6as Olimpiadas Regionales de Matemáticas

Primaria

Sophie Germain

2017

Sextas Olimpiadas Regionales de Matemáticas Primaria

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga

2017

Elaboración y redacción

Grupo Olimpiadas Regionales de Matemáticas:

Andrés Fabián Leal Archila

Arnoldo Rafael Teherán Herrera

Cristhian Daniel Cáceres Garavito

Edilberto José Reyes González

Gabriel Moncada Santos

Gerson Leonel Barajas Ávila

Jenifer Tatiana Puentes Correa

Jesús Fernando Carreño Díaz

Jorge Eliécer Gómez Ríos

Juan Camilo Cala Barón

Laura Milena Romero Parada

Luis Manuel Ortiz Durán

Santiago Niño Campos

Silvia Juliana Ballesteros Gualdrón

Yerly Vanesa Soler Porras

Yzel Wlly Alay Gómez Espíndola

Presentación

En los últimos años, los nuevos planteamientos de la filosofía de las matemáticas, el desarrollo de la educación matemática y los estudios sobre sociología del conocimiento, entre otros factores, han originado cambios profundos en las concepciones acerca de las matemáticas escolares basadas en considerar el conocimiento matemático como una herramienta potente para el desarrollo de habilidades de pensamiento.

Las Olimpiadas en Matemáticas en la actualidad son conocidas a nivel internacional por la influencia en la transformación del pensamiento matemático, el crecimiento en las expectativas y el interés en aprender matemáticas por parte de los estudiantes. Generalmente las situaciones problemáticas expuestas en las pruebas exponen a los estudiantes a temas que no se estudian en la escuela, y estos incluyen áreas o temas de matemáticas que resultan motivadores y sorprendentes. Así las competencias no solamente prueban de manera directa el conocimiento o las destrezas en matemáticas sino también la habilidad que tiene el estudiante de manejar situaciones más allá de experiencias reales.

Las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander buscan recrear el pensamiento matemático, de tal forma que todos los niños, niñas y jóvenes atraídos(as) por el deseo de enfrentar nuevos retos descubran caminos alternos y flexibilicen la exploración de ideas matemáticas, de tal manera que su participación permita que tanto el estudiante como el docente puedan apreciar sus logros y juzgar su práctica desde una perspectiva nacional e internacional.

Introducción

La Universidad Industrial de Santander como institución de educación superior en el ámbito regional tiene como finalidad “la formación de personas de alta calidad ética, política y profesional; la generación y adecuación de conocimientos; la conservación y reinterpretación de la cultura y la participación activa liderando procesos de cambio por el progreso y mejor calidad de vida de la comunidad.”

Desde sus inicios, la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander ha liderado en forma positiva la actividad matemática del nororiente del país, no sólo por la calidad reconocida a nivel nacional e internacional de los egresados de sus programas académicos de pregrado y posgrado sino también por su participación en la formación de los estudiantes de la universidad. Como parte de su responsabilidad académica y su proyección social frente a las diversas dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje y desarrollo de las habilidades matemáticas en la región, la Escuela de Matemáticas ha definido un proyecto macro de fortalecimiento de las habilidades matemáticas de la comunidad estudiantil de la región, utilizando para este fin, diferentes actividades académicas entre las que se encuentran el proyecto de semilleros, la creación de diplomados y especializaciones para actualización o formación docente y el proyecto de Olimpiadas Regionales de Matemáticas que pretende contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación primaria en la región de incidencia de la UIS, generando un espacio permanente con actividades programadas a lo largo del año que puedan estimular el estudio de las matemáticas y ayudar a la formación de un pensamiento crítico y de un espíritu científico en los niños y niñas, así como al desarrollo de habilidades y destrezas que les permitirán un mejor desempeño en los ámbitos social, académico y familiar.

Este proyecto es pieza clave para mejorar el nivel matemático de los estudiantes de la región, fortalecer la formación académica de los docentes de básica primaria, básica secundaria y media, y muy posiblemente aumentar el número de licenciados en matemáticas y matemáticos en la región, a partir del conocimiento y puesta en práctica de estrategias que mejoren la efectividad del proceso de planteamiento y resolución de problemas.

Las Olimpiadas se realizan en tres niveles de acuerdo al grado de escolaridad de los estudiantes; los niveles son: *básico,* para los estudiantes de grado tercero; *medio,* para los estudiantes de grado cuarto, y *avanzado,* para los estudiantes de grado quinto de primaria.

La Escuela de Matemáticas a través del grupo de Educación Matemática de la UIS-Edumat reconoce la labor esencial del maestro en el proceso de formación de ciudadanos competentes, por ello brinda, tanto a los docentes como a los estudiantes, una forma de vincularse a este mundo y en esta oportunidad lo hace presentando esta cartilla.

Este documento se encuentra divido en tres capítulos; en cada uno de estos se presentan los problemas correspondientes al proyecto de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas Primaria en su sexta versión, con su respectiva solución, en cada uno de los tres niveles, que permiten introducir, desarrollar y reflexionar algunas temáticas específicas de cada área en los diferentes sistemas como lo son el numérico-variacional, el geométrico-métrico y el aleatorio.

En el primer, segundo y tercer capítulo se presentan los problemas con las soluciones, correspondientes al nivel básico, medio y avanzado, respectivamente, en sus diferentes Fases: Clasificatoria, Selectiva y Final; en cada una de las tres áreas: teoría de números y combinatoria; álgebra y lógica; y geometría. Además, se adjuntan los nombres de los estudiantes con los mejores cinco puntajes en la fase final.

Se espera que este material sea del agrado de estudiantes, docentes y cualquier persona interesada en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a través del enfoque de planteamiento y resolución de problemas.

Marie Sophie Germain, una mujer tenaz

Sophie Germain se destacó por ser una mujer obstinada, tenaz y autodidacta, que a sus 13 años decidió dedicar su vida al estudio de las matemáticas, a pesar de la oposición de sus padres y la discriminación vivida en la sociedad por la condición de ser mujer. Su vida es, ha sido y será un ejemplo de tenacidad y dedicación. Por tal razón, decidimos considerarla como nuestro personaje en esta versión de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas Primaria UIS y realizar esta breve reseña acerca de su vida y su mayor aporte a las Matemáticas.

Sophie Germain nació el primero de abril de 1776 en París, Francia (sí la ciudad donde está la Torre Eiffel, que por cierto no se había construido para esa época). Fue la segunda hija del matrimonio formado por Marie-Madeline Gruguelin y Ambroise-Francoise Germain. Su padre "participó activamente en la Revolución Francesa", y "su hogar fue un lugar de encuentro para los reformistas liberales"[9], esto le brindó a la pequeña Sophie la oportunidad de estar presente en discusiones políticas y filosóficas.

Las etapas en las que vivió Sophie, "marcan el entusiasmo y el desencanto de la época: la Ilustración, la Revolución, el Terror y la Restauración posrevolucionaria, años de efervescencia intelectual que habrán de dejar su huella en su vida y en su obra" [9]. Imaginemos que estamos en una época donde un rey tiene el poder absoluto, hay personas privilegiadas y otras que no lo son (cualquier parecido con la realidad es pura coincidencia); es normal que en algún momento las personas no privilegiadas, frustradas y desesperadas por su situación busquen la manera de cambiarla, pero ¿cómo? iniciando una revolución en contra de los tratos injustos, exigiendo participación en la política, igualdad de condiciones, etc. Efectivamente, eso fue lo que ocurrió en esa época, se armaban debates, combates y para quien quiera investigar se realizaron grandes avances en las ciencias.

Sophie siendo una niña vivió esta época encerrada en su casa, por decisión de sus padres. Comenzó a estudiar matemáticas a los 13 años, leyendo los libros de la biblioteca de su padre. Se interesó mucho por las matemáticas después de leer *La historia de las Matemáticas,* escrito por Jean-Baptiste Montucla [9] o Jean-Étienne Montucla según otras fuentes [5]. Sophie se impresionó, en particular, por la historia de Arquímedes y no precisamente por su *¡Eureka!,* sino por su absoluta concentración en las matemáticas, la cual le causó la muerte a manos de un soldado romano.

Sophie estudió y aprendió griego y latín por sí sola; siguió leyendo obras de grandes matemáticos como Isaac Newton y Leonhard Euler, a pesar de la desaprobación, dificultades y castigos que sus padres ponían en el camino. Por ejemplo, [6] un amigo matemático cuenta que los padres de Sophie cortaban la electricidad, apagaban la calefacción y le quitaban sus abrigos para que no estudiara. Sin embargo, ella se levantaba por las noches a escondidas, cubierta con sus cobijas y leía los libros a la luz de las velas. Eventualmente, sus padres terminaron por aceptar la pasión de Sophie y la apoyaron económicamente.

Pudo estudiar en la Escuela politécnica de París (en francés l'Ecole Polytechnique), gracias a que robó la identidad de un exalumno de allí: Monsieur Antoine-August Le Blanc. La razón de esta suplantación se debió a que en su sociedad no estaba permitido impartir educación formal a las mujeres. Utilizó varias veces esa identidad no sólo para asistir a algunas clases, sino también para mantener correspondencia con prestigiosos y talentosos matemáticos como Joseph-Louis Lagrange, Adrien-Marie Legendre y Carl Friedrich Gauss. En 1804 volvió a utilizar la identidad de Monsieur Le Blanc para escribirle cartas a Carl Friedrich Gauss [2], después de leer su famoso libro *Disquisitiones Aritmeticae (*1801*)*, aunque al final ella tuvo que revelar su identidad a todos sus mentores.

Carl Friedrich Gauss, expresó a través de las siguientes palabras, por medio de una carta, la admiración que sentía por ella, así como el pensamiento de la sociedad sobre el sexo femenino:

> *"Pero cómo describirte mi admiración y asombro al ver que mi estimado corresponsal Sr. Le Blanc se metamorfosea en este personaje ilustre que me ofrece un ejemplo tan brillante de lo que sería difícil de creer. La afinidad por las ciencias abstractas en general y sobre todo por los misterios de los números es demasiado rara: lo que no me asombra ya que los encantos de esta ciencia sublime solo se revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella. Pero cuando una persona del sexo que, según nuestras costumbres y prejuicios, debe encontrar muchísimas más dificultades que los hombres para familiarizarse con estos espinosos estudios, y sin embargo tiene éxito al sortear los obstáculos y penetrar en las zonas más oscuras de ellos, entonces sin duda esa persona debe tener el valor más noble, el talento más extraordinario y un genio superior. De verdad que nada podría probarme de forma tan meridiana y tan poco equívoca que los atractivos de esta ciencia que ha enriquecido mi vida con tantas alegrías no son quimeras que la predilección con la que tú has hecho honor a ella."[10]*

Sophie también fue física y filosofa; realizó varios aportes en el campo de la acústica, la electricidad y la elasticidad; tanto así que en 1816 obtuvo el premio propuesto por la Academia de las Ciencias sobre la teoría de las superficies elásticas, en su tercer intento.

Su más grande aporte a las Matemáticas consistió en lograr demostrar la validez del *último Teorema de Fermat* para un caso particular, pero muy significativo. El *último Teorema de Fermat*[1] enuncia que si n es un número natural mayor que 2, entonces no existen números naturales x, y y z tales que satisfacen la siguiente igualdad

$$x^n + y^n = z^n.$$

Con el objeto de demostrar este teorema, una primera observación que se puede hacer es que si el teorema se cumple para un número natural m, entonces se cumplirá para cualquier múltiplo de m y como todo número natural mayor que 2 es un múltiplo de un primo $p \neq 2$ o es un múltiplo de 4 (puesto que todo número natural se puede descomponer de manera única en factores primos), entonces la prueba del *último Teorema de Fermat* se podía obtener al probar su validez para dos casos [8]. El primer caso consideraba a un número primo p diferente de 2 y se buscaba probar que no existen números naturales x, y, z tales que p no divide al producto xyz y $x^p + y^p = z^p$. En el segundo caso se tomaba un número primo $p \neq 2$ y se quería demostrar que no existen números naturales x, y, z tales que p divide al producto xyz, el máximo común divisor de x, y, z es 1 y $x^p + y^p = z^p$.

Sophie probó en 1823 que si p es un primo tal que el número $2p+1$ también es primo, entonces el primer caso del *último Teorema de Fermat* se satisfacía para p. Por tal razón los números primos p tales que $2p+1$ también es primo, se conocen como los *primos de Germain*. Por ejemplo, 2 es un primo de Germain porque $2 \times 2 + 1 = 5$ y 5 es un número primo. De igual manera, 3 y 5 son primos de Germain; pero 7 ya no lo es.

La vida de Sophie fue corta debido a que enfermó de cáncer y murió a sus 55 años de edad el 27 de junio de 1831 en la misma ciudad que la vio nacer.

[1] ¿Sabías que el *último Teorema de Fermat* se conjeturó por Pierre de Fermat en 1637 y a pesar de que muchos matemáticos intentaron demostrarlo, solo fue Andrew Wiles quien pudo hacerlo en 1995?

Al poco tiempo de haber fallecido recibió el Doctorado Honoris Causa por la Universidad de Gotinga (Göttingen en Alemán), reconocimiento que había sido propuesto por Gauss en 1830. Adicionalmente, el Instituto de Francia, a propuesta de la Academia de Ciencias, concede anualmente el Premio Sophie Germain (Le prix Sophie Germain en francés) al investigador que haya realizado el trabajo más importante en Matemáticas.

Los invitamos a seguir investigando más sobre Sophie Germain y sus aportes en las Matemáticas, Física y Filosofía; así como la vida y obra de otras mujeres científicas que han dejado su huella en la historia.

Índice general

Capítulo 1

Nivel Básico

1.1. Prueba Clasificatoria

1.1.1. Prueba Clasificatoria: 21 de abril

1. Fermín el granjero sabe hallar el área de cualquier figura, esto le sirve para calcular la cantidad de

(a) agua que necesita para llenar el estanque de los peces.

(b) alambre que necesita para cercar el corral de las cabras.

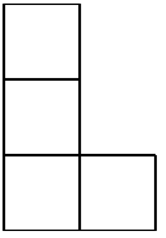
(c) terreno que abarca el corral de las vacas.

(d) animales que tiene en su granja.

2. Camilo y Nathalia fueron a cine. Camilo tenía $\$25.000$ para comprar las boletas; si compraba las boletas generales le quedaban $\$15.000$ y si compraba las preferenciales le quedaban $\$1.000$. ¿Cuál es la diferencia entre el precio de una boleta preferencial y una general?

(a) $\$5.000$ (b) $\$7.000$ (c) $\$12.000$ (d) $\$14.000$

3. La siguiente ficha está formada por 4 cuadrados de área $1\ cm^2$. ¿Cuántas fichas se necesitan para construir un cuadrado de área $16\ cm^2$?



(a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16

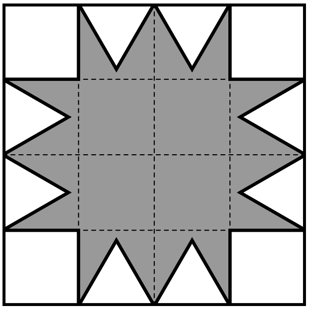
4. Gabriela está buscando un número menor que 50 y múltiplo de 4, tal que al restarle 1 es múltiplo de 3. ¿Cuántos números cumplen esta propiedad?

(a) 2 (b) 4 (c) 10 (d) 16

5. Jorge abrió su alcancía y contó 30 monedas de 1.000. ¿De cuántas formas distintas las puede agrupar en montones de igual cantidad de monedas?

(a) 3 (b) 4 (c) 6 (d) 8

6. La siguiente figura, construida sobre una cuadrícula y tiene sin sombrear en su interior cuadrados y triángulos equiláteros de menor tamaño.



Si el área del cuadrado grande es $64\,cm^2$, ¿cuánto mide el perímetro de la región sombreada?

(a) 24 cm (b) 42 cm (c) 48 cm (d) 36 cm

7. En la siguiente sucesión el número 3 es el término inicial, en adelante se obtienen los demás términos sumando 2 y 5 de forma alternada.

$$3 \quad 5 \quad 10 \quad 12 \quad 17 \quad 19 \quad 24 \quad 26 \quad \cdots$$

De los siguientes números, ¿cuál aparece más adelante en esta sucesión?

(a) 49 (b) 52 (c) 46 (d) 36

8. En la tienda venden bolsas de 2, 3 y 10 maras. Si debe comprarse al menos una bolsa de cada tipo, ¿cuál es la menor cantidad de bolsas que se deben comprar para completar 20 maras sin que sobre alguna?

(a) 6 (b) 5 (c) 4 (d) 2

9. El número de vueltas que da el segundero de un reloj en un día está dado por

(a) $24 \times 60 \times 60$.

(b) 24×60.

(c) $12 \times 60 \times 60$.

(d) 12×60.

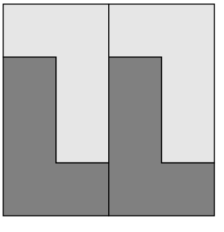
1.1.2. Solución

1. El área es un concepto métrico que permite asignar una medida a la extensión de una superficie, por esta razón Fermín podrá calcular el terreno que abarca el corral de las vacas. En las opciones (a), (b) y (d) los conceptos matemáticos involucrados son volumen, perímetro y conteo de objetos.

2. Si Camilo compraba 2 boletas generales le quedaban $\$15.000$, es decir pagaba $\$25.000 - \$15.000 = \$10.000$. Luego cada boleta general le costaba $\$5.000$. Pero si compraba 2 boletas preferenciales le quedaban $\$1.000$, es decir pagaba $\$25.000 - \$1.000 = \$24.000$. Luego cada boleta preferencial le costaba $\$12.000$. Así la diferencia entre el precio de las boletas es de

$$\$12.000 - \$5.000 = \$7.000.$$

3. Dado que cada ficha está formada por 4 cuadrados de área $1\ cm^2$, tenemos que cada ficha tiene $4\ cm^2$ de área, de modo que si juntamos 4 de estas fichas obtendremos una figura de $16\ cm^2$. Además, por la forma de las fichas es posible construir un cuadrado con 4 de ellas, como en el ejemplo que se muestra a continuación:



4. Gabriela puede listar todos los múltiplos de 4 menores que 50 y descartar aquellos números que al restarles 1 no son múltiplos de 3. Luego de hacer este procedimeinto Gabriela quedará con los números 4, 16, 28 y 40. Por lo tanto hay cuatro números que satisfacen las condiciones.

5. Si se tienen 30 monedas de 1000, la cantidad de formas distintas en las que se pueden agrupar las monedas (en montones iguales), coincide con la cantidad de divisores que tiene el número 30, los cuales son 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30; en total hay 8 formas de agrupar las monedas.

6. El área del cuadrado grande es $64\,cm^2$ y por tanto el lado del cuadrado es $8\,cm$, se sigue que los cuadrados que forman la cuadrícula son de lado $2\,cm$. Ahora, como los triángulos que aparecen sin sombrear son equiláteros, se concluye que la figura sombreada está formada por 24 segmentos de $2\,cm$ de longitud. De modo que su perímetro es

$$24\ cm \times 2 = 48\ cm.$$

7. Teniendo en cuenta el patrón, podemos seguir construyendo la sucesión de la siguiente manera:

$$\cdots\ 26 \xrightarrow{+5} 31 \xrightarrow{+2} 33 \xrightarrow{+5} 38 \xrightarrow{+2} 40 \xrightarrow{+5} 45 \xrightarrow{+2} 47 \xrightarrow{+5} \underline{52}\ \cdots$$

Por lo tanto el 52, es el número que aparece en la sucesión. Observe que la sucesión es creciente y los números 49, 46, y 36 no aparecen antes del número 52, por ende no aparecen en la lista.

8. Comprando una bolsa de cada tipo se tendría en total 15 maras. Para completar las 20 maras sin que sobre alguna, debe comprarse adicionalmente una bolsa de 2 maras y otra de 3 maras. De modo que se deben comprar en total 5 bolsas. Note que esta es la menor cantidad de bolsas necesarias para completar las 20 maras cumpliendo las condiciones del problema.

9. Sabiendo que el segundero de un reloj da 1 vuelta por cada minuto, una hora tiene 60 minutos y un día tiene 24 horas; se tiene que el número de vueltas que da el segundero de un reloj en un día es 24×60.

1.2. Prueba Selectiva

1.2.1. Prueba Selectiva: 19 de mayo

1. En la siguiente lista están las edades de Willy, Jorge y Jesús.

$$12, 17, 21, 23, 32, 71.$$

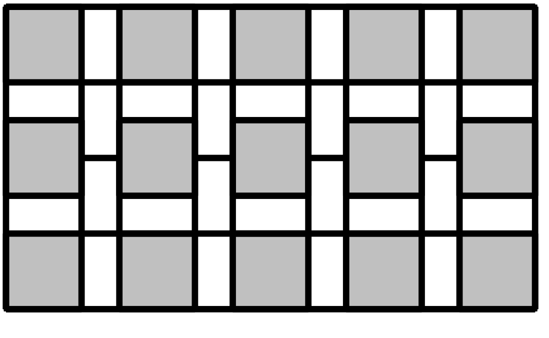
La edad de cada uno es un número primo y la edad de Jesús y Jorge están formadas por los mismos dígitos. Si Jorge es mayor que Jesús, ¿cuál es la edad de Jorge?

(a) 17 (b) 23 (c) 32 (d) 71

2. En un colegio los salones están numerados del 1 al 20. Si 10 estudiantes están numerados del 1 al 10 y cada uno abre la puerta correspondiente al doble de su número menos 1, ¿cuál es la suma de los números de las puertas que quedan abiertas, sabiendo que inicialmente todas estaban cerradas?

(a) 55 (b) 100 (c) 110 (d) 210

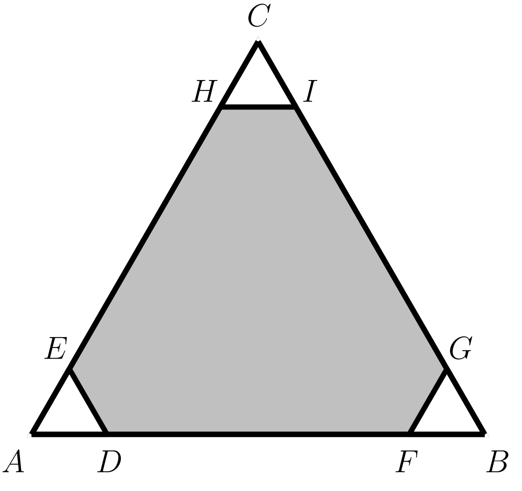
3. El patio de juegos de un colegio tiene forma rectangular y se cubre con tabletas cuadradas y rectangulares como se muestra en la figura. Si el perímetro de cada tableta cuadrada mide $4\ m$ y el de cada tableta rectangular mide $3\ m$, ¿cuál es el área del patio de juegos?



(a) 28 m^2 (b) 35 m^2 (c) 60 m^2 (d) 41 m^2

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

4. En la siguiente figura, los triángulos ABC, ADE, BFG y CHI son equiláteros. Si $AB = 6\,cm$ y $AD = BF = HI = 1\,cm$, ¿cuál es el perímetro de la región sombreada?



5. Andrea lleva cada día la misma cantidad de dinero al colegio para comprar su lonchera. Un día compró 3 paquetes de galletas y le sobraron $\$200$, otro día compró 2 paquetes de papas y le sobraron $\$300$, al día siguiente compró 5 caramelos y le sobraron $\$200$. Si un paquete de papas vale $\$700$, ¿cuánto vale un paquete de galletas y un caramelo?

6. ¿Cuántos números distintos de cinco cifras se pueden formar usando tres unos y dos cuatros?

1.2.2. Solución

1. De los números de la lista los únicos primos son: 17, 23 y 71. Como las edades de Jesús y Jorge están formadas por los mismos dígitos estas son: 17 y 71; además Jorge es mayor que Jesús, luego la edad de Jorge es 71 años.

2. Para saber cuál puerta abrió cada estudiante, debemos multiplicar el número correspondiente al estudiante por 2 y a este resultado restar 1. Por ejemplo, el estudiante con el número 1, abrió la puerta $(1\times 2)-1=1$; el estudiante con el número 2, abrió la puerta $(2\times 2)-1=3$ y así sucesivamente. En la siguiente tabla escribimos los resultados:

# Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
# de puerta que abre	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Luego la suma de los números de las puertas que quedan abiertas es:

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100.$$

3. De la información del enunciado se puede establecer que los cuadrados tienen un metro de lado y los rectángulos tienen un metro de largo y medio metro de ancho. Luego el rectángulo del patio de juegos tiene cuatro metros de ancho y siete metros de largo, por tanto su área es 28 metros cuadrados.

4. Como los triángulos ABC, ADE, BGF y CHI son equiláteros, $AB=6\ cm$ y $AD=BF=HI=1\ cm$; entonces

$$IG=FD=EH=6\ cm-2\ cm=4\ cm.$$

Por lo tanto el perímetro de la región sombreada es:

$$HI+IG+GF+FD+ED+EH=1+4+1+4+1+4=15\ cm.$$

5. Dado que 1 paquete de papas cuesta $\$700$ y el día que Andrea compró 2 paquetes de papas le sobraron $\$300$, podemos deducir que el dinero que lleva Andrea cada día al colegio es:

$$2 \times \$700 + \$300 = \$1.700.$$

De modo que, el día que compró las 3 galletas, Andrea gastó:

$$\$1.700 - \$200 = \$1.500,$$

luego cada galleta cuesta $\$500$; y el día que compró los 5 caramelos ella gastó

$$\$1.700 - \$200 = \$1.500.$$

luego cada caramelo cuesta $\$300$. Por tanto un paquete de galletas y un caramelo cuesta $\$800$.

6. Los números de cinco cifras que se pueden formar usando tres unos y dos cuatros son: 11144, 11414, 11441, 14114, 14141, 14411, 44111, 41114, 41141, 41411. En total hay 10 números.

1.3. Prueba Final

1.3.1. Resultados

El comité organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas, de la Universidad Industrial de Santander agradece la participación en la sexta edición de las olimpiadas para primaria y se enorgullece de felicitar por su EXCELENTE desempeño a lo largo del certamen a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 611 participantes de este nivel, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final.

CUADRO DE HONOR

1^{er} Puesto, medalla de oro

DAVID ALEJANDRO LEÓN CUPABAN

Colegio Bilingüe Divino Niño, Bucaramanga.

2^{o} Puesto, medalla de plata

JOSÉ MIGUEL ÁLVAREZ

Colegio Cristiano Luz y Vida, Ocaña.

3^{er} Puesto, medalla de bronce

ALEJANDRA CATALINA HERNÁNDEZ PARRA

Aspaen Gimnasio Cantillana, Piedecuesta.

4^{o} Puesto

JUAN DAVID LOZANO

Colegio Cristiano Luz y Vida, Ocaña.

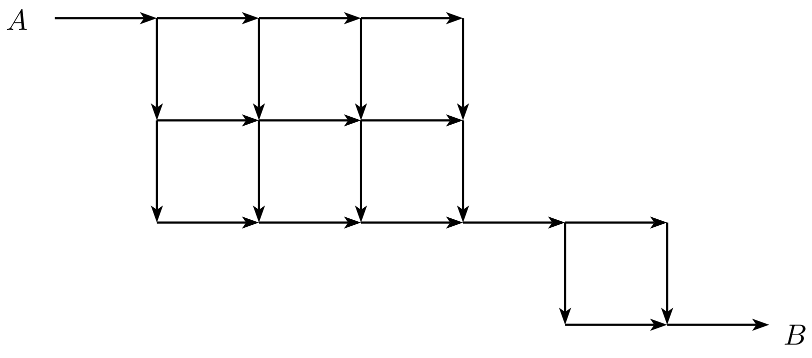
5^{o} Puesto

SERGIO ANDRÉS MANTILLA MONSALVE

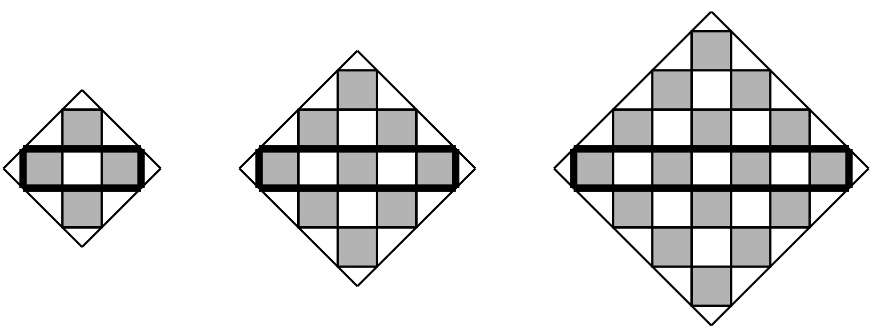
Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.

1.3.2. Prueba Final: 3 de junio

1. ¿De cuántas maneras puede ir una hormiga desde el punto A hasta el punto B siguiendo las flechas?

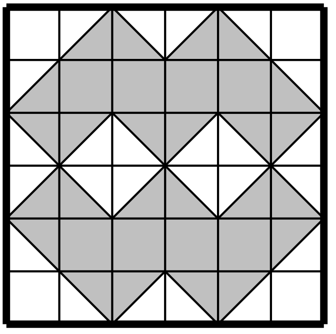


2. El mosaico para un piso se construye con baldosas blancas y negras siguiendo el patrón de la figura. ¿Cuál es el total de baldosas negras que se necesitan para construir un piso cuadrado con línea principal de 13 baldosas?



Nota: *Para cada mosaico, la línea principal es la que se encuentra resaltada.*

3. El pasillo de una casa se ha decorado con 20 baldosas cuadradas como la que se muestra en la figura.

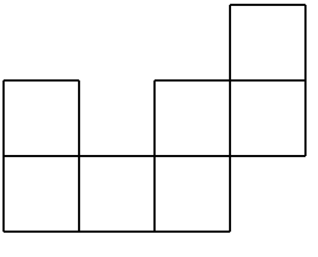


Sabiendo que cada uno de los lados de la baldosa mide $12\ cm$, ¿cuánto mide el área sombreada total del pasillo de la casa?

4. Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado **II** depende de la respuesta del enunciado **I** y el enunciado **III**, de la respuesta del enunciado **II**. En la hoja de respuestas, escriba el procedimiento y la respuesta de cada enunciado en los recuadros correspondientes.

I. ¿Cuál es el triple de la suma de 7, 13 y 17?

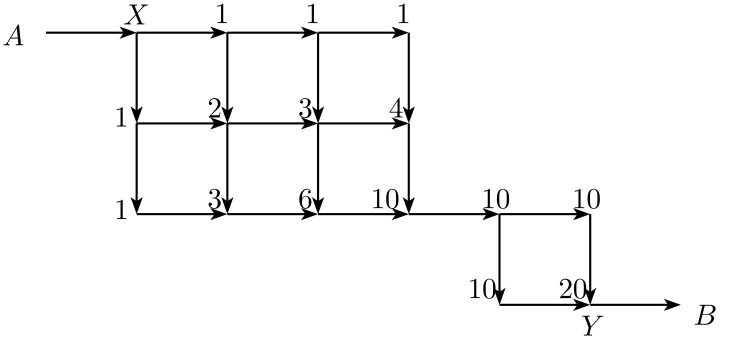
II. En la siguiente figura el lado de cada cuadrado, en centímetros, coincide con la respuesta del item anterior, ¿cuál es su perímetro?



III. El año de nacimiento de Sophie Germain coincide con la respuesta del ítem anterior. Si murió en 1831 después de su cumpleaños, ¿a qué edad falleció?

1.3.3. Solución

1. Considere la siguiente figura



Claramente para ir desde A hasta X hay una sola forma de hacerlo. Ahora, observe que las formas en que la hormiga puede llegar a un vértice diferente de X, es la suma de las formas en que puede llegar a los vértices inmediatamente anteriores (como se ilustra en la figura). Para finalizar, también es claro que para ir desde Y a B hay una sola manera de hacerlo. Así la hormiga tiene 20 formas distintas para ir desde A hasta B.

2. Observe que el número de baldosas de la diagonal principal en cada mosaico va aumentando 2 con respecto al anterior. Como el primer mosaico tiene 3 baldosas en su diagonal principal, entonces el sexto mosaico tendrá 13.

   Note además que el número de baldosas negras en el primer mosaico es 2×2, en el segundo mosaico es 3×3 y en el tercer mosaico es 4×4, siguiendo este patrón el sexto mosaico tendrá $7 \times 7 = 49$ baldosas negras.

3. Observe que cada cuadrito de la baldosa tiene de área $4\ cm^2$ y que la figura sombreada en la baldosa ocupa 20 cuadritos, es decir, el área sombreada de cada baldosa es de $80\ cm^2$. Por lo tanto el área sombreada total del pasillo de la casa es $80\ cm^2 \times 20 = 1.600\ cm^2$.

4. **I.** El triple de la suma de 7, 13 y 17, viene dado por:

$$3 \times (7 + 13 + 17) = 3 \times 37 = 111.$$

II. De lo anterior tenemos que la medida del lado de los cuadrados es $111\ cm$. Luego el perímetro de la figura es

$$16 \times (111\ cm) = 1776\ cm.$$

III. Como Sophie Germain falleció en 1831 después de su cumpleaños y nació en 1776, se deduce que ella murió a sus $1831 - 1776 = 55$ años.

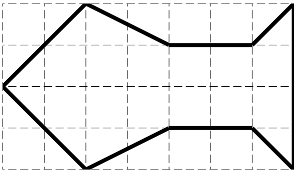
Capítulo 2

Nivel Medio

2.1. Prueba Clasificatoria

2.1.1. Prueba Clasificatoria: 21 de abril

1. ¿Cuál es el área (en cm^2) de la siguiente figura, si cada cuadrado de la rejilla tiene área igual a $4\ cm^2$?



(a) 68 (b) 44 (c) 34 (d) 17

2. Del resultado de la siguiente operación

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11,$$

es correcto afirmar que es múltiplo de:

(a) todos los números del 1 al 11.

(b) 6 pero no de 3.

(c) 11 pero no de 33.

(d) 22 pero no de 9.

3. El número de vueltas que da el segundero de un reloj en una semana está dado por

(a) $7 \times 24 \times 60 \times 60$.

(b) $7 \times 24 \times 60$.

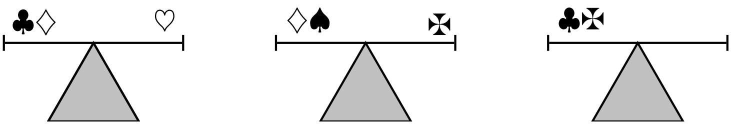
(c) $7 \times 60 \times 60$.

(d) 24×60.

4. ¿Cuántos números naturales menores que 100 son múltiplos de 3 ?

(a) 33 (b) 34 (c) 66 (d) 67

5. En la siguiente figura las dos primeras balanzas están equilibradas, ¿cuáles figuras deben estar en el lado derecho de la tercera balanza para que quede equilibrada?



(a) ♡ y ♣ (b) ♠ y ♡ (c) ♢ y ♠ (d) ✠ y ♠

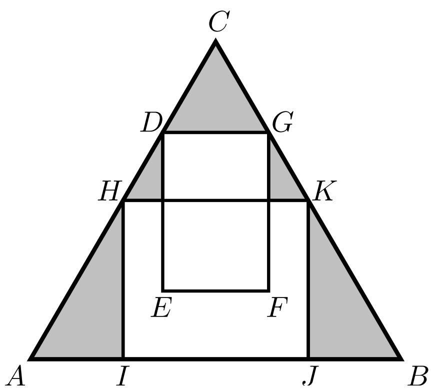
6. En la siguiente figura, el triángulo ABC tiene $84\,cm^2$ de área, el rectángulo $HIJK$ tiene $42\,cm^2$ de área y $DEFG$ tiene $24\,cm^2$ de área. Si los rectángulos tienen $14\,cm^2$ de área en común, ¿cuánto mide el área sombreada?

(a) $18\ cm^2$

(b) $32\ cm^2$

(c) $66\ cm^2$

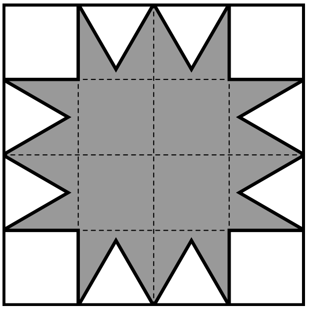
(d) $42\ cm^2$



7. Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 17\}$. ¿Cuántos elementos tiene el subconjunto más grande del conjunto A, tal que uno de sus elementos sea múltiplo de todos los demás?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8

8. La siguiente figura, construida sobre una cuadrícula, tiene sin sombrear en su interior cuadrados y triángulos equiláteros de menor tamaño.



Si el área del cuadrado grande es $64\,cm^2$, ¿cuánto mide el perímetro de la región sombreada?

(a) 24 cm (b) 42 cm (c) 48 cm (d) 36 cm

9. Para participar en una competencia los niños de cuarto deben cumplir los siguientes requisitos:

- Tener más de 6 años, pero menos de 10.
- Medir al menos $1,10$ metros.
- Pesar máximo 40 kilogramos.

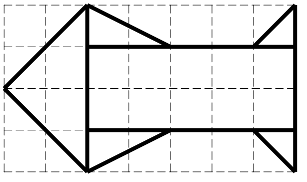
¿Cuál de los siguientes niños puede participar en la competencia?

	Juan	**Pipe**	**Rafa**	**José**
Edad [años]	7	9	8	10
Estatura $[m]$	$0,95$	$1,20$	$1,15$	$1,10$
Peso $[Kg]$	39	36	45	40

(a) Juan (b) Pipe (c) Rafa (d) José

2.1.2. Solución

1. Como el área de cada cuadrado de la rejilla es $4\ cm^2$, se tiene que cada lado mide $2\ cm$. Así, dividiendo la figura en triángulos y un rectángulo, como se observa en la siguiente figura



se tiene que el área total es:

$$\frac{8\times 4}{2}+\frac{4\times 2}{2}+\frac{4\times 2}{2}+10\times 4+\frac{2\times 2}{2}+\frac{2\times 2}{2}=68\ cm^2.$$

2. El resultado de la suma es 66. Calculando los divisores de 66 se tiene que 66 es múltiplo de 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33 y 66; pero no de 9. Dicho esto, la opción correcta es la (d).

3. En un minuto el segundero da una vuelta, luego en una hora da 60 vueltas. Ahora cuando pasa un día tenemos que el número de vueltas es 24×60. Finalmente, en una semana el número de vueltas está dado por $7\times 24\times 60$.

4. Considere el conjunto de los números naturales que son múltiplos de 3 menores que 100

$$M_3=\{3,6,9,12,15,\dots,99\},$$

reescribiendo sus elementos de la siguiente forma

$$M_3=\{3\times 1,3\times 2,3\times 3,3\times 4,3\times 5,\dots,3\times 33\},$$

se puede observar que el mayor número en este conjunto es 99 el cual se puede escribir como 3×33, es decir 99 es el trigésimo tercer múltiplo de 3 y por tanto hay 33 elementos en el conjunto M_3.

Nota: *Si se considera al* 0 *como número natural, entonces hay* 34 *números naturales menores que* 100 *que son múltiplos de* 3; *por esta razón en la calificación del examen se consideraron correctas las respuestas* (a) *y* (b).

5. De la segunda balanza se tiene que $\maltese$ pesa lo mismo que $\diamondsuit\spadesuit$, entonces $\clubsuit\maltese$ pesa lo mismo que $\clubsuit\diamondsuit\spadesuit$. Pero de la primera balanza se tiene que $\clubsuit\diamondsuit$ pesa lo mismo que $\heartsuit$; de modo que $\clubsuit\diamondsuit\spadesuit$ pesa lo mismo $\heartsuit\spadesuit$. Por lo tanto $\clubsuit\maltese$ pesa lo mismo que $\heartsuit\spadesuit$.

6. De la figura se observa que el área sombreada puede calcularse de la siguiente manera: al área del triángulo ABC se le restan las áreas de los rectángulos $DEFG$ y $HIJK$ y se suma el área común entre estos rectángulos. Por lo tanto el área sombreada es:

$$84\ cm^2 - 24\ cm^2 - 42\ cm^2 + 14\ cm^2 = 32\ cm^2.$$

7. Sea $A = \{1, 2, \ldots, 17\}$. El subconjunto de A más grande que se puede formar con la condición de que un elemento sea múltiplo de todos los demás, debe estar formado por los divisores del número que está en A y tiene la mayor cantidad de divisores en A. Este número es el 12, luego el subconjunto de A que cumple las condiciones del enunciado es $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, el cual tiene 6 elementos.

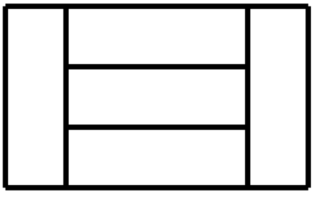
8. El área del cuadrado grande es $64\,cm^2$ y por tanto el lado del cuadrado es $8\,cm$, se sigue que los cuadrados que forman la cuadrícula son de lado $2\,cm$. Ahora, como los triángulos que aparecen sin sombrear son equiláteros, se concluye que la figura sombreada está formada por 24 segmentos de $2\,cm$ de longitud. Luego, su perímetro es $24 \times 2 = 48\ cm$.

9. Note que José no puede participar en la competencia, pues tiene exactamente 10 años y uno de los requisitos es tener menos de 10 años. Juan no puede participar ya que su estatura es $0,95\ m$. Rafa tampoco puede participar, ya que su peso es mayor a $40\ kg$. Finalmente, Pipe es quien cumple con todos los requisitos para participar en la competencia. ¡Verifíquelo!

2.2. Prueba Selectiva

2.2.1. Prueba Selectiva: 19 de mayo

1. ¿De cuántas maneras se pueden pintar las regiones de la siguiente figura, con 3 colores, si dos regiones vecinas no pueden tener el mismo color?

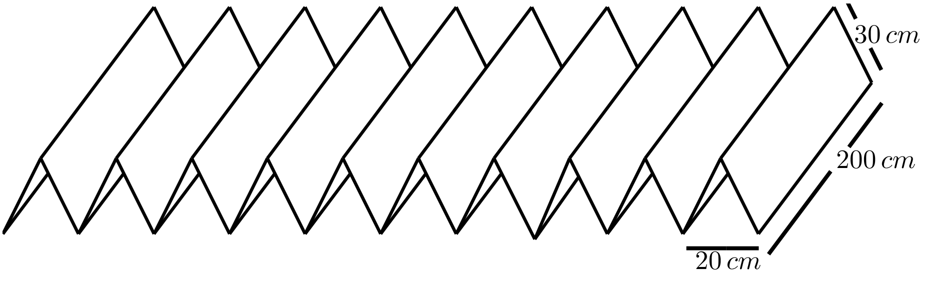


(a) 15 (b) 9 (c) 6 (d) 1

2. El producto de las edades de Vanesa, Laura y Tatiana es 28. Si Tatiana es mayor que Laura y Vanesa menor que Laura, ¿cuál es la edad de Laura, sabiendo que la edad de Tatiana es un número primo?

(a) 2 (b) 4 (c) 7 (d) 28

3. A partir de una plancha metálica rectangular se construye una teja haciendo dobleces iguales como se muestra a continuación:



Las medidas del largo y el ancho de la plancha rectangular en centímetros son:

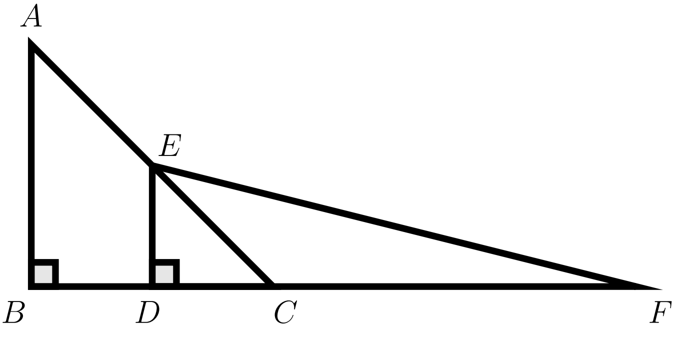
(a) 600 y 200 (b) 30 y 200 (c) 200 y 200 (d) 120000 y 200

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

4. Daniel compró en la tienda 5 chocolates y 3 galletas por $\$3.700$, pero si hubiera comprado 3 chocolates y 5 galletas tendría que haber pagado $\$5.100$. ¿Cuánto debería pagar por una galleta y un chocolate?

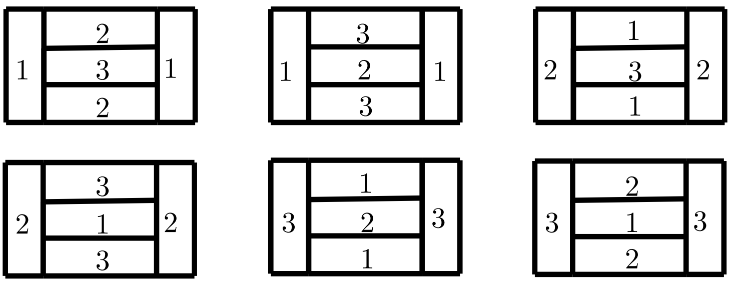
5. ¿Cuántos números de cinco cifras son capicúa y divisibles por 5?
Nota: *un número se llama* **capicúa** *si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Ejemplo:* 42124 *es capicúa.*

6. En la siguiente figura los triángulos ABC y EDC son isósceles rectángulos y D es el punto medio del segmento $\overline{BC}$. Si $AB = BC = 4\,cm$ y las áreas de los triángulos ABC y DEF son iguales, ¿cuánto mide $\overline{DF}$?



2.2.2. Solución

1. Dado que dos regiones vecinas no pueden tener el mismo color, las dos columnas deben compartir color y la primera y última fila deben tener un color distinto al de las columnas. Note que de esta manera queda determinado el color de la región restante en cada caso. Sean 1, 2 y 3 los diferentes colores; las 6 maneras de pintar las regiones de la figura se muestran a continuación:



2. La edad de Tatiana es un número primo y además debe dividir a 28. Los únicos primos que dividen a 28 son 2 y 7. A partir del enunciado podemos establecer que Tatiana es la mayor de las tres y Vanesa es la menor de las tres, por lo tanto las edades de Vanesa, Laura y Tatiana son respectivamente 1,4 y 7.

3. Según la figura, para construir la teja se hicieron 10 dobleces formando 20 rectángulos iguales, de base $30\,cm$ y de altura $200\,cm$. La altura de uno de estos rectángulos coincide con el ancho de la plancha, es decir $200\,cm$ y el largo de la plancha equivale a sumar las longitudes de las 20 bases de los rectángulos, es decir $20 \times 30\,cm = 600\,cm$.

4. Del enunciado se tiene que 5 chocolates y 3 galletas cuestan $\$3.700$, pero 3 chocolates y 5 galletas cuestan $\$5.100$. Luego 8 chocolates y 8 galletas cuestan $\$8.800$. Por lo tanto Daniel debería pagar $\$1.100$ por una galleta y un chocolate.

5. Los números capicúa de cinco cifras se escriben de la siguiente manera:

$$\underline{\;a\;}\quad \underline{\;b\;}\quad \underline{\;c\;}\quad \underline{\;b\;}\quad \underline{\;a\;}$$

donde a, b y c son dígitos; pero $a \neq 0$. Sabemos que un número es divisible entre 5 si la cifra de las unidades es 0 o 5, en este caso 0 no puede ir en la cifra de las unidades, pues como el número es capicúa la cifra de las decenas de mil también sería 0 y esto daría un número de 4 cifras (que además no es capicúa). Luego $a = 5$, es decir:

$$\underline{\;5\;}\quad \underline{\;b\;}\quad \underline{\;c\;}\quad \underline{\;b\;}\quad \underline{\;5\;}$$

De manera que si se fija un valor para b, por ejemplo, $50c05$; vemos que c puede tomar 10 valores: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y el número siempre es capicúa. Reemplazando todos los posibles valores de b y c, obtenemos un total de 100 números capicúa de cinco cifras y divisibles por 5.

6. Como D es punto medio del segmento $\overline{BC}$, entonces $\overline{DC}$ mide la mitad de $\overline{BC}$, es decir $DC = 2\,cm$; pero el triángulo EDC es isósceles en D, entonces $ED = 2\,cm$.

En relación a las áreas se tiene que el área del triángulo ABC es

$$\frac{AB \times BC}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8\ cm^2,$$

mientras que el área del triángulo EDF es

$$\frac{ED \times DF}{2} = \frac{2 \times DF}{2} = 8\ cm^2.$$

Por lo tanto, $DF = 8\ cm$.

2.3. Prueba Final

2.3.1. Resultados

El comité organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas, de la Universidad Industrial de Santander agradece la participación en la sexta edición de las olimpiadas para primaria y se enorgullece de felicitar por su EXCELENTE desempeño a lo largo del certamen a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 646 participantes de este nivel, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final.

CUADRO DE HONOR

1^er Puesto, medalla de oro

JUAN FERNANDO PICO LINARES

Colegio Campestre Goyavier, Floridablanca.

2^o Puesto, medalla de plata

JUAN JOSÉ PELAYO GALVIS

Colegio La Buena Semilla, Socorro.

3^er Puesto, medalla de bronce

CARLOS ESTEBAN MUÑOZ QUINTERO

Institución Educativa José Eusebio Caro, Ocaña.

4^o Puesto

JOSÉ DANIEL PULIDO VILLAMIZAR

Colegio Gimnasio Pedagógico Comfenalco, Bucaramanga.

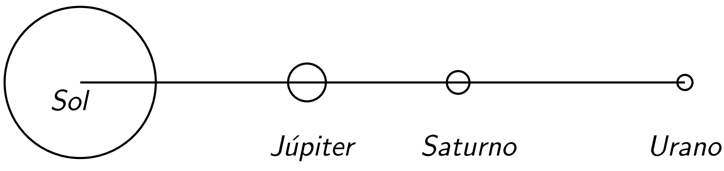
5^o Puesto

SANTIAGO RINCÓN VILA

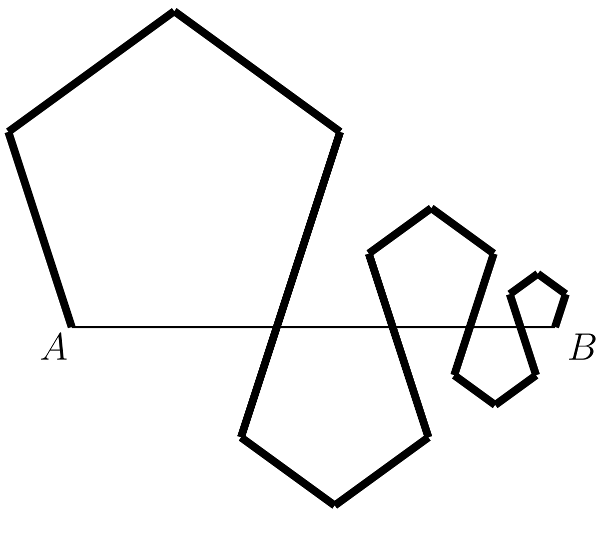
Colegio Gimnasio San Diego, Floridablanca.

2.3.2. Prueba Final: 3 de junio

1. El periodo de traslación de un planeta es el tiempo que este demora en dar una vuelta completa alrededor del Sol. Si los periodos de traslación de Júpiter, Saturno y Urano son 12, 30 y 84 años respectivamente, ¿cuántas vueltas debe dar Saturno hasta la próxima vez que los tres planetas vuelvan a estar alineados como muestra la figura?



2. Sobre el segmento $\overline{AB}$ se ubican cinco pentágonos regulares como se muestra en la figura. Si la longitud del segmento AB es $30\,cm$, ¿cuál es la longitud del camino marcado?



3. En un pueblo con dos mil habitantes se celebraron las ferias dos días consecutivos. Sobre la asistencia de los habitantes a las ferias se conocen los siguientes datos:

- El primer día asistieron 1500 habitantes, de los cuales $\dfrac{2}{3}$ eran mujeres y el resto hombres.
- El segundo día asistieron 500 habitantes, de los cuales 300 eran hombres que no habían asistido el día anterior y el resto eran mujeres.

Si todos los habitantes hombres asistieron a las ferias, ¿cuál es el número máximo posible de mujeres que no asistió ninguno de los dos días?

4. Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado **II** depende de la respuesta del enunciado **I** y el enunciado **III**, de la respuesta del enunciado **II**. En la hoja de respuestas, escriba el procedimiento y la respuesta de cada enunciado en los recuadros correspondientes.

I. ¿Cuántos números de dos cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2 y 3?

II. El lado de un terreno cuadrado en metros coincide con la respuesta del ítem anterior. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan para cercar el terreno?

III. ¿Cuál es la edad de Vanesa, si esta es tres veces la suma de los dígitos de la respuesta del ítem anterior?

2.3.3. Solución

1. Para calcular los años en que los tres planetas se alinean basta con calcular el mínimo común múltiplo entre los años que se demora en hacer la traslación cada planeta, el cual es 420 años. De esta manera, Saturno habrá dado $\frac{420}{30} = 14$ vueltas en ese tiempo.

2. Observe que en el segmento $\overline{AB}$ se ubica exactamente un lado de cada uno de los cinco pentágonos regulares. Es decir al tomar un lado de cada pentágono y sumar estas longitudes el resultado es $30\,cm$. Ahora, observe que el camino marcado está formado por cuatro lados de cada pentágono regular, de esta forma la suma de las longitudes de los segmentos que forman el camino marcado es $30\,cm \times 4 = 120\,cm$.

3. Tenemos que el primer día de ferias asistieron: $1500 \times \frac{2}{3} = 1000$ mujeres y $1500 - 1000 = 500$ hombres. Además el segundo día asistieron 300 hombres que no había asistido el primer día, lo cual nos permite asegurar que de los 2000 habitantes mínimo $1500 + 300 = 1800$ asistieron alguno de los dos días a las ferias, por lo tanto el número máximo posible de mujeres que no asistió a las ferias es $2000 - 1800 = 200$. (Tenga en cuenta que las 200 mujeres que asistieron el segundo día pueden ser de las mismas que asistieron el primer día).

4. **I.** Aplicando el principio de multiplicación o listando los números, se tiene que la cantidad de números de dos cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2 y 3 es 9.

   II. Encontrar la respuesta a la pregunta es equivalente a calcular el perímetro del terreno. Si el lado del cuadrado es $9\ cm$, entonces el perímetro es $9 \times 4 = 36\ cm$.

   III. La suma de los dígitos de 36 es $3 + 6 = 9$, así que Vanesa tiene $3 \times 9 = 27$ años de edad.

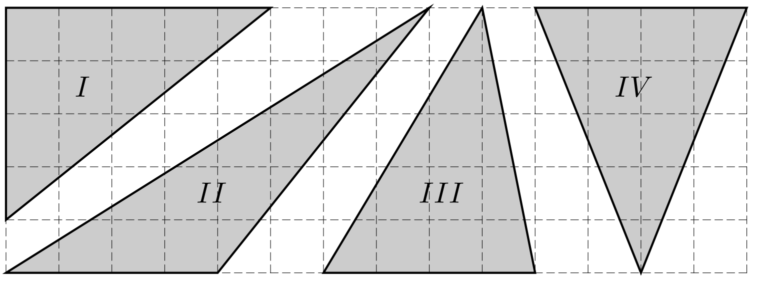
Capítulo 3

Nivel Avanzado

3.1. Prueba Clasificatoria

3.1.1. Prueba Clasificatoria: 21 de abril.

1. De la siguiente figura es correcto afirmar que



(a) todos los triángulos tienen igual perímetro.

(b) todos los triángulos tienen la misma área.

(c) el triángulo II tiene mayor área.

(d) todos los triángulos son escalenos.

2. El número de vueltas que da el segundero de un reloj en dos semanas está dado por:

(a) $7 \times 24 \times 60 \times 60$.

(b) $7 \times 24 \times 60$.

(c) $14 \times 24 \times 60$.

(d) $14 \times 24 \times 60 \times 60$.

3. Sebastián debe caminar 100 metros para llegar a la casa de su amigo Felipe. Si ha recorrido $\dfrac{8}{10}$ del camino, es correcto afirmar que

(a) le falta 2 metros por recorrer.

(b) ha recorrido 8 metros.

(c) le falta $\dfrac{1}{5}$ de camino por recorrer.

(d) ha recorrido menos de la mitad del camino.

4. Anni dibujó una sucesión de cuadrados, en la que el primer cuadrado tenía $4\ cm$ de perímetro, el segundo $8\ cm$ de perímetro, el tercero $12\ cm$ de perímetro y así sucesivamente. ¿Cuál es el perímetro del décimo cuadrado de la sucesión?

(a) $100\ cm$ (b) $40\ cm$ (c) $20\ cm$ (d) $10\ cm$

5. Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 17\}$. ¿Cuántos elementos tiene el subconjunto más grande del conjunto A, tal que uno de sus elementos sea múltiplo de todos los demás?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8

6. ¿Cuántos números naturales menores que 1.000 son múltiplos de 3?

(a) 333 (b) 334 (c) 666 (d) 667

7. Del resultado de la siguiente operación

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11,$$

es correcto afirmar que es múltiplo de:

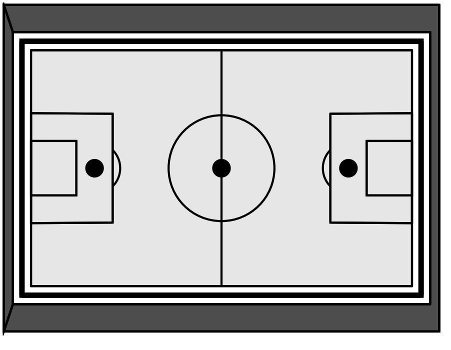
(a) todos los números del 1 al 11.

(b) 6 pero no de 3.

(c) 11 pero no de 33.

(d) 22 pero no de 9.

8. Para construir una cancha de fútbol, se dispone de un terreno de 120 m por 100 m. Para la gradería hay que dejar 10 m desde los lados más largos del terreno y 5 m desde los lados más cortos. Además, las vallas publicitarias se construyen a 1 m de la tribuna y 1 m del terreno de juego. ¿Cuál es el área del terreno de juego en m^2?



(a) 100×80 (b) 110×85 (c) 96×86 (d) 106×76

9. Los padres de Diego le compraron una camisa, un pantalón y un par de zapatos por $\$135.000$. Si el pantalón costó el doble de lo que costó la camisa y los zapatos costaron el triple de lo que costó el pantalón, ¿cuánto costó la camisa y el pantalón?

(a) $\$45.000$ (b) $\$105.000$ (c) $\$120.000$ (d) $\$90.000$

3.1.2. Solución

1. Teniendo en cuenta la cuadrícula en la que están dibujados los triángulos, puede observarse que en cada uno de ellos la base mide 4 unidades y la altura mide 5 unidades. Por tanto, los cuatro triángulos tienen la misma área. Las demás afirmaciones son falsas, ya que por ejemplo el triángulo IV es isósceles y como ejercicio al lector dejamos la verificación de que los cuatro triángulos tienen diferente perímetro.

2. Sabiendo que el segundero de un reloj da una vuelta por cada minuto, y que en dos semanas transcurren 14×24 horas, se tiene que el número de vueltas que da el segundero de un reloj en dos semanas es $14 \times 24 \times 60$.

3. Dado que Sebastián ha recorrido $\frac{8}{10}$ del camino, esto significa que lleva

$$100\,m \times \frac{8}{10} = 80\,m.$$

   Así, a Sebastián le faltan aún $20\,m$, lo que equivale a $\frac{1}{5}$ del total del camino.

4. El enunciado sugiere que los cuadrados en la sucesión van aumentando su perímetro en $4\ cm$, de modo que si el primero tiene $4\,cm$ de perímetro entonces el décimo tendrá $40\ cm$ de perímetro.

5. Sea $A = \{1, 2, \ldots, 17\}$. El subconjunto de A más grande que podemos formar con la condición de que un elemento sea múltiplo de todos los demás, debe estar formado por los divisores del número que está en A y tiene la mayor cantidad de divisores en A. Este número es el 12, luego el subconjunto de A que cumple las condiciones del enunciado es $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ el cual tiene 6 elementos.

6. Dividiendo a 1.000 entre 3 y usando el algoritmo de la división se obtiene que $1.000 = 3 \times (333) + 1$. Luego hay 333 números naturales menores que 1.000 que son múltiplos de 3.

Nota: *Si se considera al* 0 *como número natural, entonces hay* 334 *números naturales menores que* 1.000 *que son múltiplos de* 3; *por esta razón en la calificación del examen se consideraron correctas las respuestas* (a) *y* (b).

7. El resultado de la suma es 66. Calculando los divisores de 66 se tiene que 66 es múltiplo de 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33 y 66; pero no de 9. Dicho esto, la opción correcta es la (d).

8. Para construir el terreno de juego se dede dejar, desde los lados más cortos del terreno disponible, $5\ m$ para gradería y $2\ m$ para vallas publicitarias. Entonces, en los lados más largos del terreno disponible que miden $120\ m$, quedan en total $120\ m - 7\ m - 7\ m = 106\ m$. Ahora bien, desde los lados más largos del terreno disponible, deben dejar $10\ m$ para gradería y $2\ m$ para vallas publicitarias. Así, en los lados más cortos del terreno disponible que miden $100\ m$, quedan en total $100m - 12m - 12m = 76m$. En conclusión, el área del terreno de juego es $(106 \times 76)\ m^2$.

9. El enunciado plantea que, en términos de precios,

$$\text{Camisa} + \text{Pantalón} + \text{Zapatos} = \$135{,}000.$$

Además, como el Pantalón costó el doble que la Camisa, y los Zapatos costaron el triple que el Pantalón, entonces el precio de los Zapatos fue seis veces el precio la Camisa. Con esta información, los $\$135{,}000$ pueden ser vistos únicamente en términos del precio de la Camisa, a saber

$$\text{Camisa} + 2 \times \text{Camisa} + 6 \times \text{Camisa} = \$135{,}000.$$

De lo anterior se deduce que,

$$9 \times \text{Camisa} = \$135{,}000.$$

Para encontrar el valor de la Camisa, se debe encontrar un número cuyo resultado al multiplicarse por 9 sea $\$135{,}000$ (o de manera equivalente, hallar el resultado de dividir $\$135{,}000$ entre 9). Tal valor es $\$15{,}000$. Entonces el precio del Pantalón, que costó el doble de lo que costó la Camisa, es $\$30{,}000$. Por ende, la suma de los precios del Pantalón y la Camisa es

$$\$15{,}000 + \$30{,}000 = \$45{,}000.$$

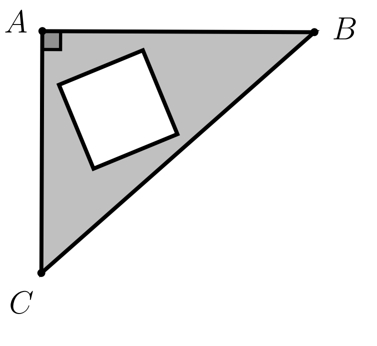
3.2. Prueba Selectiva

3.2.1. Prueba Selectiva: 19 de mayo

1. En la escuela primaria San Fermín por cada 4 niños hay 5 niñas. En primero hay 50 estudiantes y en cada grado a partir de segundo hay 20 estudiantes más que en el grado anterior. Las cantidades de niños y niñas de primaria son respectivamente

(a) 150 y 300 (b) 180 y 225 (c) 200 y 250 (d) 40 y 50

2. En la siguiente figura $AB = 9\,cm$, $AC = 8\,cm$ y el área de la región sombreada es $27\,cm^2$. El perímetro del cuadrado en centímetros es



(a) 72 (b) 9 (c) 36 (d) 12

3. ¿Cuántos números capicúa de 4 cifras son múltiplos de 3?

Nota: *un número se llama* **capicúa** *si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Ejemplo:* 4224 *es capicúa.*

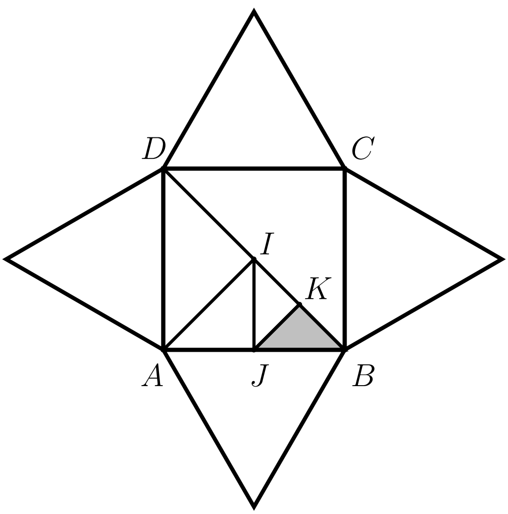
(a) 27 (b) 30 (c) 33 (d) 24

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

4. Carlos, Juan, Andrés, Camila y Juana van al cine y eligen cinco puestos consecutivos en una misma fila. Si Juana se sienta en la mitad de todos y Andrés no quiere sentarse al lado de Juana, ¿de cuántas formas diferentes se pueden acomodar Carlos, Juan, Andrés y Camila?

5. Cada día, Sergio sale de su casa a las $5:30\ a.m.$ y debe desplazarse 6.000 metros para ir a la escuela. El hace $\frac{3}{5}$ del trayecto corriendo y el resto caminando, sin hacer pausas. Si corriendo avanza 150 metros en un minuto y caminando avanza 120 metros en un minuto, ¿a qué hora llega a la escuela?

6. En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado y los triángulos externos tienen igual área. Los puntos I, J y K son puntos medios de los segmentos $\overline{DB}, \overline{AB}$ y $\overline{BI}$ respectivamente. Si el área de la estrella es $48\,cm^2$ y el área de uno de los triángulos externos es $8\,cm^2$, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?



3.2.2. Solución

1. En primero hay 50 estudiantes y en cada grado a partir de segundo hay 20 estudiantes más que en el grado anterior. Es decir, en segundo hay $50+20=70$; en tercero hay $70+20=90$; en cuarto hay $90+20=110$ y en quinto hay $110+20=130$. Así el número total de estudiantes es:

$$50+70+90+110+130=450.$$

Ahora, puesto que por cada 4 niños hay 5 niñas, de los 450 estudiantes, $\frac{4}{9}$ son niños y $\frac{5}{9}$ son niñas. Luego las cantidades de niños y niñas en primaria son respectivamente 200 y 250.

2. Como $\overline{CA}$ es la altura del triángulo ABC respecto a la base $\overline{AB}$ se tiene que el área del triángulo ABC es

$$\frac{9\times 8}{2}=36\,cm^2.$$

Dado que el área de la región sombreada es $27\,cm^2$, se concluye que el área del cuadrado es $9\,cm^2$. De aquí que el cuadrado tiene $3\,cm$ de lado y por tanto tiene $12\,cm$ de perímetro.

3. Teniendo en cuenta el criterio de divisibilidad por 3, se tiene que los números capicúa de cuatro cifras que son múltiplos de 3 cumplen con las siguientes condiciones:

- Tienen la forma $abba$, donde a, b son dígitos, con $a\neq 0$.
- La suma de sus dígitos es un múltiplo de 3.

Los números que cumplen con estas condiciones son:

1221	1551	1881	2112	2442	2772
3003	3333	3663	3993	4224	4554
4884	5115	5445	5775	6006	6336
6666	6996	7227	7557	7887	8118
8448	8778	9009	9339	9669	9999

Luego hay 30 números capicúa de cuatro cifras que son múltiplos de 3.

4. Como Juana tiene que sentarse en el medio, entonces solo tiene una forma de hacerlo; Andrés tiene dos posibilidades de sentarse, que son a los dos extremos, para no quedar al lado de Juana; Carlos, Juan y Camila tienen 6 formas diferentes de sentarse. Así por el principio de multiplicidad hay $1 \times 2 \times 6 = 12$ formas diferentes que se pueden acomodar.

5. Sergio corre $\dfrac{3}{5} \times 6000 = 3600\ m$ y avanza $150\ m$ cada minuto, por tanto recorre $3600\ m$ en 24 minutos. Los restantes $2400\ m$ los recorre caminando. Avanzando $120\ m$ cada minuto, completa esta distancia en 20 minutos. Dado que sale de su casa a las $5:30\ am$, llega a la escuela a las $6:14\ am$.

6. Observe que el área $A_\square$ del cuadrado $ABCD$ puede calcularse mediante la diferencia entre el área A_E de la estrella y las áreas $A_\triangle$ de los triángulos externos, que son todas iguales. Es decir,

$$A_\square = A_E - 4 \times A_\triangle = 48 - 4 \times 8 = 48 - 32 = 16\ cm^2.$$

Ahora bien, el área del triángulo ABD es la mitad del área del cuadrado, es decir $8\ cm^2$. El área del triángulo AIB es la mitad del área del triángulo ABD, o sea $4\ cm^2$. El área del triángulo JIB es la mitad del área del triángulo AIB, esto es $2\ cm^2$. Finalmente, el área del triángulo JKB es la mitad del área del triángulo JIB, luego es $1\ cm^2$.

Se concluye, por lo tanto, que el área del triángulo sombreado es $1\ cm^2$.

3.3. Prueba Final

3.3.1. Resultados

El comité organizador de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas, de la Universidad Industrial de Santander agradece la participación en la sexta edición de las olimpiadas para primaria y se enorgullece de felicitar por su EXCELENTE desempeño a lo largo del certamen a los siguientes estudiantes, quienes se destacaron entre los 750 participantes de este nivel, alcanzando los mejores puntajes en la prueba final.

CUADRO DE HONOR

1er Puesto, medalla de oro

MICHELLE SOFÍA DURÁN UREÑA

Aspaen Gimnasio Cantillana, Piedecuesta.

2^{o} Puesto, medalla de plata

JUAN ESTEBAN MANTILLA NUÑEZ

Colegio Bilingüe Divino Niño, Bucaramanga.

3er Puesto, medalla de bronce

IVAN DAVID GÓMEZ SILVA

Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.

4^{o} Puesto

JUAN SEBASTIÁN RUEDA CÁCERES

Colegio San Pedro Claver, Bucaramanga.

5^{o} Puesto

LUISA FERNANDA CABALLERO POVEDA

Aspaen Gimnasio Cantillana, Piedecuesta.

3.3.2. Prueba Final: 3 de junio

1. Encuentre el subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ con más elementos que cumple las siguientes condiciones:

(i) Uno de los números divide a todos los demás.

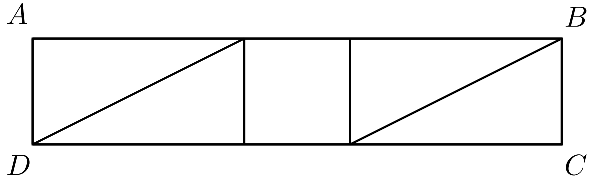
(ii) Uno de los números divide a todos los demás, excepto a uno de ellos.

(iii) Uno de los números divide a todos los demás, excepto a dos de ellos.

(iv) Uno de los números divide a todos los demás, excepto a tres de ellos.

2. Daniel compró una bolsa de caramelos. Al segundo día después de la compra, regaló a sus amigos la mitad más dos de los caramelos que compró; al tercer día regaló la mitad más tres de lo que le quedaba; al cuarto día, luego de regalar la mitad más cuatro de los caramelos que tenía, se quedó con dos caramelos. ¿Cuántos caramelos compró Daniel?

3. La siguiente figura muestra un rectángulo dividido en un cuadrado y cuatro triángulos iguales. Si el cuadrado y los triángulos tienen igual área y el lado $\overline{AB}$ del rectángulo mide $25\ cm$, ¿cuál es el área del rectángulo $ABCD$?



4. Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado **II** depende de la respuesta del enunciado **I** y el enunciado **III**, de la respuesta del enunciado **II**. En la hoja de respuestas, escriba el procedimiento y la respuesta de cada enunciado en los recuadros correspondientes.

   I. En una fiesta hay 160 personas, de los cuales $\frac{3}{4}$ del total son hombres, ¿cuántas son mujeres?

   II. La edad de Esteban es igual al máximo común divisor entre 32 y el número de la respuesta del ítem anterior. ¿Cuál es la edad de Esteban?

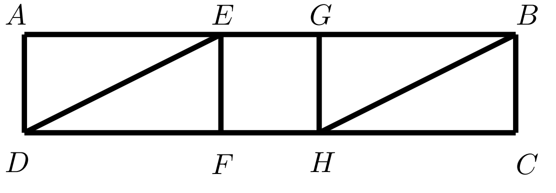
   III. La base de un triángulo es 2017 y la altura coincide con la respuesta del ítem anterior. ¿Cuál es el área de ese triángulo?

3.3.3. Solución

1. Note que el subconjunto $\{1, 2, 4, 8, 16, 24, 32, 40, 48\}$ satisface las 4 condiciones del enunciado, ya que en él está el 1 que divide a todos los demás, está el 2 que divide a todos excepto al 1, está el 4 que divide a todos excepto al 1 y 2, y está el 8 que divide a todos excepto al 1, 2 y 4. Como ejercicio al lector se deja verificar que en efecto, este es el subconjunto más grande que cumple tales condiciones.

2. Si en el cuarto día quedaron dos caramelos después de regalar la mitad más cuatro de los caramelos que tenía ese día, entonces el cuarto día tenía $2 \times (2 + 4) = 12$ caramelos. Esos 12 caramelos quedaron después de regalar la mitad más tres de los caramelos que tenía al iniciar el tercer día, por tanto al iniciar el tercer día tenía $2 \times (12 + 3) = 30$ caramelos. Esos 30 caramelos le quedaron después de regalar la mitad más dos de los caramelos que tenía al iniciar el segundo día, de manera que al iniciar el segundo día tenía $2 \times (30 + 2) = 64$ caramelos. Así que Daniel compró una bolsa de 64 caramelos.

3. Consideremos la siguiente figura:



Como el área de los triángulos es igual al área del cuadrado, se tiene que el área del rectángulo $AEFD$ es dos veces el área del cuadrado, a partir de esto podemos afirmar que

$$\boxed{AE = 2EG.} \tag{3.1}$$

Del enunciado del problema se tiene que $AE + EG + GB = 25\ cm$.

Como los rectángulos $AEFD$ y $GBCH$ son congruentes, se obtiene que $AE = GB$, por lo tanto

$$\boxed{2AE + EG = 25\ cm} \tag{3.2}$$

.

Con esto, reemplazando (3.1) en (3.2), se deduce que $EG = 5\ cm$. Luego $AD = 5\ cm$ pues $EG = EF$ y $EF = AD$.

Así, área del rectángulo $ABCD$ es $5 \times 25 = 125\ cm^2$.

4. **I.** La cantidad de hombres que hay en la fiesta es $\frac{3}{4}$ de 160, o sea, hay 120 hombres. En consecuencia, hay $160 - 120 = 40$ mujeres en la fiesta.

II. Observe que los divisores de 32 y 40 son respectivamente:

$$D_{32} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\},$$
$$D_{40} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}.$$

Puesto que 8 es el mayor número que se repite en los dos conjuntos anteriores, el máximo común divisor entre 32 y 40 es precisamente 8. Esta es la edad de Esteban.

III. Usando la fórmula para el área de un triángulo se tiene que

$$\frac{2017 \times 8}{2} = 8068\ u^2.$$

Bibliografía

[1] Brochero F. y Restrepo J. *Un recorrido por la Teoría de Números.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[2] Del Centina A. and Fiocca A. *The correspondence between Sophie Germain and Carl Friedrich Gauss.* Arch. Hist. Exact Sci. 66 (2012), no. 6, 585-700.

[3] Jaime F. *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Primaria 1990-1994.* Universidad Antonio Nariño, 1995.

[4] Madroñero J y Contreras I. *Un recorrido por el Álgebra.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2006.

[5] *Matemáticos en México* (Blog) http://matematicos.matem.unam.mx/otras-efemerides-de-todo-el-mes-de-septiembre/668-05-de-septiembre-natalicio-de-jean-etienne-montucla [29 de abril de 2018]

[6] Molero M. y Salvador A. *Germain, Sophie (1776-1831)*, Centro virtual de divulgación de las matemáticas, Real Sociedad Matemática Española.

[7] Restrepo P. *Un recorrido por la Combinatoria I.* Universidad Antonio Nariño y Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2010.

[8] RIBENBOIM P., *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[9] SALMERÓN M. *Marie-Sophie Germain: la matemática como estrategia de vida*, Revista de divulgación científica y tecnológica de la Universidad Veracruzana Vol. 25 No. 2 (2012).

[10] *Sophie Germain.* https://es.wikipedia.org/wiki/Sophie_Germain [27 de abril de 2018]

[11] ZULUAGA C. *VIII Semana de la Licenciatura en Matemáticas,* Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 2001.

INFORMES

olimpiadas.matematicas@uis.edu.co

Tel: 6344000 ext: 2316-1281, 6450301

Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.

"VIGILADA MINEDUCACIÓN"

Diseño e Impresión: DIVISIÓN DE PUBLICACIONES UIS - TEL. 634 8418