Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
XIV Olimpiadas Regionales de Matemáticas.
SECUNDARIA-2022.

"La esencia de las matemáticas reside en su libertad."
- Georg Cantor.

Tercera Capacitación

Nivel Básico y Medio

6°, 7°, 8° y 9°.

Problema 1. Los calcetines del marciano

Un marciano tiene infinitos calcetines rojos, azules, amarillos y negros en un cajón.

(a) Si el marciano tiene los ojos vendados, ¿cuántos calcetines debe sacar del cajón, como mínimo, para estar SEGURO de obtener un par con el mismo color?

(b) Si el marciano tiene 6 pies, ¿cuántos calcetines, como mínimo, debe sacar del cajón, con los ojos vendados, para estar SEGURO de obtener uno para cada uno de sus pies, todos del mismo color?

Problema 2. Dividiendo entre 9

Sergio afirma que entre 10 números naturales, SIEMPRE habrá dos cuya diferencia sea múltiplo de 9. ¿Es cierto o falso lo que afirma Sergio?

Problema 3. ¿Cuántas claves?

La clave del celular de Sara es un número de cuatro cifras, múltiplo de 5, cuyo primer dígito (de izquierda a derecha) es impar. ¿Cuántos de estos números hay?

Problema 4. Más restricciones...

De los posibles números del problema anterior, ¿cuántos tienen todas sus cifras diferentes?

Problema 5. ¿Cuántos pódium?

En una olimpiada de matemáticas participan 50 estudiantes. ¿De cuántas maneras se pueden dar los tres primeros lugares, si no hay empates?

Problema 6. Paridad

¿De cuántas maneras se pueden elegir tres números naturales diferentes, mayores que 0 y menores o iguales que 55, de modo que la suma de ellos sea par?

Problema 7. ¿Cuántos números?

¿Cuántos números enteros positivos, menores que 1000 no son divisibles por 5 ni por 7?

Problema 8. ¿Truco?

Muestre que, si se eligen cinco números enteros diferentes del 1 al 8, dos de ellos deben sumar nueve.

Problema 9. Reorganizando el abecedario

Suponga que las letras del abecedario están organizadas de manera aleatoria una seguida de la otra, en fila.

(a) Muestre que debe haber cuatro consonantes consecutivas.

(b) Si las letras están organizadas una seguida de la otra en el borde de un círculo. Muestre que al menos cinco consonantes son consecutivas.

Problema 10. ¿Cuántas placas?

El ministerio de transporte de cierto país estableció las siguientes reglas para las placas de vehículos públicos: Las placas de los buses solo pueden tener las letras $\{X, Y, Z, W\}$; las de los taxis, solamente, las letras $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$; y cualquier otro tipo de vehículo, solamente, las letras $\{K, L, M, N, O, P\}$. Todas las placas deben llevar tres letras seguidas de tres dígitos.

(a) ¿Cuántas placas con estas reglas son posibles para los vehículos públicos de tal país?

(b) Si debido al censo de vehículos deciden restringir que las placas no puedan repetir letras ni números, ¿cuántas placas se disminuyen con la nueva restricción?

Problema 11. Torres del ajedrez

¿De cuántas formas se pueden ubicar 8 torres en un tablero de ajedrez, de modo que no se ataquen entre ellas?

Problema 12. ¿Cuántos objetos?

En una caja negra hay 8 bolas negras y 8 bolas blancas, mientras que en otra caja negra hay 8 dados negros y 8 dados blancos. ¿Cuántos objetos, como mínimo, se deben sacar de las cajas para asegurar que se obtienen 4 objetos del mismo color, de los cuales 2 son bolas y 2 son dados?

Problema 13. COMATEQ2022

Sara debe elegir un número de cuatro cifras tal que el producto de las cifras de ese número sea par. ¿Cuántos números así hay?

Problema 14. COMATEQ2022

Oscar tiene una bolsa con ocho lápices que solo se pueden distinguir por su color. Tiene cinco azules y tres rojos. Susana le pide prestado los tres rojos y a Oscar se le ocurre un juego. Susana debe sacar un lápiz a la vez de la bolsa con los ojos cerrados, hasta que tenga los tres lápices rojos. Oscar le regalará los tres lápices rojos si logra sacarlos **justo** antes de extraer el sexto lápiz. ¿De cuántas formas puede ganar el juego Susana?

Solucionario
Tercera Capacitación
Nivel Básico
6° y 7°

Solución Problema 1.

(a) Dado que el marciano tiene calcetines suficientes de cuatro colores, por el principio del Palomar, debe extraer como mínimo 5 calcetines para estar seguro de obtener un par del mismo color.

(b) El marciano debe extraer $5 \times 4 + 1 = 21$ calcetines, para estar seguro de obtener 6 con el mismo color.

Solución Problema 2.

Hay 9 posibles residuos al dividir un número entero entre 9 estos son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8. Por lo que al seleccionar 10 números enteros, como mínimo, hay dos que dejan el mismo residuo r, sean estos $a = 9q + r$ y $b = 9c + r$. Note que al restar estos números, su diferencia es múltiplo de 9 :

$$a - b = 9q + r - (9c + r) = 9q - 9c = 9(q - c).$$

Por lo tanto lo que afirma Sergio es CIERTO.

Solución Problema 3.

Cómo la primera cifras es impar, entonces esta se puede escoger de 5 formas, además el número es múltiplo de 5, entonces termina en 0 o 5, de modo que la cifra de las unidades se puede escoger de 2 formas. Las cifras de las decenas y de las centenas no tienen condiciones, luego se pueden escoger, cada una, de 10 formas. Por lo anterior la cantidad de números que cumplen las condiciones es:

$$\underbrace{5\ opciones}_{\text{Und. mil}} \times \underbrace{10\ opciones}_{\text{centenas}} \times \underbrace{10\ opciones}_{\text{decenas}} \times \underbrace{2\ opciones}_{\text{unidades}} = \underbrace{5 \times 10 \times 10 \times 2 = 1000.}_{\text{cantidad de números}}$$

Solución Problema 4.

Si el número termina en 5, entonces las posibilidades para la primera cifra son cuatro: $1, 3, 7$ y 9. A continuación, la cifra de las centenas solo podrá escoger de 8 formas y la de las decenas de 7, luego de estos números habrán:

$$\underbrace{4\ opciones}_{\text{Und. mil}} \times \underbrace{8\ opciones}_{\text{centenas}} \times \underbrace{7\ opciones}_{\text{decenas}} \times \underbrace{1\ opciones}_{\text{unidades=5}} = \underbrace{4 \times 8 \times 7 \times 1 = 224.}_{\text{cantidad de números}}$$

Ahora, si el número termina en 0, las posibilidades para la primera cifra son cinco: $1, 3, 5, 7$ y 8. A continuación, la cifra de las centenas solo podrá escoger de 8 formas y la de las decenas de 7, luego de estos números habrán:

$$\underbrace{5\ opciones}_{\text{Und. mil}} \times \underbrace{8\ opciones}_{\text{centenas}} \times \underbrace{7\ opciones}_{\text{decenas}} \times \underbrace{1\ opciones}_{\text{unidades=5}} = \underbrace{5 \times 8 \times 7 \times 1 = 280.}_{\text{cantidad de números}}$$

De modo que la cantidad de números del problema anterior, que tienen todas sus cifras diferentes es $224 + 280 = 504$.

Solución Problema 5.

El número de formas en que se pueden dar los tres primeros lugares está dado por:

$$\underbrace{50\ opciones}_{\text{Primer Lugar}} \times \underbrace{49\ opciones}_{\text{Segundo Lugar}} \times \underbrace{48\ opciones}_{\text{Tercer Lugar}} = \underbrace{50 \times 49 \times 48 = 117600.}_{\text{Posibles pódium}}$$

Solución Problema 6.

Para que la suma de tres números naturales sea par, debe suceder que los tres sean pares, o dos sean impares y el otro par. Además, desde 1 hasta 55 hay 27 números pares y 28 impares. Contemos las opciones.

Los tres pares: $\binom{27}{3} = 2925$.

Dos impares y uno par: $\binom{28}{2} \times \binom{27}{1} = 378 \times 27 = 10206$.

En total 13131 formas de elegir los tres números.

Solución Problema 7.

Desde 1 hasta 999 hay 199 múltiplos de 5, 142 múltiplos de 7 y 28 múltiplos de 35 (de 5 y 7 a la vez). Por lo tanto hay $199 + 142 - 28 = 313$ que son múltiplos de 5 o 7. De modo que los que NO son divisibles por 5 ni por 7 son: $999 - 313 = 686$.

Solución Problema 8.

Sabemos que nueve se puede escribir como

$$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5.$$

De este modo, en el "peor de los casos", al escoger 4 números enteros diferentes del 1 al 8 tendríamos $\{1, 2, 3, 4\}$ o $\{5, 6, 7, 8\}$
Así, al seleccionar el quinto número necesariamente este debe sumar 9 con alguno de los ya escogidos.

Solución Problema 9.

(a) Considere los espacios que hay entre las vocales

$$\text{---------}\ v_1\ \text{---------}\ v_2\ \text{---------}\ v_3\ \text{---------}\ v_4\ \text{---------}\ v_5\ \text{---------}$$

Note que hay 6 espacios, y en total hay 22 consonantes, por lo tanto en alguno de estos espacios habrá al menos 4 consonantes. cumpliéndose que hay 4 consonantes seguidas.

(b) Siguiendo las ideas del inciso anterior, al ubicar las 5 vocales en el borde de un círculo, estas establecen 5 espacios, y dado que son 22 consonantes, entonces en algún espacio deben caer al menos 5 consonantes.

Solución Problema 10.

Contemos las placas para cada caso:

Buses:

$$\underbrace{4 \text{ opciones}}_{1^{ra} \text{ letra}} \times \underbrace{4 \text{ opciones}}_{2^{da} \text{ letra}} \times \underbrace{4 \text{ opciones}}_{3^{ra} \text{ letra}} \times \underbrace{10 \text{ opciones}}_{1^{er} \text{ número}} \times \underbrace{10 \text{ opciones}}_{2^{do} \text{ número}} \times \underbrace{10 \text{ opciones}}_{3^{er} \text{ número}} = \underbrace{4^3 \times 10^3 = 64000}_{\text{placas para buses}}$$

Taxis:

$$\underbrace{10 \text{ opciones}}_{1^{ra} \text{ letra}} \times \underbrace{10 \text{ opciones}}_{2^{da} \text{ letra}} \times \underbrace{10 \text{ opciones}}_{3^{ra} \text{ letra}} \times \underbrace{10 \text{ opciones}}_{1^{er} \text{ número}} \times \underbrace{10 \text{ opciones}}_{2^{do} \text{ número}} \times \underbrace{10 \text{ opciones}}_{3^{er} \text{ número}} = \underbrace{10^6 = 1000000}_{\text{placas para taxis}}$$

Otros vehículos:

$$\underbrace{6 \text{ opciones}}_{1^{ra} \text{ letra}} \times \underbrace{6 \text{ opciones}}_{2^{da} \text{ letra}} \times \underbrace{6 \text{ opciones}}_{3^{ra} \text{ letra}} \times \underbrace{10 \text{ opciones}}_{1^{er} \text{ número}} \times \underbrace{10 \text{ opciones}}_{2^{do} \text{ número}} \times \underbrace{10 \text{ opciones}}_{3^{er} \text{ número}} = \underbrace{6^3 \times 10^3 = 216000}_{\text{placas otros vehículos}}$$

De modo que en total, son posibles 1280000 placas para los vehículos púbicos.

Ahora, si además no se pueden repetir letras ni números en las placas tendríamos:

Buses:

$$\underbrace{4 \text{ opciones}}_{1^{ra} \text{ letra}} \times \underbrace{3 \text{ opciones}}_{2^{da} \text{ letra}} \times \underbrace{2 \text{ opciones}}_{3^{ra} \text{ letra}} \times \underbrace{10 \text{ opciones}}_{1^{er} \text{ número}} \times \underbrace{9 \text{ opciones}}_{2^{do} \text{ número}} \times \underbrace{8 \text{ opciones}}_{3^{er} \text{ número}} = \underbrace{17280}_{\text{placas para buses}}$$

Taxis:

$$\underbrace{10 \text{ opciones}}_{1^{ra} \text{ letra}} \times \underbrace{9 \text{ opciones}}_{2^{da} \text{ letra}} \times \underbrace{8 \text{ opciones}}_{3^{ra} \text{ letra}} \times \underbrace{10 \text{ opciones}}_{1^{er} \text{ número}} \times \underbrace{9 \text{ opciones}}_{2^{do} \text{ número}} \times \underbrace{8 \text{ opciones}}_{3^{er} \text{ número}} = \underbrace{518400}_{\text{placas para taxis}}$$

Otros vehículos:

$$\underbrace{6 \text{ opciones}}_{1^{ra} \text{ letra}} \times \underbrace{5 \text{ opciones}}_{2^{da} \text{ letra}} \times \underbrace{4 \text{ opciones}}_{3^{ra} \text{ letra}} \times \underbrace{10 \text{ opciones}}_{1^{er} \text{ número}} \times \underbrace{9 \text{ opciones}}_{2^{do} \text{ número}} \times \underbrace{8 \text{ opciones}}_{3^{er} \text{ número}} = \underbrace{86400}_{\text{placas para otros vehículos}}$$

Luego son posibles 622080 placas en las que no se repiten letras ni números.
Por lo anterior, el número de placas se disminuirá en 657920 con la nueva restricción.

Solución Problema 11.

Recuerde que las torres del ajedrez se mueven en linea recta (horizontal o verticalmente) y el tablero de ajedrez es una cuadrícula 8×8 casillas.

Por lo anterior, debe haber SOLO una torre en cada columna y en cada fila. Veamos de cuántas maneras podemos hacer esto.
En la primera fila, podemos poner la primera torre en cualquiera de las 8 casillas, es decir, tenemos 8 opciones. Una vez hemos puesto la primera torre; la segunda torre solo tendrá 7 casillas posibles en la segunda fila, pues ya no puede ir en la columna de la casilla donde se puso la primera torre. Análogamente, la tercera torre tendrá 6 opciones; la cuarta torre,5 opciones; la quinta torre, 4 opciones; la sexta torre, 3 opciones; la séptima torre, 2 opciones y la octava torre, 1 opción.

Así, por el principio multiplicativo, la cantidad de formas en que pueden ubicarse las 8 torres, sin que se ataquen entre sí, está dado por:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8! = 40320.$$

Solución Problema 12.

Al extraer 10 objetos de la caja con dados, se aseguran que hay al menos 2 dados blancos y 2 dados negros. Ahora si se extraen 3 objetos de la otra caja se asegura que habrán al menos 2 bolas de un mismo color. De modo, que al extraer $10 + 3 = 13$ objetos se asegura que habrán al menos 4 objetos del mismo color, de los cuales 2 serán dados y 2 serán bolas. $10 + 3 = 13$

Solución Problema 13.

El total de números de cuatro cifras está dado por:

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000.$$

Ahora, note que el producto de las cifras de un número es par, si alguna de las cifras es par. Vamos a calcular en cuántos de los números de cuatro cifras, NINGUNA de sus cifras es par, es decir los formados solamente por los dígitos $1, 3, 5, 7$ y 9; estos son: $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$. Por lo tanto, hay $9000 - 625 = 8375$ números tales que ALGUNA de sus cifras es par y por lo tanto el producto de sus cifras también es par.

Solución Problema 14.

Como Susana debe extraer los tres lápices rojos justo antes de sacar el sexto lápiz, entonces tiene que suceder que su quinto lápiz debe ser el tercer rojo. Por ejemplo, si denotamos por R la extracción de un lápiz rojo y por A la de uno azul, entonces un posible resultado del juego es $RRAAR$. Note que necesariamente deben haber dos lápices azules. Para dar la respuesta sólo debemos contar de cuántas formas podemos organizar las dos letras A y las dos letras R, porque la quinta tiene que ser una R. Es decir, no es posible el resultado $ARRRA$ porque en la cuarta extracción ya obtuvo sus lápices rojos. Recuerde que los lápices solo se pueden distinguir por su color. Los posibles resultados son:

$$RRAAR, \quad AARRR, \quad ARARR, \quad ARRAR, \quad RAARR, \quad RARAR.$$

Observación interesante: cuando queremos ordenar n elementos que se repiten, o que no podemos distinguir porque a son de un tipo y b son de un segundo tipo, con $a + b = n$, entonces el número de posibles ordenamientos es $\frac{n!}{a! \cdot b!}$, donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Esto se puede generalizar a más de dos tipos de elementos.

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis