oro en Ciclismo y la de plata en patinaje y atletismo*, pues si Carlos gana la medalla de oro en atletismo y patinaje, y gana medalla de plata en ciclismo haría 14 puntos, superando el puntaje de Jairo (13 puntos).

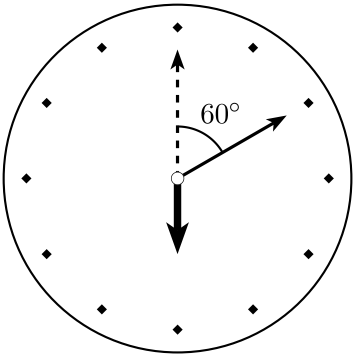
(c) Si *Carlos gana medalla de oro en todas las pruebas* entones, el campeón sería Carlos y no Jairo.

(d) Finalmente, si *ni Carlos ni Lucía ganan medalla de oro en ciclismo y patinaje* entonces, aunque Jairo gane la medalla de bronce en atletismo haría un puntaje de 13, y en estas condiciones no hay ningún caso en el que sus amigos puedan superarlo en puntos.

2. La primera condición junto a la última indican que uno de los números es múltiplo de 15, pero el único múltiplo de 15 que está en la bolsa es el 15, de modo que este es uno de los números.

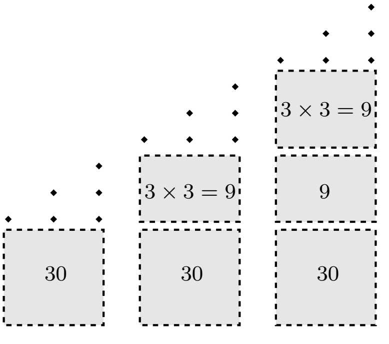
La primera condición también dice que el otro número es múltiplo de 6 y los múltiplos de 6 que están en la bolsa son: 6, 12 y 18. Ahora por la segunda condición debemos tener en cuenta que al sumar el segundo con 15, el resultado debe ser un múltiplo de 11; esto solo ocurre con el número 18, puesto que $15 + 18 = 33$ y así obtenemos que los dos números escritos en los papelitos extraídos son 15 y 18, cuyo producto es 270.

3. Como el minutero del reloj da una vuelta completa en 60 minutos, es decir barre un ángulo de $360°$ en 60 minutos, entonces en un minuto el minutero barre un ángulo de $\dfrac{360°}{60} = 6°$. De modo que, si después de las $6:00\,a.m$ se ha movido $60°$ es porque han pasado 10 minutos; lo que indica que Tomás llegó al colegio a las $6{:}10\,a.m$.



4. **Solución** 1. Por inspección buscamos tres números consecutivos cuya suma sea 36 y encontramos que estos son: 11, 12 y 13. Por lo tanto los últimos tres de estos nueve números consecutivos son: 17, 18 y 19 cuya suma es 54.

Solución 2. Considere la siguiente gráfica en la que se han representado los 9 números consecutivos como columnas de puntos que han sido tapadas, en parte, con algunos rectángulos. Sobre los rectángulos se escribe el número de puntos que cada uno "tapa".

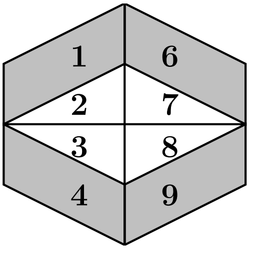


Observe que en las primeras tres columnas (de izquierda a derecha) hay 36 puntos, según lo indica el enunciado. De modo que, como se ilustra en la gráfica, en las tres últimas columnas habrá $30 + 9 + 9 + 6 = 54$ puntos, lo que equivale a la suma de los tres últimos números.

5. Como la clave es un número de tres cifras múltiplo de 15, entonces es múltiplo de 3 y 5. Por ser múltiplo de 5, el dígito de las unidades puede ser 0 o 5, pero todos los dígitos de la clave son impares, luego el dígito de las unidades es 5. Ahora como el número es múltiplo de 3, la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Además, por la condición de que sus cifras son impares, entonces las decenas y centenas solo pueden tomar los valores: 1, 3, 5, 7 y 9. Teniendo en cuenta lo anterior los posibles números para la clave del celular de Federico son: 135, 315, 195, 915, 555, 375, 735, 795 y 975. Por lo tanto, 9 intentos son suficientes para que Andrés pueda desbloquear el celular de Federico.

6. Como los cuadrados de madera de la Figura 1 tienen $8\,m$ de perímetro, entonces cada lado mide $2\,m$. Así, el área del cuadrado es $2 \times 2 = 4\,m^2$. Además, como M y N son los puntos medios de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, el área sombreada de la Figura 1 equivale a la mitad del área del cuadrado, es decir, $2\,m^2$.

Consideremos ahora la siguiente construcción auxiliar:



Con las secciones 1, 2 y 3 podemos formar un cuadrado, al igual que con la secciones 6, 7 y 8. Mientras cada una de las regiones 4 y 9 tiene $2\,m^2$ de área. Por lo tanto, el área que cubre el espejo con el marco en la pared es:

$$4\,m^2 + 4\,m^2 + 2\,m^2 + 2\,m^2 = 12\,m^2.$$

2.3. Prueba Final

2.3.1. Resultados

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la séptima versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Primaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 512 participantes del certamen en el nivel Medio, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

CUADRO DE HONOR

1^{er} Puesto, medalla de oro

JOSÉ MANUEL ASCUNTAR QUIÑONEZ

Fundación Colegio UIS, Floridablanca.

2^{o} Puesto, medalla de plata

DAVID LEONARDO BOTELLO JAIMES

Fundación Colegio UIS, Floridablanca.

3^{er} Puesto, medalla de bronce

DAVID ALEJANDRO CONTRERAS RAMÍREZ

Institución Educativa Infantas, Barrancabermeja.

4^{o} Puesto

SARA ISABEL PLATA BALLESTEROS

Colegio Jorge Ardila Duarte, Floridablanca.

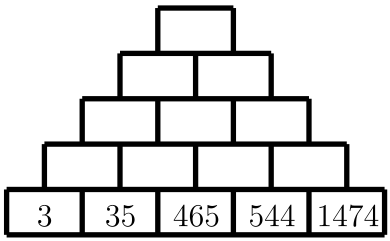
5^{o} Puesto

MARIANA BETANCOURT GRANADOS

Colegio Oficial Nuestra Señora del Rosario, Málaga.

2.3.2. Prueba Final: 3 de noviembre

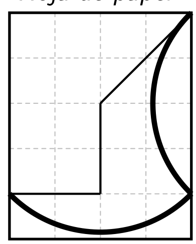
1. La siguiente pirámide tiene 5 niveles. En el primer nivel aparecen 5 números. Completa los números que faltan en cada una de las casillas de los demás niveles operando los dos números de las casillas inmediatamente anteriores con la operación que corresponde a cada nivel, así:



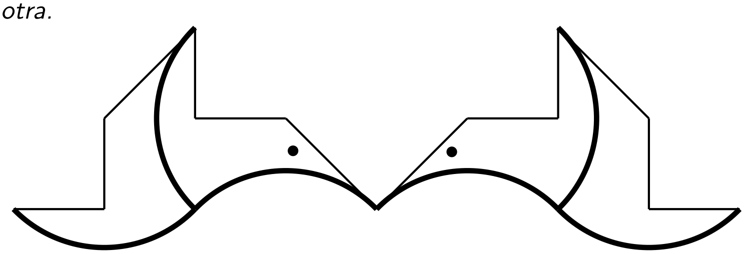
- **Segundo nivel:** *Sumar.*
- **Tercer nivel:** *Hallar el máximo común divisor.*
- **Cuarto nivel:** *Multiplicar.*
- **Quinto nivel:** *Hallar el mínimo común múltiplo.*

2. De cuatro hojas rectangulares de papel cuadriculado Isabella corta cuatro piezas, como se ilustra a la derecha; y las pega en la portada de su diario formando la figura de dos colibríes como se muestra abajo. Si el área de cada hoja de papel es $20\,cm^2$, ¿cuál es el área que cubren los colibríes en la portada del diario?

Hoja de papel



Nota: *En la figura de la derecha las curvas resaltadas se obtiene una por rotación de la otra.*

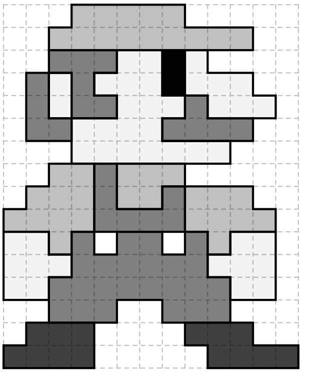


3. David se desplaza por las escaleras de su edificio de una manera muy particular: por cada dos escalones que sube, baja uno y el tiempo que gasta en subir o bajar un escalón es el mismo. De esta manera David demora 172 segundos para ir desde el primer al segundo piso del edificio. Si entre el primer y segundo piso del edificio hay 30 escalones, ¿cuánto demora David en subir un escalón?

4. Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado **II** depende de la respuesta del enunciado **I** y el enunciado **III**, de la respuesta del enunciado **II**. En la hoja de respuestas, escriba el procedimiento y la respuesta de cada enunciado en los recuadros correspondientes.

   I. Lucía lista en su agenda todos los números pares de dos cifras que se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 4 y 6. ¿Cuántos números tiene la lista de Lucía?

   II. Diego colorea la figura de Mario Bros sobre una cuadrícula como se muestra en la imagen. Si el área, en centímetros cuadrados, de cada cuadradito de la cuadrícula coincide con la respuesta del ítem anterior, ¿cuál es el perímetro de la figura de Mario Bros?



   III. El total de niños y niñas que asistieron a una fiesta de Halloween coincide con la respuesta del ítem anterior. Si se sabe que el número de niñas excede en 20 al número de niños, ¿cuál es la cantidad de niñas que asistieron a la fiesta?

2.3.3. Solución

1. Como $3+35=38$, $35+465=500$, $465+544=1009$ y $544+1474=2018$, entonces los números que van en el segundo nivel de izquierda a derecha son: 38, 500, 1009 y 2018. Por otra parte, note que $\mathrm{mcd}(38,500)=2$, $\mathrm{mcd}(500,1009)=1$ y $\mathrm{mcd}(1009,2018)=1009$; luego los números que van en el tercer nivel de izquierda a derecha son: 2, 1 y 1009. Además $2\times 1=2$ y $1\times 1009=1009$; luego los números del cuarto nivel son: 2 y 1009. Finalmente, $\mathrm{mcm}(2,1009)=2018$ es el número del quinto nivel.

2018
2 | 1009
2 | 1 | 1009
38 | 500 | 1009 | 2018
3 | 35 | 465 | 544 | 1474

2. Note que el área de cada figura que cortó Isabella es $6\,cm^2$ (completando el vacío de la circunferencia con el segmento de circunferencia inferior, esto se puede hacer debido a que las curvas se obtienen una por rotación de la otra). Así el área que cubren los colibríes, equivalente al de las cuatro piezas papel, es: $6\times 4=24\,cm^2$.

3. Al subir 2 escalones y bajar 1, recorre 3 pero avanza 1. Esto lo hará hasta el escalón 28, recorriendo $28\times 3=84$ escalones. Como al subir 2 escalones llega al segundo piso, entonces recorre 86 escalones en 172 segundos. Por lo tanto, se demora $\dfrac{172}{86}=2$ segundos por escalón.

4. **I.** La cifra de las decenas de los números de la lista de Lucía debe ser 1, 2, 4 o 6; mientras que la cifra de las unidades debe ser 0, 2, 4 o 6, pues son pares. De modo que la cifra de las decenas se puede escoger de 4 formas y la cifra de las unidades también de 4 formas, es decir, la lista de Lucía tiene $4\times 4=16$ números.

$$\underbrace{4\ opciones}_{decenas}\times\underbrace{4\ opciones}_{unidades}=\underbrace{4\times4=16.}_{numeros}$$

A continuación se listan dichos números:

10	12	14	16
20	22	24	26
40	42	44	46
60	62	64	66

II. El área de cada cuadradito de la cuadrícula es igual a $16\,cm^2$, es decir el lado de cada cuadradito es igual a $4\,cm$. Por lo tanto el perímetro de la figura de Mario Bros es $88 \times 4\,cm = 352\,cm$.

III. El total de niños y niñas que asistieron a la fiesta de Halloween es 352. La cantidad de niñas excede en 20 al número de niños, es decir que si se resta $352 - 20 = 332$, se obtiene la misma cantidad de niños que de niñas, por tanto $332 \div 2 = 166$ indica la cantidad de niños en la fiesta, así la cantidad de niñas en la fiesta es $166 + 20 = 186$.

Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

3.1.1. Prueba Clasificatoria: 12 de septiembre.

1. ¿A qué número es igual la siguiente expresión?

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

(a) 2 $\qquad$ (b) $\frac{1}{2}$ $\qquad$ (c) $\frac{2}{3}$ $\qquad$ (d) $\frac{3}{2}$

2. Sobre un pasillo recto se encuentra extendida una alfombra roja rectangular de $3\,m$ de ancho. Si el área del piso del pasillo cubierto por la alfombra es de $300\,m^2$, ¿cuál es la longitud, en metros, del pasillo?

(a) 100 $\qquad$ (b) 103 $\qquad$ (c) 206 $\qquad$ (d) 300

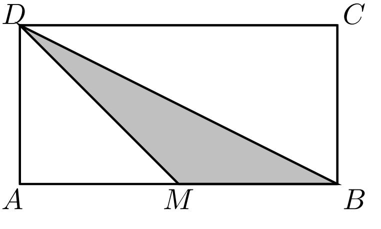
3. Sofía sabe que los elefantes pueden vivir a lo más 70 años. Un día va al zoológico y descubre que las edades de dos elefantes, madre e hija, satisfacen las siguientes condiciones:

- Una de las edades termina en 3.
- La diferencia de sus edades es 36 años.
- La suma de sus edades es igual a 90 años.

Con la información suministrada por Sofía, ¿cuál es el máximo común divisor entre ambas edades?

(a) 1 (b) 3 (c) 7 (d) 9

4. En la siguiente figura el rectángulo $ABCD$ tiene $22\,cm$ de perímetro. Si el lado $\overline{AB}$ mide $8\,cm$ y M es el punto medio de $\overline{AB}$, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?



(a) $6\,cm^2$ (b) $8\,cm^2$ (c) $12\,cm^2$ (d) $24\,cm^2$

5. Camila quiere elegir una clave de cuatro dígitos para su celular de tal manera que sus dígitos sean impares y que el número resultante se lea igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. ¿Cuántas posibilidades tiene Camila para elegir la clave?

(a) 20 (b) 25 (c) 30 (d) 36

6. Se traza una figura sobre una cuadrícula. Si el lado de cada cuadrado de la cuadrícula midiera 2 cm, el área de la figura sería 100 cm^2. Pero si el lado de cada cuadrado de la cuadrícula mide 3 cm, entonces el área de la figura es:

(a) $25\,cm^2$ (b) $75\,cm^2$ (c) $150\,cm^2$ (d) $225\,cm^2$

7. La torta del cumpleaños de Pipe había sido dividida en 20 partes iguales, pero a la fiesta solo fueron 16 personas, si cada persona consumió un solo pedazo de torta ¿qué fracción de torta sobró?

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{16}{20}$ (d) $\frac{20}{4}$

8. En un colegio, se desea formar a todos los estudiantes de cada grado en filas con el mismo número de estudiantes. Se sabe que

- los estudiantes de 3° se pueden formar en filas de a 3 o de a 7 estudiantes,
- los estudiantes de 4° se pueden formar en filas de a 5 o de a 6 estudiantes, y
- los estudiantes de 5° se pueden formar en filas de a 4 o de a 7 estudiantes.

Es correcto afirmar que:

(a) en 3° es donde hay menos estudiantes.

(b) en 4° hay exactamente 30 estudiantes.

(c) en 4° se pueden formar filas de 9 estudiantes y sobran 3 estudiantes.

(d) en 5° se pueden formar filas de 14 estudiantes sin que sobre alguno.

9. Manuel compró una mesa redonda con cuatro sillas enumeradas, en el sentido de las manecillas del reloj, del 1 al 4. El 1 de septiembre Manuel se sienta en la silla 1 y los demás días cambia su asiento moviéndose en el sentido de las manecillas del reloj tantos asientos como indique el día del mes en que está. ¿Cuál es el número de la silla en la que se sentó Manuel el 10 de septiembre?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

3.1.2. Solución

1. Un cálculo directo muestra que:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{2-1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{1}=2.$$

2. Dado que el área de un rectángulo se calcula mediante el producto de la medida de su base y la medida de su altura, el problema se reduce a encontrar un número cuyo resultado al multiplicarse por 3 sea 300. Tal número es 100.

3. Primero se debe encontrar el valor de las edades de las elefantas. Se sabe que los elefantes no viven más de 70 años. Con base en esto, junto con el hecho que una de las edades tiene como último dígito 3, se puede concluir que las posibles edades de una elefanta son: 3, 13, 23, 33, 43, 53 y 63. Debido a que la suma de sus edades es 90, la hija no puede tener 3 ni 13 años de edad, pues en ambos casos la madre tendría más de 70 años. Si alguna de las edades fuera 23, 33, 43 o 53, entonces la otra edad debería ser 67, 57, 47 o 37, respectivamente. Pero estas opciones se pueden descartar porque la diferencia entre ellas no es 36.

   La última opción es que las edades de la madre y de la hija sean 63 y 27, respectivamente. No es difícil ver que las condiciones requeridas en el enunciado son satisfechas y efectivamente estas son las edades en cuestión. Finalmente, es fácil calcular el máximo común divisor entre estos dos números, a saber, $\mathrm{mcd}(63, 27) = 9$.

4. Como $ABCD$ es un rectángulo, entonces $AB = DC$ y $AD = BC$. Teniendo en cuenta que $AB = 8\,cm$ y que el perímetro del rectángulo es $22\,cm$, entonces $AD + BC + 8 + 8 = 22\,cm$, lo cual nos indica que $AD + BC = 6\,cm$, de aquí que $AD = BC = 3\,cm$. Además, como M es el punto medio de $\overline{AB}$, se tiene que $AM = MB = 4\,cm$.

Por último, observe que $\overline{AD}$ es la altura del triángulo sombreado respecto a la base $\overline{MB}$, por lo tanto su área es:

$$\frac{MB \times AD}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6\,cm^2.$$

5. Los dígitos que usará Camila son 1, 3, 5, 7 y 9. Como la clave debe leerse igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, basta elegir los dos primeros dígitos, ya que inmediatamente quedan fijos los dos últimos. Entonces el problema se reduce a contar los números de dos cifras formados con estos dígitos. Por el principio multiplicativo, hay un total de $5 \times 5 = 25$, pues cada cifra puede considerarse de 5 formas.

6. Si el lado de cada cuadrado de la cuadrícula es $2\,cm$, entonces cada uno de estos cuadrados tiene $4\,cm^2$ de área. Con esta medida la figura tiene $100\,cm^2$ de área, es decir su área equivale al área de $100 \div 4 = 25$ cuadrados. Ahora, si el lado de cada cuadrado de la cuadrícula mide $3\,cm$, el área de cada cuadrado es $9\,cm^2$, así el área de la figura es

$$9 \times 25 = 225\,cm^2.$$

7. Como la torta fue divida en 20 partes iguales y a la fiesta de Felipe asistieron 16 personas, donde cada una de ellas se comió un solo pedazo de torta, se tiene que la fracción que consumieron fue

$$\frac{16}{20}.$$

Así, la fracción que sobró fue

$$1 - \frac{16}{20} = \frac{1}{5}.$$

8. Determinemos el número de estudiantes que puede haber en los grados tercero, cuarto y quinto.

- En tercero se pueden formar filas de 3 o de 7 estudiantes. Es decir que el número de estudiantes de 3° es un múltiplo común de 3 y 7, luego es múltiplo de $\mathrm{mcm}(3,7) = 21$. Los múltiplos de 21 son: 21, 42, 63, $84, \ldots$

- Análogamente, para grado cuarto se tiene que el número de estudiantes es un múltiplo de $\text{mcm}(5,6) = 30$. Los múltiplos de 30 son: 30, 60, 90, $120, \ldots$
- De igual forma, para grado quinto se tiene que el número de estudiantes es un múltiplo de $\text{mcm}(4,7) = 28$. Los múltiplos de 28 son: 28, 56, 84, $112, \ldots$

A continuación se analiza cada una de las opciones de respuesta:

(a) No es correcto afirmar que *en* 3° *es donde hay menos estudiantes*, pues puede darse el caso en el que en grado tercero haya 42 estudiantes; en grado cuarto, 30 estudiantes y en grado quinto, 28 estudiantes.

(b) No se puede afirmar que *en* 4° *hay exactamente* 30 *estudiantes*, pues como ya vimos en grado cuarto puede haber 30, 60, 90, $120, \ldots$ estudiantes.

(c) Tampoco se puede asegurar que *en* 4° *se pueden formar filas de* 9 *estudiantes y sobran* 3 *estudiantes*, pues si el grado cuarto tuviera 60 estudiantes, al formar filas de 9 estudiantes, sobrarían 6.

(d) Finalmente, note que *en* 5° *se pueden formar filas de* 14 *estudiantes sin que sobre alguno*, pues el número de estudiantes de quinto es múltiplo de 4 y de 7 y por lo tanto de 14. De modo que esta es la opción correcta.

9. Para efectos de entendimiento puede suponerse que la mesa no sea redonda sino recta y enumerada de 1 hasta 100. Dado que Manuel se sienta el 1 de septiembre en la silla 1, el 2 de septiembre en la silla $1+2=3$, el 3 de septiembre en la silla $1+2+3=6$, y así sucesivamente hasta llegar el día 10 de septiembre, el problema entonces se reduce a encontrar la suma de los primeros diez números naturales, a saber, $1+2+3+\cdots+10 = 55$. Ahora bien, volviendo al caso en que la mesa es redonda de 4 puestos, el problema consiste en hallar el residuo que deja dividir 55 entre 4. Tal residuo es 3.

3.2. Prueba Selectiva

3.2.1. Prueba Selectiva: 5 de octubre

1. En una feria hay un juego que consta de un tablero sobre el cual se encuentran distribuidos 20 globos (5 rojos, 5 amarillos, 5 azules y 5 verdes). Sabiendo que Mariana hizo 5 tiros y en cada uno de ellos reventó un único globo, es correcto afirmar que Mariana reventó

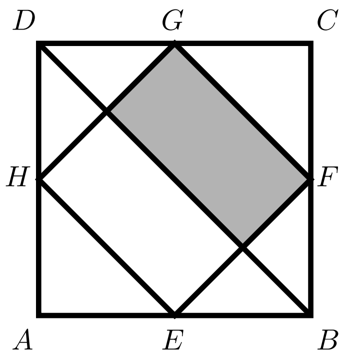
   (a) un globo de cada color.

   (b) por lo menos dos globos del mismo color.

   (c) tres globos del mismo color.

   (d) todos los globos de un solo color.

2. En la siguiente figura E, F, G, H son los puntos medios de los lados del cuadrado $ABCD$. ¿Qué fracción del área del cuadrado $ABCD$ representa el área de la figura sombreada?



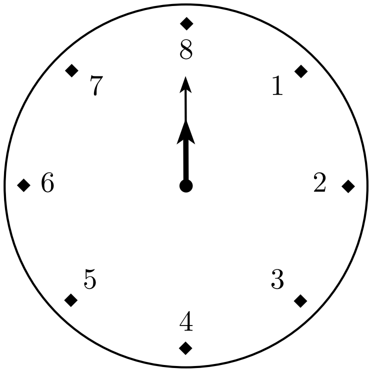
   (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{8}$

3. En un grupo de 6 amigos, todos menos Juan tienen la misma cantidad de juguetes cada uno. Si Juan tiene 2 juguetes más que uno de sus amigos, es correcto afirmar que el número total de juguetes que tienen los 6 amigos es

   (a) 12 (b) 8 (c) divisible entre 2 (d) múltiplo de 3

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

4. Isabella compró un reloj de manecillas muy especial, ya que en lugar de contar hasta 12 horas solo contaba hasta 8, el minutero cambiaba de número cada 5 minutos y el horario cambiaba de número cada vez que el minutero pasaba por el número 8. Cuando Isabella compró el reloj marcaba la hora mostrada en la siguiente figura:



a) Haga un dibujo del reloj de Isabella cuando han pasado 4 horas.

b) Calcule la medida del ángulo menor que forman las mancillas del reloj de Isabella cuando han pasado 4 horas.

5. ¿Cuántas veces se debe doblar por la mitad una hoja de papel, con grosor de $\frac{1}{8}\,cm$, para conseguir un grosor de $8\ cm$?

6. En la siguiente cuadrícula los símbolos ★, ■ y ♣ representan dígitos diferentes de 3.

Columnas

Filas

★	3	♣
2	■	2
★	8	0

En la cuadrícula se cumple que:

- la suma de las cifras de los números que se forman en cada una de las filas es un número primo.
- el número que se forma en la segunda columna es múltiplo de 6.
- el número que se forma en la tercera columna es divisible entre 9.

Si Arthur Ávila, ganador de la medalla Fields, nació el 29 de junio del año

$$\blacksquare\bigstar\clubsuit\bigstar,$$

¿cuál es su edad?

3.2.2. Solución

1. Primero, observe que los literales (a), (c) y (d) no se pueden asegurar, ya que:

- el literal (a) afirma que hay 5 diferentes colores de globos;
- los literales (c) y (d) no consideran, por ejemplo, que los globos que reventó Mariana sean de color: rojo, rojo, amarillo, azul y azul.

Ahora procedemos a justificar que la afirmación del literal (b) es correcta. En efecto, el problema indica que Mariana hizo 5 tiros y en cada uno de ellos reventó un único globo. Además, hay 4 colores diferentes de globos: rojo, amarillo, azul y verde. Por lo tanto es claro que Mariana no reventó 5 globos de diferentes colores. Así las cosas, en el peor de los casos, si Mariana hubiera reventado en sus primeros cuatro tiros 4 globos todos de diferente color, en su quinto tiro necesariamente debió repetir color. Por lo tanto, siempre podemos asegurar que Mariana reventó al menos dos globos de un mismo color.

2. Considere las siguientes figuras:

Figura 1.

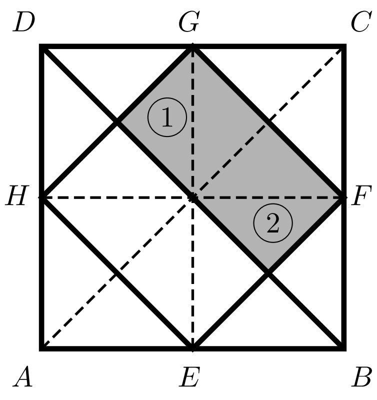
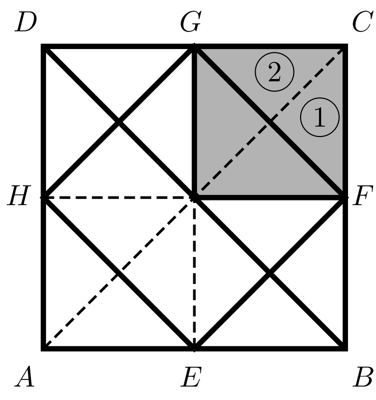


Figura 2.



Solución 1. Trasladando convenientemente las regiones marcadas como 1 y 2 en la Figura 1 obtenemos la Figura 2, en la que se observa que el área sombreada equivale a $\frac{1}{4}$ del área del cuadrado $ABCD$.

Solución 2. En la Figura 1, note que el cuadrado $ABCD$ está dividido en 16 triángulos con igual área, de los cuales 4 forman la región sombreada. Por lo tanto la fracción de área del cuadrado $ABCD$ que está sombreada es $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

3. Como cada uno de los 6 amigos tiene la misma cantidad de juguetes, menos Juan que tiene 2 más que uno de ellos, entonces el número total de juguetes es un múltiplo de 6 más 2 y por lo tanto es par, esto es, divisible entre 2.

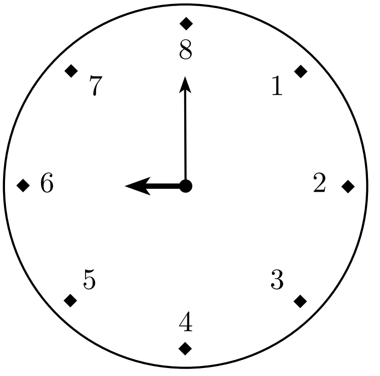
En efecto, sea n el número de juguetes de un amigo de Juan. Entonces el número de juguetes de Juan es $n + 2$, luego el número total de juguetes está dado por:

$$n + n + n + n + n + (n + 2) = 6n + 2 = 2(3n + 1).$$

que es múltiplo de 2. Como ejercicio para el lector se deja probar las demás afirmaciones son falsas.

4. (a) Se puede observar que una vuelta completa del minutero en el reloj especial realmente son 40 minutos; por lo tanto, para que el reloj especial marque una hora real, que son 60 minutos, hacen falta 20 minutos y esto corresponde a media vuelta de las manecillas del reloj especial. Así, por cada hora real, el minutero del reloj especial da una vuelta y media.

De modo que en el reloj especial, luego de 4 horas reales, el minutero ha dado exactamente 6 vueltas, y por tanto, el horario se ha movido 6 números, pasando del 8 hasta el 6, como se muestra en la figura:



(b) En la figura del ítem anterior se observa que las manecillas del reloj especial forman un ángulo $90°$ cuando han pasado 4 horas, desde el momento de la compra. En efecto, como la vuelta completa equivale a $360°$, entonces cada vez que el horario del reloj se mueve de un número a otro barre un ángulo de $\dfrac{360°}{8} = 45°$. Además, vimos que después de las 4 horas el minutero está en su posición inicial y el horario se ha movido 6 números, entonces este último a barrido un ángulo de $45° \times 6 = 270°$. Por lo tanto, la medida del ángulo menor que forman las manecillas del reloj en dicho momento es

$$360° - 270° = 90°.$$

5. Observe la siguiente tabla:

Número de dobleces	Grosor $[cm]$
1	$2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$
2	$2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
3	$2 \times \frac{1}{2} = 1$
4	$2 \times 1 = 2$
5	$2 \times 2 = 4$
6	$2 \times 4 = 8$

Por lo tanto, para tener un grosor de $8\,cm$, se debe doblar el papel 6 veces.

6. Dado que el número que se forma en la tercera columna es múltiplo de 9, la suma $\clubsuit + 2 + 0$ debe ser un múltiplo de 9. La única posibilidad en este caso es que $\clubsuit = 7$. Ahora, en vista que la suma de los dígitos en cada fila es un número primo, se tiene de la primera y tercera fila que debe hallarse el valor de $\bigstar$ de manera que las sumas abajo sean números primos:

$$\text{Fila } 1: \quad \bigstar + 3 + 7 = \bigstar + 10.$$
$$\text{Fila } 3: \quad \bigstar + 8 + 0 = \bigstar + 8.$$

En la Fila 1, los posibles valores para $\bigstar$ son 1, 3, 7 y 9. En la Fila 2, los posibles valores para $\bigstar$ son 3, 5 y 9. Ya que el enunciado pide que $\bigstar$ sea distinto de 3, se concluye que $\bigstar = 9$. Finalmente, se usa el hecho que el número $\blacksquare\bigstar\clubsuit\bigstar$ representa la fecha de nacimiento de Arthur Ávila para deducir que $\blacksquare = 1$. De este modo el número que se forma en la Columna 2 es 318 el cual es par y cuyas cifras suman 12, haciéndolo múltiplo de 6, y el número que se forma en la Fila 2 es 212, cuyas cifras suman 5, el cual es un número primo.

En conclusión, se tiene que $\blacksquare = 1, \bigstar = 9$ y $\clubsuit = 7$, y por tanto Arthur Ávila nació el 29 de junio de 1979. Con esta información se deduce que a la fecha (5 de octubre de 2018) Arthur tiene 39 años de edad.

3.3. Prueba Final

3.3.1. Resultados

El Comité Organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se enorgullece de felicitar por su meritoria participación y excelente desempeño a lo largo de la séptima versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS - Primaria, a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 595 participantes del certamen en el nivel Avanzado, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final, así:

CUADRO DE HONOR

1^{er} Puesto, medalla de oro

JUAN JOSÉ PELAYO GALVIS

Colegio La Buena Semilla, Socorro.

2^{o} Puesto, medalla de plata

SARA LUCÍA REYES GONZALES

ASPAEN Gimnasio Cantillana, Piedecuesta.

3^{er} Puesto, medalla de bronce

JUAN DIEGO CASTELLANOS PINZÓN

Colegio de La Presentación, Bucaramanga.

4^{o} Puesto

SANTIAGO RINCÓN VILA

Gimnasio San Diego, Floridablanca.

5^{o} Puesto

DANIEL BLANCO GARCÍA

Fundación Colegio UIS, Floridablanca.

3.3.2. Prueba Final: 3 de noviembre

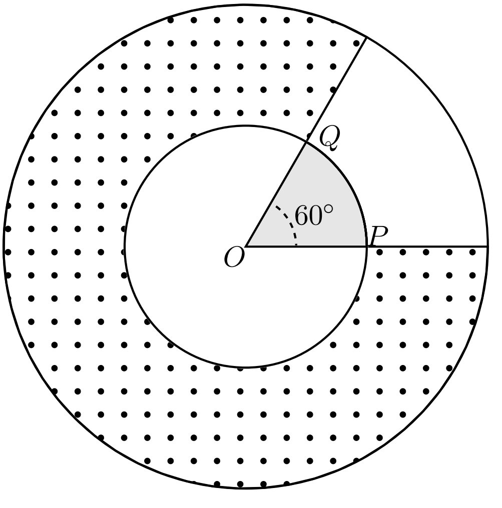
1. Al pasar por una calle de su pueblo, Alison observa el siguiente mensaje en la puerta de un local:

> *Cada vez que entre a este establecimiento duplicaremos el dinero con el que ingresa, pero para entrar debe pagar* $\$150$.

Si al salir 5 veces del local Alison tiene $\$6.700$, ¿con cuánto dinero ingresó la primera vez?

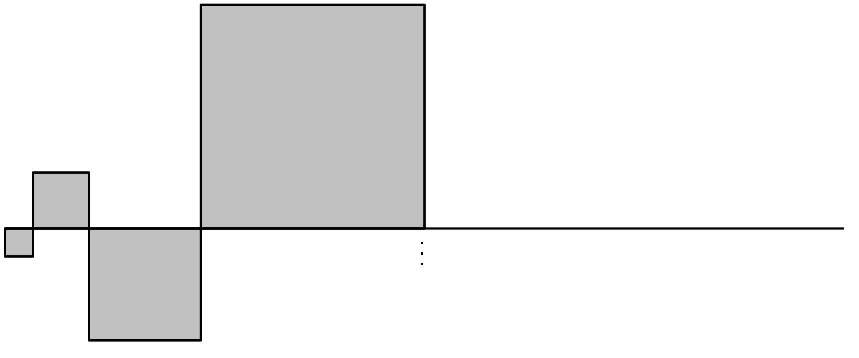
2. Un viejo mago matemático sabe que el número ganador de la lotería es un múltiplo de 3 con cuatro cifras, tal que la suma de sus cifras es múltiplo de 11. ¿Cuál es el número mínimo de boletas que debe comprar el mago para estar seguro de ganar la lotería?

3. En la siguiente figura se muestran dos círculos con centro en O. Se sabe que el área del círculo grande es cuatro veces el área del círculo pequeño. Si el ángulo POQ mide $60°$ y el área de la región sombreada es $1\,cm^2$, ¿cuál es el área de la región punteada?



4. Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado **II** depende de la respuesta del enunciado **I** y el enunciado **III**, de la respuesta del enunciado **II**. En la hoja de respuestas, escriba el procedimiento y la respuesta de cada enunciado en los recuadros correspondientes.

   Sobre un segmento de $63\,cm$ se construyen cuadrados de tal forma que el lado del primer cuadrado mide $1\,cm$, y el lado de cada uno de los demás mide el doble del lado del anterior, como se muestra en la siguiente figura.



I. ¿Cuántos cuadrados se pueden construir sobre dicho segmento?

II. ¿Cuál es el área de la figura que resulta luego de construir todos los cuadrados posibles sobre el segmento?

III. ¿Cuántos divisores primos tiene el número que da el valor del área en el ítem anterior?

3.3.3. Solución

1. **Solución** 1. Al salir la quinta vez Alison tiene $6.700; entonces, al salir la cuarta vez debía tener la mitad de ese valor más los $150 que valió la quinta entrada, es decir, tenía $3.500. Haciendo el mismo procedimiento, al salir la tercera vez tiene $1.900, la segunda $1.100 y la primera $700. De modo que antes de ingresar la primera vez tenía $500.

   Solución 2. Sea x la cantidad de dinero que tiene Alison antes de ingresar al local. El siguiente razonamiento muestra la cantidad de dinero con la que sale Alison cada una de las primeras cinco veces, en términos de x:

   $$\begin{aligned} &\text{Salida 1:}\ \ 2(x-150)=2x-300,\\ &\text{Salida 2:}\ \ 2(2x-300-150)=4x-900,\\ &\text{Salida 3:}\ \ 2(4x-900-150)=8x-2100,\\ &\text{Salida 4:}\ \ 2(8x-2100-150)=16x-4500,\\ &\text{Salida 5:}\ \ 2(16x-4500-150)=32x-9300. \end{aligned}$$

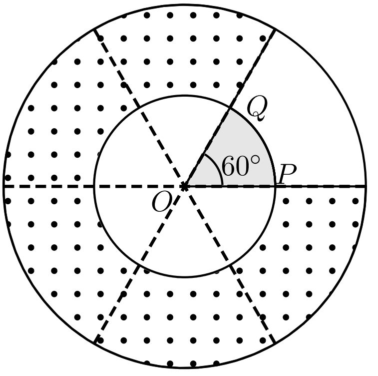
   Se sabe que Alison salió la quinta vez con $6.700, por lo cual se debe tener que

   $$\begin{aligned} 32x-9300&=6{,}700,\\ x&=\frac{6700+9300}{32}. \end{aligned}$$

   Resolviendo esta última fracción se llega a que $x=500$. Así, Alison tenía $500 antes de ingresar la primera vez.

2. Como el número es un múltiplo de 3 y la suma de sus cifras es un múltiplo de 11, aplicando el criterio de división por 3 se tiene que la suma de las cifras también es un múltiplo de 3, y por lo tanto, de 33. A continuación se listan los posibles números de boletos ganadores de la lotería: 9996, 9969, 9699, 6999, 9987, 9978, 9879, 9897, 9789, 9798, 8799, 8979, 8997, 7899, 7989, 7998, 9888, 8988, 8898, 8889. Esto quiere decir que el mago debe comprar un total de 20 boletos para estar seguro que ganará la lotería.

3. Observe la siguiente figura:



Note que, como el ángulo POQ mide $60°$, entonces la región sombreada corresponde a $\frac{1}{6}$ del área total del círculo pequeño, luego el área del círculo pequeño es $1 \times 6 = 6\,cm^2$. Además, el área del círculo grande es cuatro veces el área del círculo pequeño, es decir $6 \times 4 = 24\,cm^2$. Finalmente observe que el área de la región punteada es $\frac{5}{6}$ de la diferencia entre el área del círculo grande y el área del círculo pequeño, es decir:

$$\frac{5}{6} \times (24 - 6) = 15\,cm^2.$$

4. **I.** El segmento dado queda particionado en segmentos cuyas longitudes son potencias de 2 consecutivas, de manera que el problema se reduce a sumar estas potencias hasta que resulte 63. Esto se obtiene en la construcción del sexto cuadrado:

$$\underbrace{1}_{2^0} + \underbrace{2}_{2^1} + \underbrace{4}_{2^2} + \underbrace{8}_{2^3} + \underbrace{16}_{2^4} + \underbrace{32}_{2^5} = 63.$$

II. El área de cada uno de los seis cuadrados es, respectivamente:

$$1, 4, 16, 64, 256, 1024.$$

Al sumar todo se obtiene 1365, que corresponde al área de la figura que se forma.

III. La factorización de 1365 como producto de números primos es $1365 = 3 \times 5 \times 7 \times 13$. Por lo tanto, este número tiene 4 divisores primos.

Bibliografía

[1] BROCHERO F. Y RESTREPO J. *Un recorrido por la Teoría de Números.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[2] GÓMEZ J., VALDEZ R. Y VÁZQUEZ R. *Principio de las Casillas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2011.

[3] HEMMERLING E. *Geometría Elemental.* Bakersfield College. Limusa, México, 2009.

[4] JIMÉNEZ L., GORDILLO J. Y RUBIANO G. *Teoría de números para principiantes.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2004.

[5] MADROÑERO J Y CONTRERAS I. *Un recorrido por el Álgebra.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[6] SOBERÓN P. *Combinatoria para olimpiadas.* Universidad Nacional Autónoma de México, Olimpiada Mexicana de Matemáticas y Sociedad Matemática Mexicana. México, 2010.

[7] RESTREPO P. *Un recorrido por la Combinatoria I.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

Scan me

Informes

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel.: 6344000, exts: 1281-2316, 6450301

Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS